

# MP

DS de SI, janvier 2022

Durée 2h

Corrigé prochainement sur le site :  
<http://perso.numericable.fr/starnaud/>

Ce DS comporte :

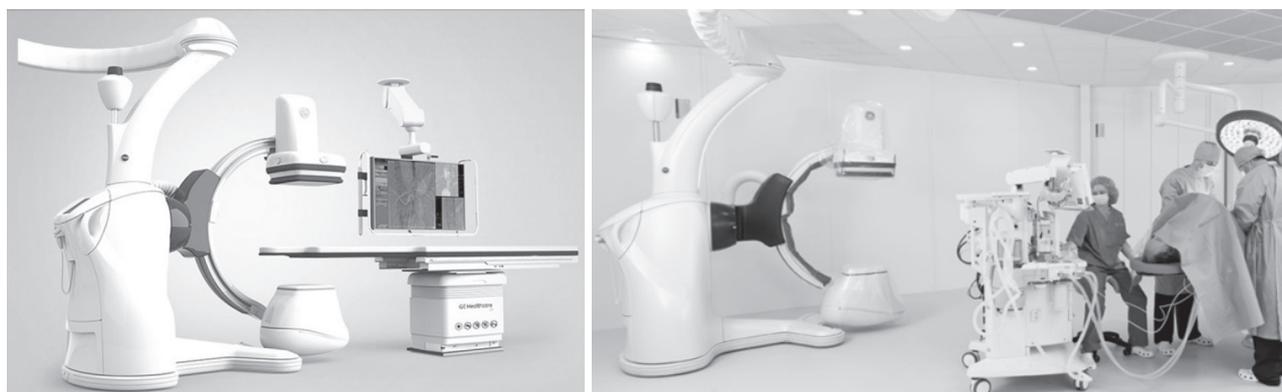
- ✓ Un sujet, pages 2 à 10 et 14 à 15.
  - ✓ Un document réponses, 3 pages pour les questions 4, 8, 11, 15, 16 et 17.
- Ne pas aborder les questions d'informatique, de 18 à 24.
- Aborder en priorité les questions :
- ✓ 4 à 17      Asservissement.
  - ✓ 1 à 3      Cinématique.
  - ✓ 25 à 31    Dynamique.

# Système mobile d'imagerie interventionnelle Discovery IGS 730

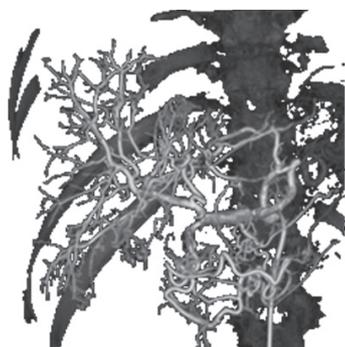
## 1 Présentation du système

### 1.1 Mise en situation

Développé dans le cadre d'un projet ambitieux associant des industriels (GE Healthcare, BA Systèmes et C&K), deux laboratoires de recherche (CEA-LIST et IRCCYN) et un centre de recherche préclinique (laboratoire CR2i INRA AP-HP), le Discovery IGS 730 (**figure 1**) est le premier système mobile d'imagerie interventionnelle. Embarquant un ensemble de logiciels de traitement d'images pour les applications vasculaires, l'oncologie et la cardiologie (**figure 2**) et permettant un accès complet au patient, il guide les gestes de l'équipe médicale tout au long de l'intervention chirurgicale.



**Figure 1** – Système d'imagerie robotisé Discovery IGS 730 en situation de travail (photo de gauche) et en mode parking (photo de droite)



(a) Système vasculaire du poumon



(b) Système vasculaire général

**Figure 2** – Images 3D obtenues avec le système d'imagerie du Discovery IGS 730

Le Discovery IGS 730 révolutionne le domaine de l'imagerie interventionnelle. Contrairement aux systèmes d'angiographie traditionnels, il n'est ni fixé au sol, ni suspendu au plafond, mais dispose d'une base motorisée guidée par laser qui transporte l'arceau d'imagerie. Cette innovation technologique offre une mobilité totale au système qui peut, par exemple, rejoindre de manière autonome une position « parking » prédéfinie afin de laisser tout le champ disponible à l'équipe médicale pour s'occuper du patient. Ce gain de mobilité permet également une intégration aisée en milieu clinique, un accès facilité au patient et des possibilités de positionnement illimitées.

## 1.2 Analyse système partielle

La **figure 3** présente un extrait du cahier des charges du système d'imagerie dans la phase de vie d'utilisation. La **figure 4** présente son diagramme de définition des blocs.

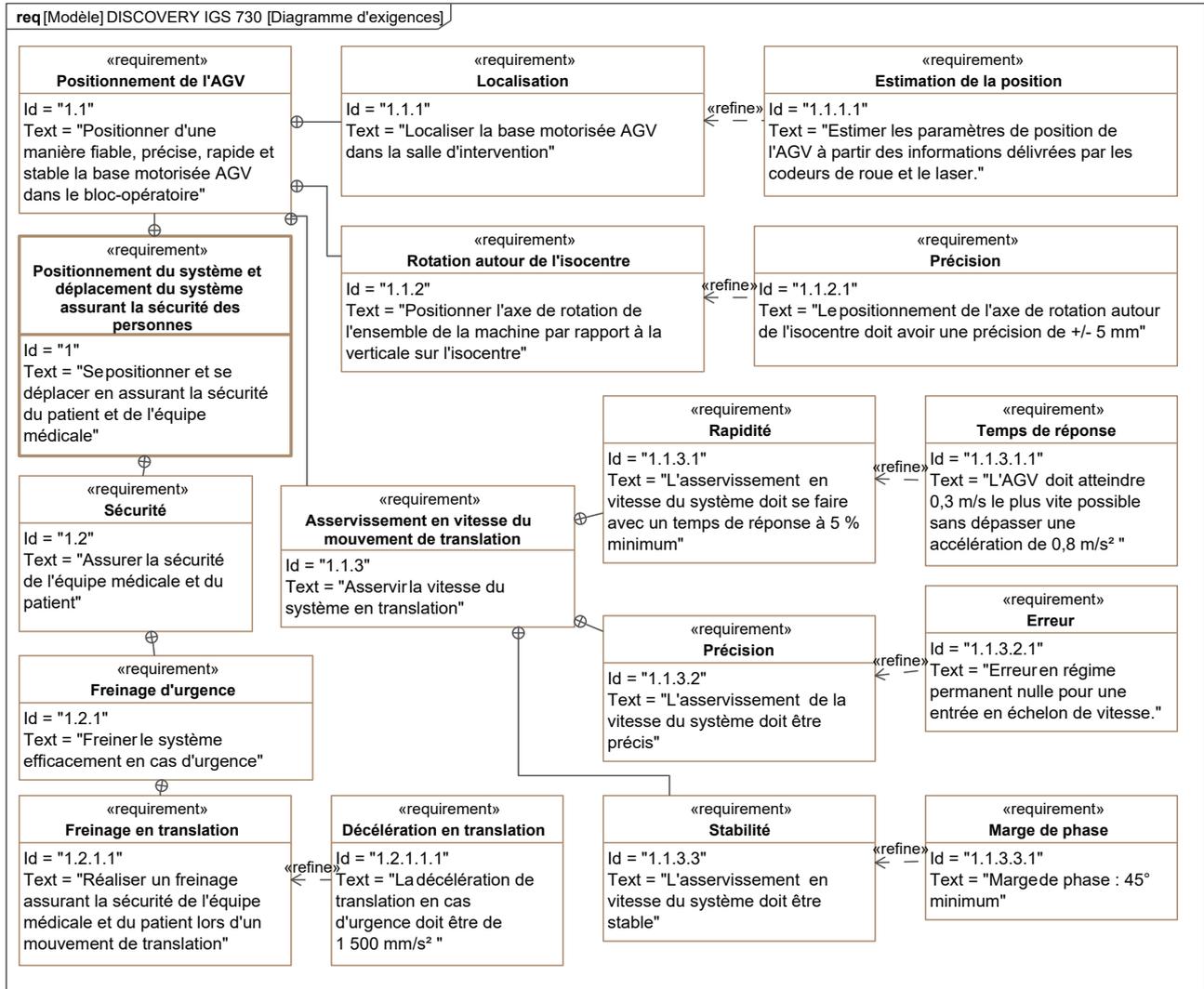


Figure 3 – Diagramme d'exigences partiel du Discovery IGS 730

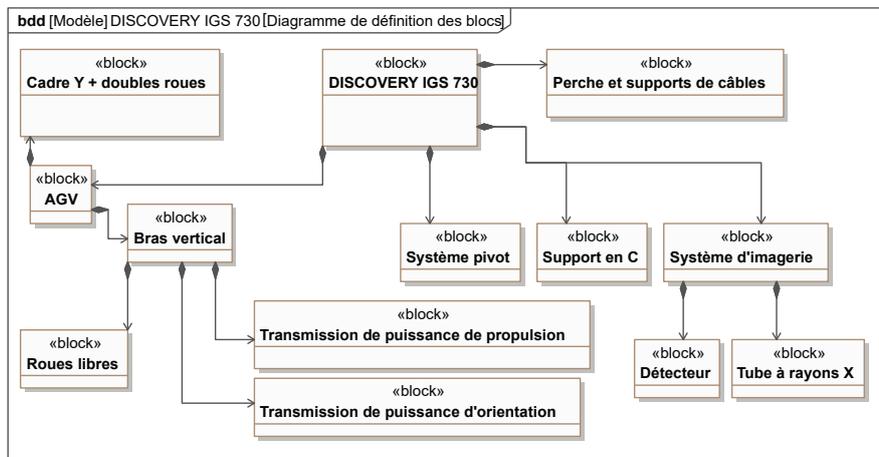
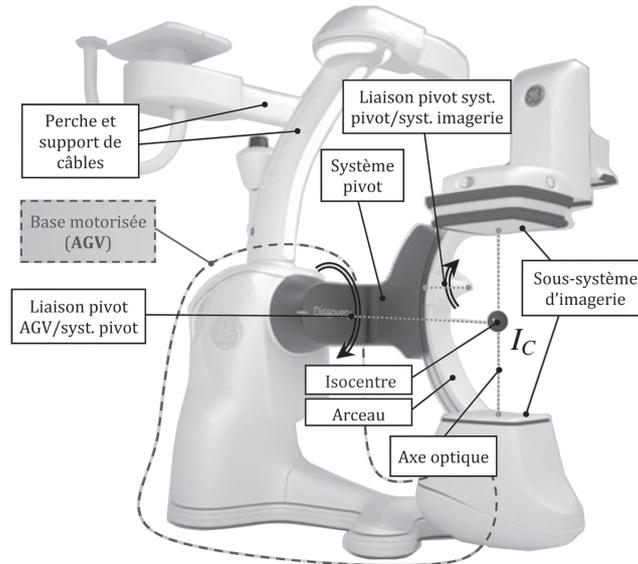


Figure 4 – Diagramme de définition de blocs du Discovery IGS 730

Le système Discovery IGS 730 est constitué principalement (**figure 4**, page 3 et **figure 5**) :

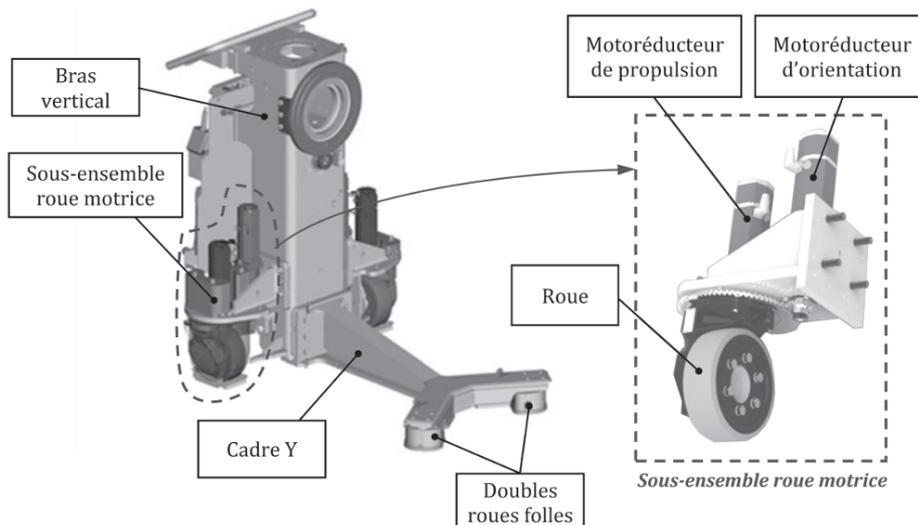
- d'une base motorisée, aussi appelée AGV (pour Automated Guided Vehicle, soit véhicule à guidage automatique) ;
- d'une perche et d'un support de câbles ;
- du sous-système d'imagerie supporté par un bras en « C » ou arceau. Le système d'imagerie est lié à la base motorisée par l'intermédiaire de deux liaisons pivot. Un point caractéristique appelé « isocentre » (point  $I_C$ ) est rattaché au sous-système d'imagerie. Il est défini comme l'intersection de l'axe optique et de l'axe de la liaison pivot AGV/système pivot.



**Figure 5** – Composants du Discovery IGS 730

La base motorisée AGV (**figure 6**) est constituée :

- d'une structure support, ou châssis, composée du bras vertical et du cadre Y ;
- de deux sous-ensembles roue motrice et motorisation associée (un motoréducteur d'orientation et un motoréducteur de propulsion pour chaque roue) ;
- de deux doubles roues « folles » non motorisées.



**Figure 6** – Éléments du sous-système AGV, carter et sous-système d'imagerie enlevés

### 1.3 Problème posé

La mobilité totale apportée au Discovery IGS 730, véritable innovation technologique dans le domaine de l'imagerie interventionnelle, a conduit les ingénieurs responsables du développement à travailler sur des problématiques spécifiques liées :

- à la maîtrise du positionnement du sous-système d'imagerie par rapport au patient ;
- à la sécurité du patient et de l'équipe médicale au cours des déplacements du système dans la salle d'intervention.

#### Objectif

**L'objectif de cette étude est de vérifier certaines performances du système afin de valider partiellement le respect des exigences liées au positionnement de l'AGV et par suite, du sous-système d'imagerie (Id. 1.1) et à la sécurité des personnes au cours des déplacements (Id. 1.2).**

### 1.4 Démarche

Le respect des exigences relatives au positionnement du sous-système d'imagerie (Id. 1.1), objet de la **partie 2**, est abordé à travers les points suivants :

- étude géométrique et cinématique de l'AGV afin d'estimer la précision requise au niveau de l'orientation des roues motrices (Id. 1.1.2) ;
- prévision des performances de la commande associée au mouvement de translation de la base motorisée (Id. 1.1.3) ;
- étude de la stratégie de localisation de l'AGV et développement d'algorithmes d'estimation de sa position (Id. 1.1.1).

Le respect des exigences relatives à la sécurité des personnes (Id. 1.2) fait l'objet de la **partie 3** consacrée à la prévision du comportement dynamique du système lors d'un freinage d'urgence intervenant au cours d'une manœuvre de translation (Id. 1.2.1.1).

## 2 Validation des exigences relatives au positionnement du sous-système d'imagerie

### 2.1 Modélisation géométrique et cinématique de l'AGV

#### Objectif

**Vérifier que l'exigence « Précision de positionnement de l'axe de rotation » (Id. 1.1.2.1) peut être satisfaite.**

Au cours d'une intervention médicale ou de certains examens d'imagerie, l'ensemble du système est amené à pivoter autour du patient suivant un axe vertical. Afin de ne pas perturber le processus d'acquisition, la position de l'isocentre  $I_C$  par rapport au patient ne doit pas varier durant la manœuvre (**figure 5**). Il est donc nécessaire de maîtriser, par le biais de l'orientation des roues motrices, le positionnement de l'axe de pivotement du système, afin que celui-ci passe par l'isocentre  $I_C$ .

#### Paramétrage et hypothèses

Le modèle géométrique retenu et le paramétrage associé sont donnés sur la **figure 7**, page 6.

Les repères et angles suivants sont introduits pour l'étude :

- $\mathcal{R}_0$  est un repère attaché à la salle d'intervention. Il a pour origine l'isocentre  $I_C$  (supposé fixe dans la salle) et pour base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que le vecteur  $\vec{z}_0$  soit vertical ascendant ;
- $\mathcal{R}_C(I_C, \vec{x}_C, \vec{y}_C, \vec{z}_0)$ , repère associé au cadre Y, avec  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_C) = (\vec{y}_0, \vec{y}_C)$  l'angle associé à la rotation du cadre Y autour de l'axe vertical  $(I_C, \vec{z}_0)$  passant par l'isocentre ;
- $\mathcal{R}_P(A, \vec{x}_P, \vec{y}_P, \vec{z}_0)$  repère associé à la liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  de la roue motrice droite avec le cadre Y, avec  $\beta = (\vec{x}_C, \vec{x}_P) = (\vec{y}_C, \vec{y}_P)$  l'angle associé à l'orientation de la roue motrice droite ( $R_D$ ) par rapport au cadre Y ;
- $\mathcal{R}_R(A, \vec{x}_{R_D}, \vec{y}_P, \vec{z}_{R_D})$ , repère associé à la roue motrice droite ( $R_D$ ), avec  $\theta_D = (\vec{x}_P, \vec{x}_{R_D}) = (\vec{z}_0, \vec{z}_{R_D})$  l'angle associé à la rotation de la roue motrice droite ( $R_D$ ) autour de l'axe  $(A, \vec{x}_{R_D})$ .

L'AGV est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(I, \vec{z}_0)$  ; sa géométrie est considérée comme symétrique par rapport à l'axe  $(I, \vec{y}_C)$ .

Les dimensions utiles ont pour valeurs :  $a = 1\,440$  mm,  $e = 800$  mm,  $r = AI_D = 115$  mm.

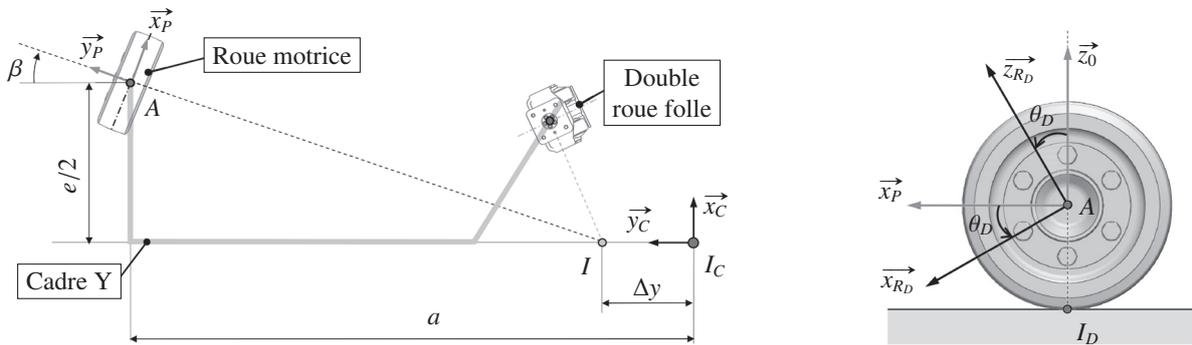


Figure 7 – Modèle retenu pour l'étude géométrique (à gauche, vue du demi-système)

Les hypothèses suivantes sont adoptées :

- les contacts roue-sol sont modélisés par des contacts ponctuels (point  $I_D$  pour la roue motrice droite) et les roues motrices roulent sans glisser sur le sol,
- les taux de rotation des roues motrices droite  $\dot{\theta}_D$  et gauche  $\dot{\theta}_G$  sont égaux.

On notera que l'angle  $\beta$  est négatif sur la figure 7.

### Étude du positionnement angulaire des roues motrices

**Q1.** En exploitant la condition de roulement sans glissement au point  $I_D$ , déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}_{\text{cadre}/\mathcal{R}_0}(A)$  dans la base du repère  $\mathcal{R}_P$  en fonction de  $\dot{\theta}_D$  et du rayon de roue  $r$ .

La figure 7 montre un décalage  $\Delta y$  entre l'axe de rotation du cadre  $(I, \vec{z}_0)$  et l'axe vertical passant par l'isocentre  $(I_C, \vec{z}_0)$ . Lorsque l'isocentre  $I_C$  est situé sur l'axe de rotation du mouvement du cadre par rapport à  $\mathcal{R}_0$  (soit  $\Delta y = 0$ ), la relation suivante est vérifiée :  $\vec{I}_C \vec{A} \cdot \vec{V}_{\text{cadre}/\mathcal{R}_0}(A) = 0$ .

**Q2.** En exploitant cette dernière relation, déterminer en fonction des paramètres géométriques utiles, l'expression de l'angle  $\beta$  correspondant. Calculer sa valeur numérique en degrés.

Le constructeur du groupe motoréducteur dédié à l'orientation de la roue motrice garantit une précision angulaire  $\Delta\beta = \pm 10^{-3}$  degrés pour l'angle d'orientation  $\beta$ .

**Q3.** En prenant comme référence la configuration pour laquelle l'isocentre  $I_C$  est situé sur l'axe de la rotation, déterminer la valeur de  $\Delta y$  associée à une erreur angulaire  $\Delta\beta = \pm 10^{-3}$  degrés. Conclure quant au respect de l'exigence (Id. 1.1.2.1).

## 2.2 Prédiction des performances « l'asservissement en vitesse du mouvement de translation de l'AGV »

### Objectif

Vérifier que l'exigence d'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la base motorisée AGV (Id. 1.1.3) et ses sous-exigences sont respectées.

Les déplacements de la base motorisée AGV sont contrôlés de la manière suivante : au niveau de chacun des 2 moteurs, des boucles de vitesse et de position assurent l'asservissement en vitesse et position du système. Nous ne nous intéresserons dans le sujet qu'à la boucle de vitesse. L'objectif de cette partie est de déterminer les paramètres de réglage de chacune des boucles d'asservissement en vitesse lors d'un mouvement de translation de l'AGV par rapport au sol.

### Étude préliminaire : moteurs brushless de propulsion

#### Hypothèses et modélisations :

- l'AGV se déplace en ligne droite (consigne de vitesse  $v_c(t)$ , les roues étant dans la même direction que l'axe de symétrie de l'AGV) ;
- les roues motrices roulent sans glisser sur le sol ;
- la charge extérieure est supposée équi-répartie sur chacun des deux moteurs. Ainsi, pour une vitesse  $v(t)$  de la plateforme, les deux moteurs de propulsion tournent à la même vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ , sont alimentés par une même tension de commande  $u(t)$  et fournissent un même couple moteur  $C_m(t)$  ;
- les perturbations sont réparties sur chacun des axes des deux moteurs et sont modélisées par un même couple de perturbation équivalent appliqué sur chacun des axes moteurs  $C_r(t)$  ;
- les caractéristiques inertielles de la plateforme sont représentées au niveau de chaque axe moteur par un moment d'inertie équivalent  $J_{eq}$  ;
- le comportement individuel d'un des deux moteurs brushless peut être approché par celui d'un moteur à courant continu avec les équations électromécaniques suivantes :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t) \quad (1) \quad C_m(t) = K_c i(t) \quad (2)$$

$$e(t) = K_e \omega_m(t) \quad (3) \quad C_m(t) - C_r(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (4)$$

Symbole	Désignation	Valeurs, unités
$u(t)$	Tension d'alimentation du moteur	[V]
$e(t)$	Tension contre-électromotrice dans un moteur	[V]
$i(t)$	Intensité du courant dans un moteur	[A]
$v(t)$	Vitesse de translation du système	[m/s]
$\omega_m(t)$	Vitesse angulaire de chacun des deux moteurs	[rad/s]
$C_m(t)$	Couple moteur appliqué par chacun des deux moteurs	[N.m]
$C_r(t)$	Couple de perturbation équivalent appliqué à chacun des deux axes moteurs	[N.m]
$R$	Résistance de l'induit d'un moteur	0,07 $\Omega$
$L$	Inductance de l'induit d'un moteur	0,15 mH
$K_e$	Constante de vitesse d'un moteur	0,113 V/(rad/s)
$K_c$	Constante de couple d'un moteur	0,113 N · m/A
$J_{eq}$	Inertie équivalente de la moitié du système ramenée sur l'axe d'un moteur	$5,3 \times 10^{-3}$ kg · m <sup>2</sup>

## Fonction de transfert d'un moteur de propulsion

On note  $\Omega_m(p)$ ,  $U(p)$ ,  $E(p)$ ,  $I(p)$ ,  $C_m(p)$  et  $C_r(p)$  les transformées de Laplace respectives de  $\omega_m(t)$ ,  $u(t)$ ,  $e(t)$ ,  $i(t)$ ,  $C_m(t)$  et  $C_r(t)$ .

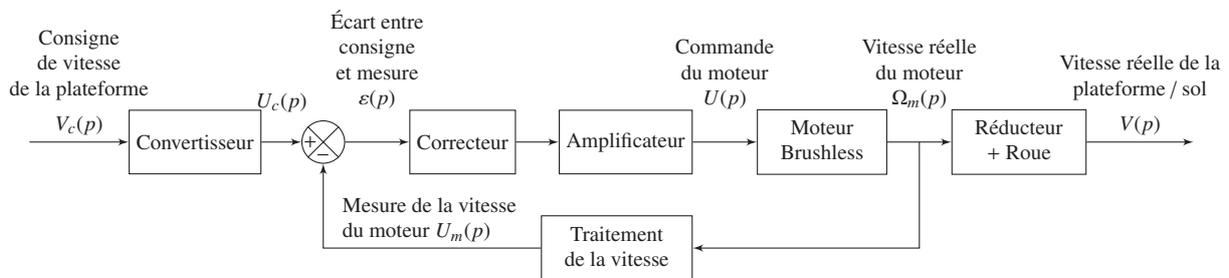
- Q4.** Déterminer **sur la copie** les transformées de Laplace des équations (1) à (4) du moteur définies en considérant des conditions initiales nulles. Compléter le schéma-bloc du **document réponse DR1** par les transmittances manquantes.
- Q5.** Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert du moteur en poursuite  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \Big|_{C_r(p)=0}$  (sans perturbation) et en régulation  $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} \Big|_{U(p)=0}$ , sous forme canonique. Par application du principe de superposition, en déduire l'expression de  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $U(p)$  et de  $C_r(p)$ .

Le système est étudié en l'absence de perturbation,  $C_r(t) = 0$ .

- Q6.** Réaliser l'application numérique de la fonction de transfert du moteur  $\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  et mettre le résultat sous la forme :  $\frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ .

## Étude de l'asservissement en vitesse de la base motorisée AGV

Pour une consigne de vitesse  $v_c(t)$  [m/s], les microcontrôleurs de pilotage génèrent une tension de consigne de rotation à appliquer à chaque moteur  $u_c(t)$  [V]. Un traitement numérique de la vitesse relevée sur l'axe de chaque moteur fournit une tension mesurée  $u_m(t)$  [V], image de la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Un correcteur (défini par la suite) adapte le signal écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, ce qui permet après correction et amplification, de définir la tension d'alimentation  $u(t)$  à appliquer aux moteurs.



**Figure 8** – Schéma-bloc fonctionnel de l'asservissement en vitesse d'un des deux moteurs

Blocs	Fonctions de transfert
Convertisseur	$K_{conv}$ (à déterminer)
Correcteur	$C(p)$ (réglé par la suite)
Amplificateur	$K_A = 7,9$ sans unité
Traitement numérique de la vitesse	$K_{Vit} = 1,4 \times 10^{-3}$ V/(rad/s)
Réduction et roue	$K_R$ (à déterminer)

Indépendamment des résultats trouvés précédemment, la fonction de transfert du moteur brushless sera prise égale à :  $H_m(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ , avec  $K_m = 8,85$ ,  $\tau_1 = 0,027$  s et  $\tau_2 = 0,0023$  s.

Le moteur est suivi d'un réducteur à deux étages : le premier avec un rapport de réduction  $k_1 = \frac{1}{4}$  et le second avec un rapport de réduction  $k_2 = \frac{1}{28,9}$ . Le rayon  $r$  des roues motrices est de 115 mm.

- Q7.** Déterminer les valeurs numériques et unités *SI* des gains  $K_R$  (ensemble réducteur et roue) et  $K_{conv}$  (convertisseur) en sachant que lorsque la vitesse réelle de l'AGV  $v(t)$  est égale à la vitesse de consigne  $v_c(t)$ , l'écart  $\varepsilon(t)$  doit être nul.
- Q8.** Compléter le schéma-bloc sur le **document réponse DR2** en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles, ainsi que les signes des sommateurs.

**Étude du système non corrigé :  $C(p) = 1$**

- Q9.** Déterminer, en fonction notamment de  $K_m$ ,  $K_R$ ,  $K_{vit}$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , l'expression de la fonction de transfert de la boucle de vitesse sous la forme canonique d'un système du second ordre  $H(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ . Donner les expressions littérales et numériques de  $K$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$ .
- Q10.** Justifier que l'accélération maximum peut être approchée par  $a_{max} = \frac{V_{max}}{t_{5\%}}$ .
- Q11.** À l'aide de l'abaque du **document réponse DR3**, déterminer le temps de réponse à 5 % de la boucle de vitesse (faire apparaître les tracés sur le document réponse). Ce temps de réponse est-il satisfaisant vis-à-vis de l'exigence Id. 1.1.3.1.1 ? Sinon, comment satisfaire cette exigence ?
- Q12.** Déterminer l'erreur en régime permanent de la boucle de vitesse pour une entrée en échelon. Permet-elle de satisfaire l'exigence Id. 1.1.3.2.1 ? Sinon, comment satisfaire cette exigence ?

**Étude du système corrigé :  $C(p) = K_p(1 + \frac{1}{T_i p})$ .**

- Q13.** Déterminer, en fonction notamment de  $K_m$ ,  $K_R$ ,  $K_{vit}$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte, sous la forme canonique suivante :  $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}(T_i p + 1)}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ . Donner l'expression littérale de  $K_{BO}$ .
- Q14.** On choisit  $T_i$  de façon à compenser le "mode le plus lent". Donner la valeur de  $T_i$ .

L'exigence de stabilité Id. 1.1.3.3.1 impose une marge de phase de  $45^\circ$ .

Indépendamment de la réponse à la question précédente, on prendra  $K_{BO} = 37.K_p$ .

- Q15.** Ce correcteur permet-il de répondre à l'exigence de précision ? Tracer les asymptotes et les courbes réelles avec  $K_p = 1$  dans le plan de Bode du **document réponse DR4**. Déterminer le gain  $K_p$  du correcteur permettant de satisfaire l'exigence de stabilité en étant le plus rapide (on s'intéressera à la bande passante à 0 dB).

La figure du **document réponse DR5** présente sur un même graphe les réponses à une consigne en échelon d'amplitude 0,3 m/s obtenues par simulation pour différentes valeurs de  $K_p$ .

**Q16.** Choisir le gain  $K_p$ , parmi les trois valeurs proposées, satisfaisant l'exigence de stabilité et de rapidité (notamment l'accélération qui ne doit pas dépasser  $0,8 \text{ m/s}^2$ ). Appuyez votre réponse par des tracés sur le **document réponse DR5**.

## SYNTHÈSE

**Q17.** Les courbes du **document réponse DR6** représentent la réponse réelle relevée sur la base motorisée AGV et le résultat obtenu par simulation numérique pour une entrée en échelon d'amplitude  $0,3 \text{ m/s}$ . Comparer quantitativement les résultats au cahier des charges et conclure sur les écarts.

### 2.3 Localisation de l'AGV : estimation de la position

#### Objectif

Mettre en place une stratégie pour répondre à l'exigence « Localiser la base motorisée AGV dans la salle d'intervention » (Id. 1.1.1) et développer les algorithmes de traitement numérique visant à estimer la position de l'AGV.

Les questions d'informatique peuvent être traitées en langage Python ou langage Scilab. Il est demandé au candidat de bien préciser sur sa copie le choix du langage et de rédiger l'ensemble de ses réponses dans ce langage. L'annexe page 16 rappelle les principales commandes utiles à la manipulation des vecteurs et matrices.

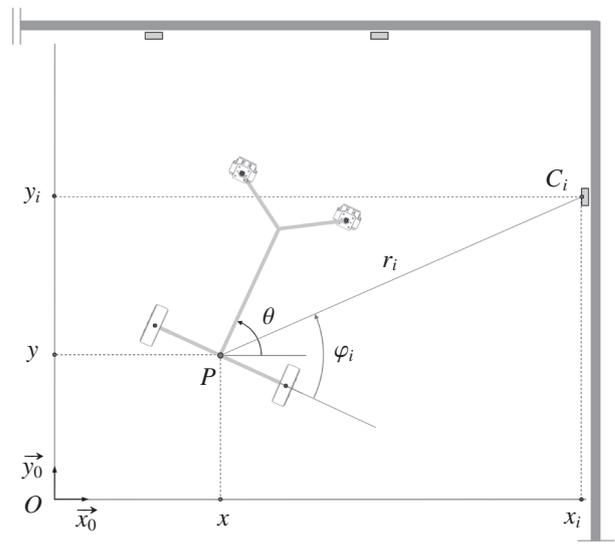
Dans tout le sujet, il sera supposé que les modules et bibliothèques sont déjà importés dans le programme.

#### Localisation par odométrie

La gestion des déplacements du système au sein de la salle d'intervention (**figure 9**) nécessite de déterminer la position de la plateforme mobile, repérée par le vecteur position  $\mathbf{p}$ , tel que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $\theta(t)$  sont les paramètres de position définis dans le repère global  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  associé à la salle d'intervention.



**Figure 9** – Paramétrage

Une première stratégie de localisation a conduit à estimer les paramètres de position par *odométrie* : partant d'une position initiale connue, la position est actualisée au cours du mouvement en estimant le déplacement global du système à partir des mesures des déplacements angulaires des roues motrices délivrées par les codeurs de roue. Pour cette étude, l'orientation des roues motrices par rapport à la plateforme mobile suivant  $\vec{z}_0$  est supposée fixée, dans la configuration de la **figure 9**.

### 3 Exigence de sécurité lors d'une procédure de freinage d'urgence

#### Objectif

**Déterminer les valeurs de décélérations maximales en cas d'arrêt d'urgence garantissant la sécurité du patient et du personnel lors d'une manœuvre de translation.**

Une procédure de freinage d'urgence est prévue pour immobiliser le système au plus tôt lorsqu'un problème est rencontré au cours de son déplacement. Pour des raisons évidentes de sécurité, le système doit s'arrêter le plus rapidement possible sans toutefois que la décélération n'entraîne le basculement de l'engin ou encore du glissement au niveau des roues motrices.

#### 3.1 Modèle retenu pour l'étude et paramétrage associé

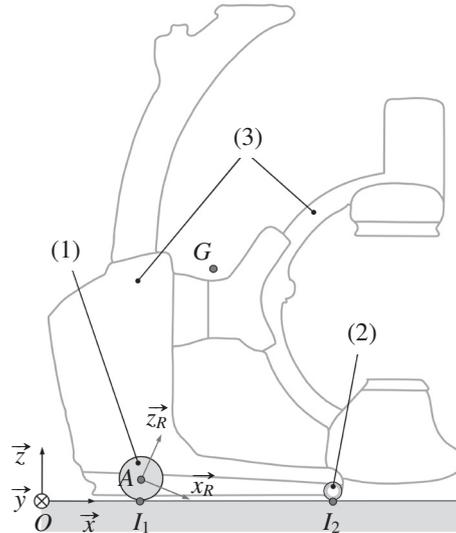
Le problème est supposé plan et se ramène à l'étude du système  $\Sigma$  (voir modèle sur la **figure 11**) composé des éléments :

- (1) : roue motrice ;
- (2) : roue folle ;
- (3) : cadre et arceau d'imagerie.

Le repère  $\mathcal{R}$  ayant pour origine le point  $O$  et muni de la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est attaché à la salle d'intervention (0). Le référentiel associé est supposé galiléen.

Le système est animé d'un mouvement de translation suivant  $+\vec{x}$  (sens 1) tel que  $\vec{V}_{\Sigma/\mathcal{R}}(G) = u(t) \vec{x}$ , avec  $u(t) > 0$ .

Lors de ce mouvement, les roues sont animées d'un mouvement de rotation. L'angle de rotation d'une roue par rapport à  $\mathcal{R}$  est défini par :  $\theta_R = (\vec{x}, \vec{x}_R) = (\vec{z}, \vec{z}_R)$ .



**Figure 11 – Modèle plan**

#### Hypothèses

- La roue motrice (1) roule sans glisser sur le sol (0) au point  $I_1$ .
- La résistance au roulement est négligée.

#### Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

- ensemble du système  $\Sigma$  : centre d'inertie  $G$  tel que  $\overrightarrow{I_1 G} = x_G \vec{x} + z_G \vec{z}$ , avec  $x_g = 450$  mm et  $z_g = 950$  mm, masse  $m_\Sigma = 840$  kg ;
- roue motrice (1) : rayon  $r = 115$  mm,  $J$  représente le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(A, \vec{y})$  ;
- empattement du système :  $I_1 I_2 = \ell = 1$  m.

**Actions mécaniques.** Le système  $\Sigma$  est soumis aux actions mécaniques suivantes :

- action du sol sur la roue motrice (1) :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{0 \rightarrow 1} = -X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1}$  et sur la roue folle (2) :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{0 \rightarrow 2} = Z_{02} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_2}$ ,

- action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \Sigma} = -m_{\Sigma} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ ,
- action de freinage sur la roue motrice (1) :  $\{\mathcal{T}_{\text{frein} \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{M}_{\text{frein} \rightarrow 1}(A) = -C_f \vec{y} \end{array} \right\}_A$ .

### 3.2 Condition de non-basculement

Au cours du freinage, le système subit une décélération  $\vec{\Gamma}_{\Sigma/\mathcal{R}}(G) = -\gamma \vec{x} = r \ddot{\theta} \vec{x}$ , avec  $\ddot{\theta} < 0$ .

Afin de s'assurer du non-basculement du système, il est nécessaire de déterminer la valeur de décélération limite  $\gamma_{NB}$  pour laquelle apparaît un décollement de la roue motrice.

- Q25.** Par application du théorème de la résultante dynamique à l'ensemble  $\Sigma$  suivant l'axe du mouvement, déterminer l'expression de la composante tangentielle  $X_{01}$  appliquée à la roue motrice (1) en fonction de la décélération  $\gamma$ .
- Q26.** Par application du théorème du moment dynamique à la roue motrice (1) suivant l'axe  $(A, \vec{y})$  et en utilisant la relation établie à la question précédente, déterminer l'expression du couple de freinage  $C_f$  en fonction de la décélération  $\gamma$ .

Dans la suite, le moment d'inertie  $J$  est négligé devant le terme  $m_{\Sigma} r^2$  associé à la masse de l'ensemble.

- Q27.** Simplifier alors l'expression établie à la question précédente.
- Q28.** Déterminer l'expression du moment dynamique de l'ensemble  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}$  au point  $I_2$ .
- Q29.** Par application du théorème du moment dynamique en  $I_2$ , déterminer la relation liant l'accélération  $\gamma$  et la composante normale  $Z_{01}$ . En déduire l'expression de la décélération limite  $\gamma_{NB,1}$  pour laquelle  $Z_{01} = 0$ . Réaliser l'application numérique.

### 3.3 Condition de non-glissement

L'exigence de sécurité conduit également à prévenir le glissement au niveau des roues motrices. Il est pour cela nécessaire de déterminer la valeur de la décélération limite  $\gamma_{NG}$  correspondant à une perte d'adhérence. Le facteur d'adhérence au niveau du contact roue motrice/sol (assimilé ici au facteur de frottement) est noté  $\mu$ .

- Q30.** En se plaçant à la limite du glissement, déterminer à partir des expressions établies aux questions **Q25** et **Q29** (avant la simplification  $Z_{01} = 0$ ), l'expression de la décélération limite  $\gamma_{NG,1}$ . Réaliser l'application numérique pour un facteur d'adhérence  $\mu = 0,5$ .

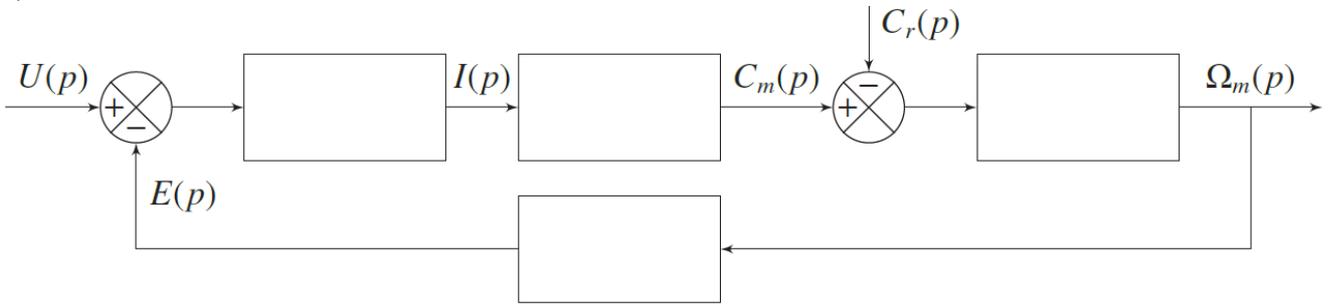
### 3.4 Synthèse

Une étude similaire à celle qui vient d'être menée conduit dans le cas d'une translation suivant  $-\vec{x}$  (sens 2) aux valeurs limites :  $\gamma_{NB,2} = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\gamma_{NG,2} = 5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

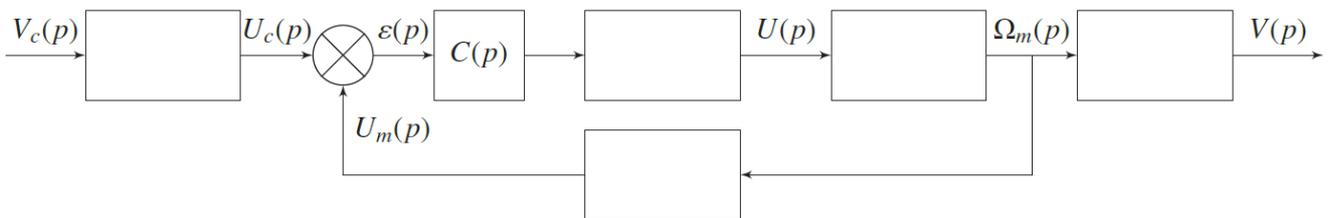
- Q31.** En réalisant la synthèse de l'ensemble de ces résultats, conclure sur la valeur de décélération limite à retenir pour satisfaire l'exigence de sécurité lors d'un mouvement de translation du système.

MP, DS de SI, janvier 2022, document réponses

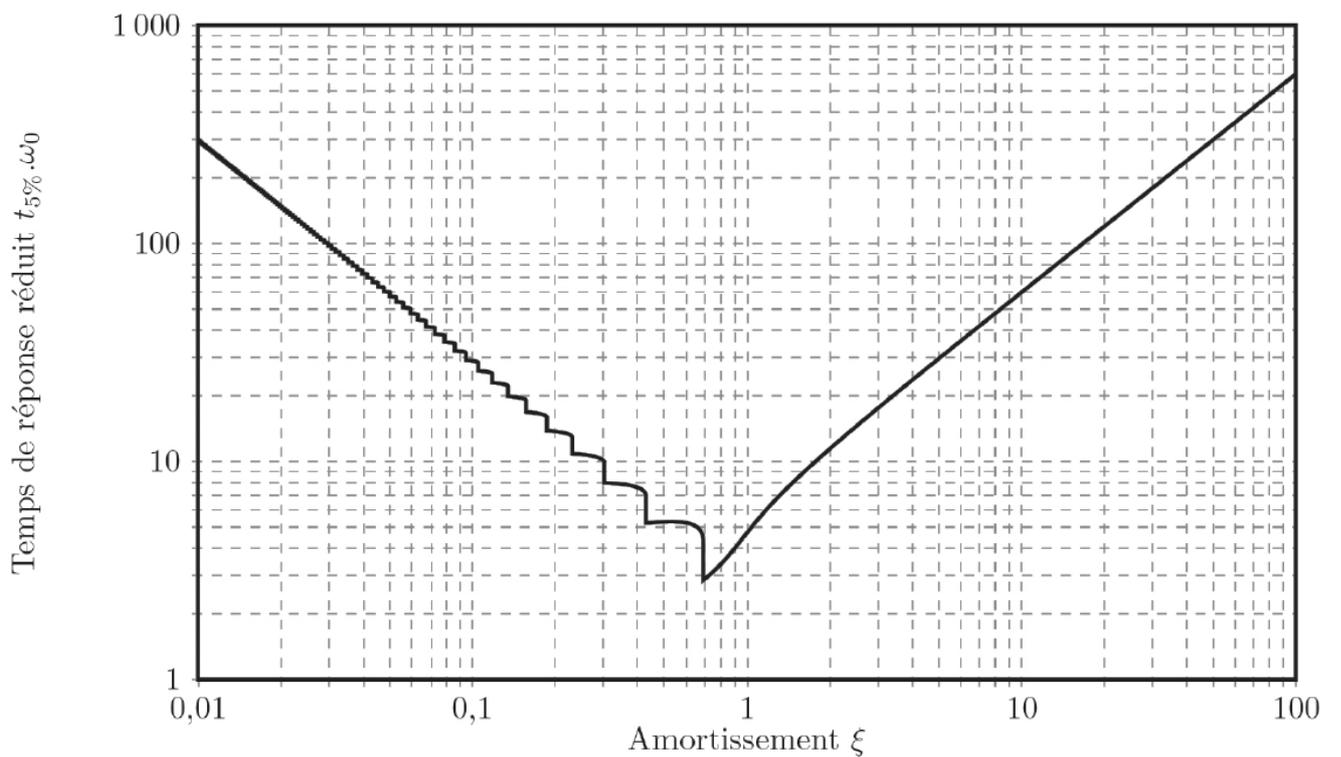
Question 4



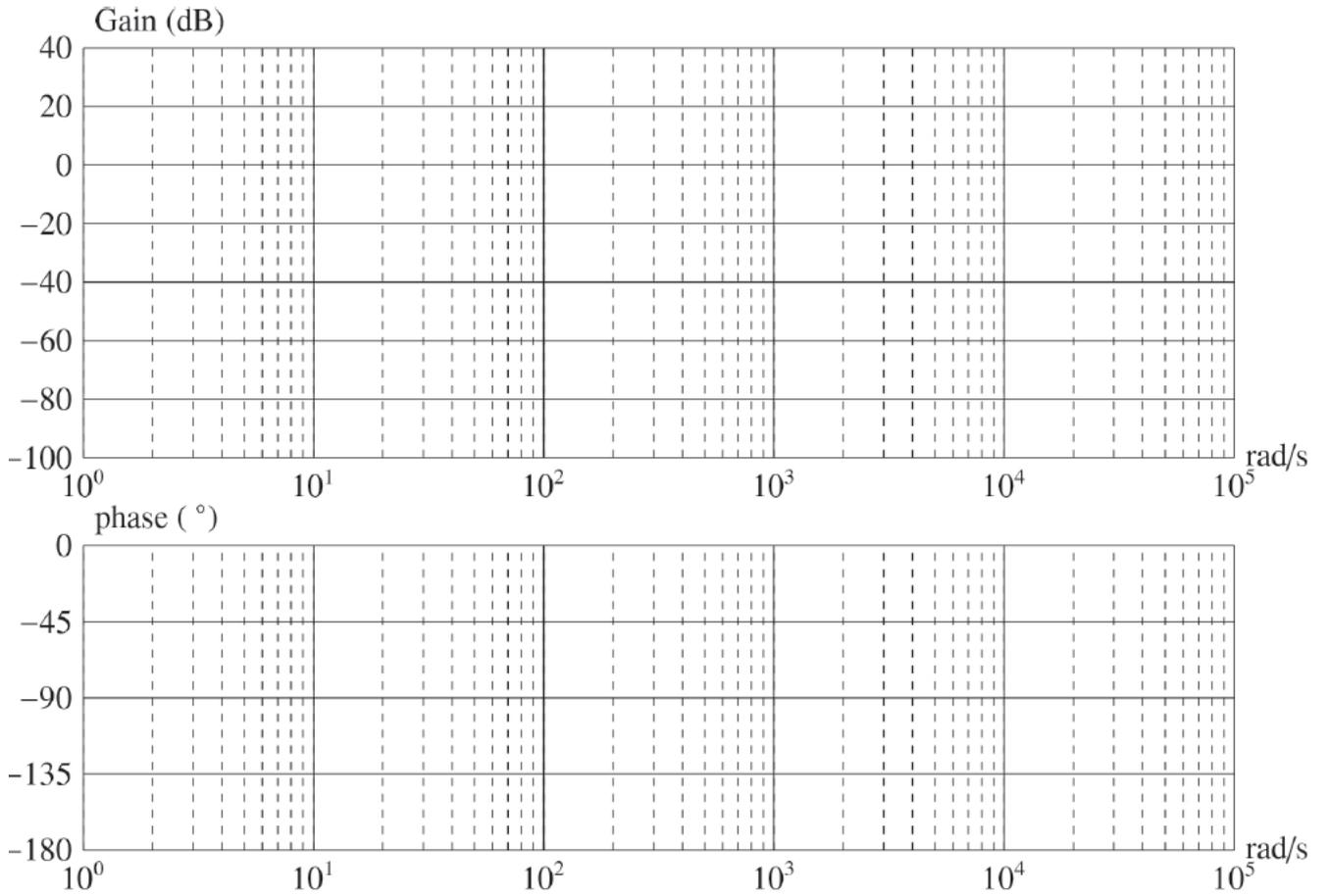
Question 8



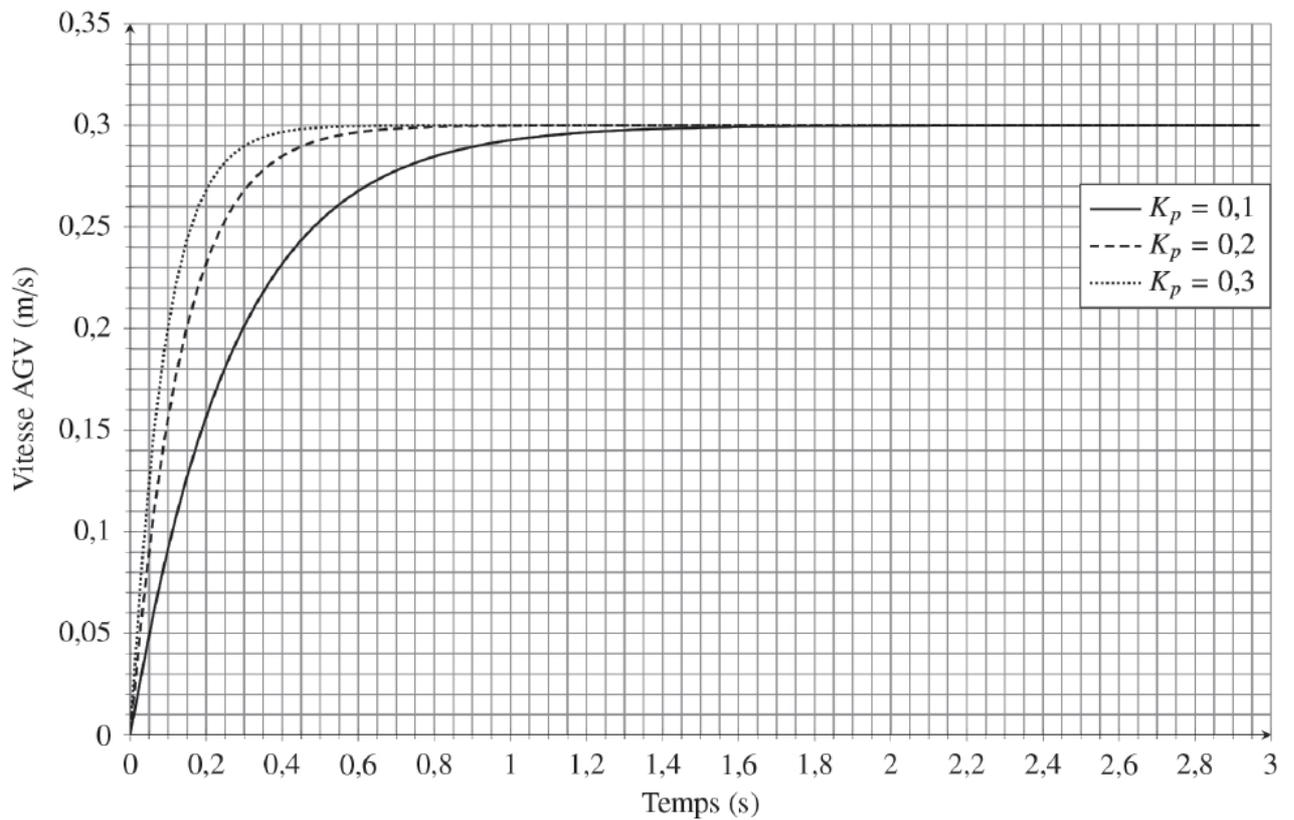
Question 11



Question 15



Question 16



Question 17

