

# MP

## DS de SI

### Jeudi 20 octobre 2022

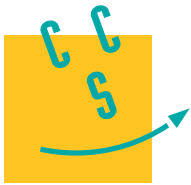
Corrigé prochainement sur le site :  
<http://perso.numericable.fr/starnaud/>

Ce DS comporte 7 pages et 20 questions.

Remarque :

- ✓ Après les questions 1 à 4, privilégier les parties dynamiques, questions 5 à 9 et questions 14 à 18.



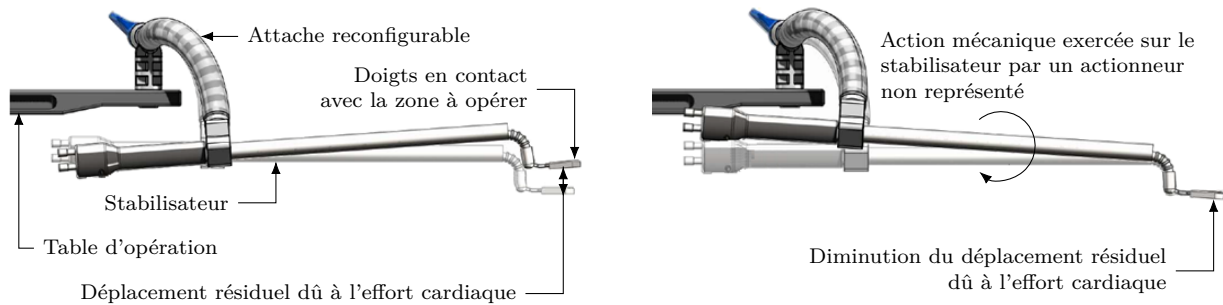


### Contexte

Les recours aux opérations chirurgicales pour traiter les pathologies cardiaques sont de plus en plus courants. La plupart de ces opérations est actuellement réalisée après avoir arrêté le cœur du patient et mis en place une circulation et une oxygénation extérieures du sang. Cette procédure et les suites opératoires sont lourdes.

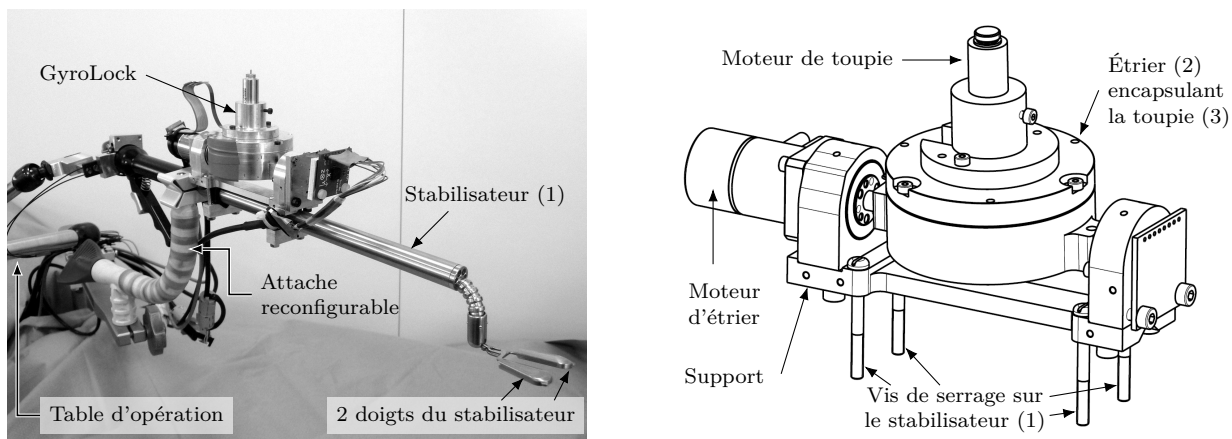
Il est possible d'opérer sans arrêter le cœur, mais ce type d'opération à cœur battant est plus délicat pour le chirurgien à cause des mouvements de la zone à opérer dus à la respiration et aux battements du cœur. Les battements cardiaques, contrairement aux mouvements respiratoires, ne sont pas cycliques et engendrent un déplacement rapide de la zone à opérer. Une intervention robotisée type maître-esclave avec prise en compte des battements cardiaques pour le déplacement du robot esclave est compliquée et dangereuse.

Lors d'une opération à cœur battant, un maintien mécanique de la zone à opérer est indispensable. Ce maintien en position est réalisé par un stabilisateur composé de deux doigts en contact avec la zone à opérer. Le déplacement de la zone à opérer est ainsi diminué. Le stabilisateur est lié à la table d'opération par une attache reconfigurable. La stabilisation (figure 1) peut être active ou passive. Dans le cas d'une stabilisation active, un actionneur génère une action mécanique de compensation dans le but de diminuer le mouvement de la zone à opérer qui n'a pas été filtré par le stabilisateur passif. Ce mouvement constitue un déplacement résiduel.



**Figure 1** Stabilisations passive (à gauche) et active (à droite)

Une équipe de chercheurs de l'Université de Strasbourg a mis au point un dispositif utilisant l'effet gyroscopique (figure 2).



**Figure 2** Photo du GyroLock installé sur un stabilisateur (à gauche) et son modèle volumique (à droite)

Ce système, nommé GyroLock, présente deux avantages par rapport aux autres stabilisateurs actifs existants :

- il peut être mis en place sur la plupart des stabilisateurs passifs afin de limiter l'investissement financier des structures hospitalières voulant s'équiper de stabilisateurs actifs ;
- il ne nécessite pas de liaison avec la table d'opération donc le stabilisateur peut être placé dans n'importe quelle position. En effet, contrairement aux autres stabilisateurs actifs existants, le GyroLock ne comporte pas d'actionneur dont le stator est lié à la table d'opération.

Le GyroLock est muni de deux actionneurs. Le moteur de toupie met en rotation la toupie (3) par rapport à l'étrier (2) autour d'un axe initialement vertical. Un second moteur électrique, appelé moteur d'étrier, entraîne

en rotation l'étrier (2) par rapport au support lié au stabilisateur (1) autour d'un axe colinéaire à la direction du stabilisateur (1). Cette seconde rotation génère un effet dynamique appelé effet gyroscopique. Cet effet peut être considéré comme une action mécanique permettant d'atténuer le déplacement résiduel de la zone à opérer en contact avec les doigts du stabilisateur (1).

### Exigences fonctionnelles

Le diagramme des exigences partiel de la stabilisation cardiaque est donné figure 3.

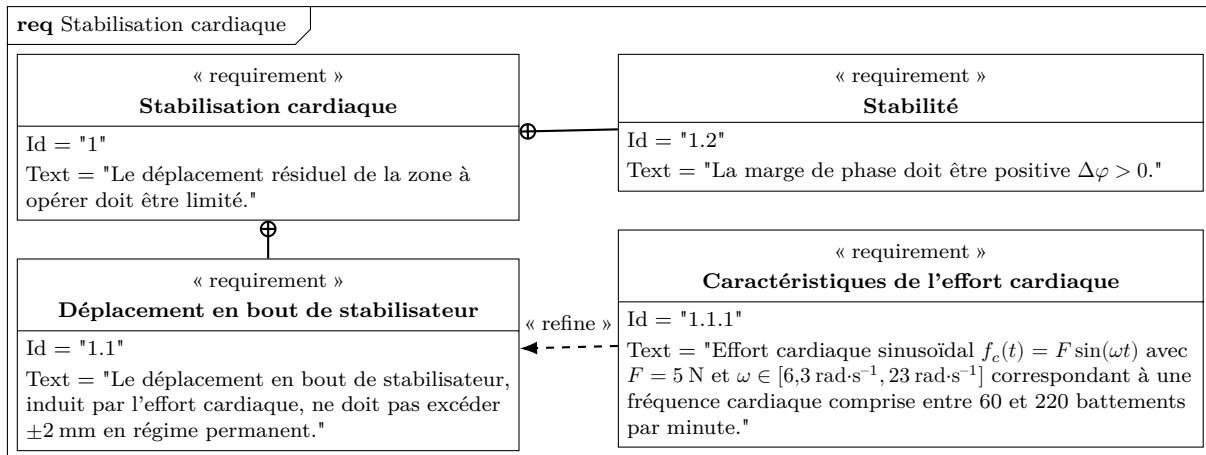


Figure 3 Diagramme des exigences partiel

L'objectif de ce sujet est de montrer que l'utilisation d'un actionneur à effet gyroscopique permet d'améliorer le maintien de la zone à opérer. Les étapes nécessaires à la validation de cet objectif sont les suivantes :

- dans un premier temps, l'analyse de résultats expérimentaux permettra de modéliser le mécanisme ;
- après avoir analysé l'effet gyroscopique et réglé le correcteur empêchant la dérive de l'étrier, une étude dynamique du stabilisateur permettra de déterminer un modèle de comportement du stabilisateur ;
- enfin, la partie III traitera du choix d'une loi de commande permettant de respecter les exigences figure 3.

## I Résultats expérimentaux et modélisation du mécanisme

### Objectif

Exploiter les résultats d'une campagne expérimentale afin de modéliser la liaison entre la table d'opération et le stabilisateur, puis exprimer le déplacement en bout de stabilisateur.

#### I.A – Mesure du déplacement en bout de stabilisateur

Un stabilisateur passif (sans système de stabilisation active) a été testé sur un sujet porcin de 40 kg sous assistance respiratoire et anesthésie générale. Les volume et fréquence respiratoires sont respectivement de 300 mL et 15,6 respirations par minute. Une mesure du déplacement et de l'effort cardiaque au bout du stabilisateur passif a été effectuée.

Le système cardiovasculaire porcin étant similaire à celui d'un être humain, il est possible, grâce à une méthode non détaillée dans cette étude, d'estimer les valeurs équivalentes pour un homme de 90 kg. La figure 4 donne l'évolution temporelle, pour un patient humain, du déplacement du point  $P$  situé au bout du stabilisateur (figure 5).

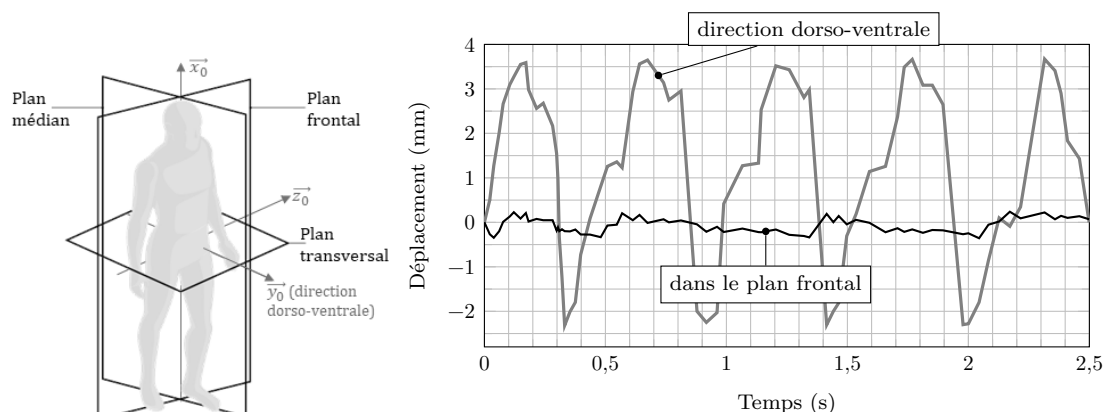


Figure 4 Plans anatomiques, déplacements résiduels dans le plan frontal et dans la direction dorso-ventrale

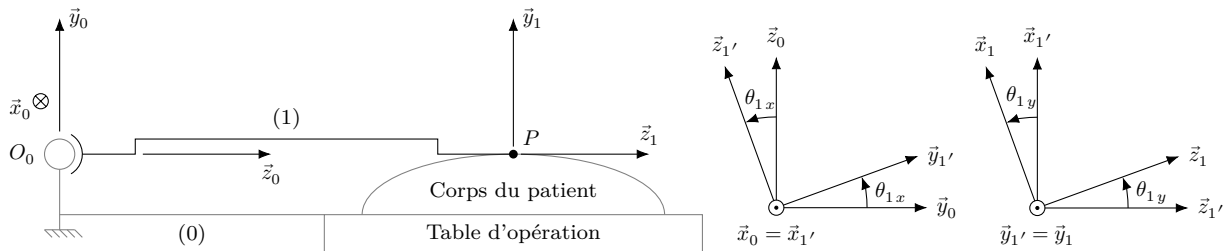
**Q 1.** Déterminer, à partir de la figure 4, les valeurs minimales et maximales de déplacement du point  $P$  dans la direction dorso-ventrale, notées  $u_d^{\max}$  et  $u_d^{\min}$ , et dans le plan frontal, notées  $u_f^{\max}$  et  $u_f^{\min}$ . Déterminer laquelle des deux stabilisations (passive ou active) est nécessaire pour respecter le diagramme des exigences figure 3.

La liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) sera modélisée de trois façons différentes selon la finalité :

- par une liaison sphérique (partie I.B) afin de déterminer quelles rotations doivent être prises en compte pour représenter le mouvement du stabilisateur par rapport à la table d'opération ;
- par un encastrement (partie II.A) afin d'étudier l'effet gyroscopique sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur ;
- par une liaison non parfaite (partie II.C) modélisant la flexibilité de l'attache reconfigurable.

### I.B – Formulation du modèle de la liaison entre la table d'opération et le stabilisateur

La modélisation retenue pour estimer le déplacement du point  $P$  situé au bout du stabilisateur (1) est donnée figure 5. La direction  $\vec{y}_0$  correspond à la direction dorso-ventrale, le plan  $(O_0, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$  est le plan frontal et l'axe « pied-tête » du patient est représenté par le vecteur  $\vec{x}_0$ . Le point  $O_0$  est un point de référence choisi, considéré comme fixe par rapport à la table d'opération (0).



**Figure 5** Modélisation du stabilisateur (1) en position de référence ( $\theta_{1x} = \theta_{1y} = 0$ ) et figures de changement de base

Le déplacement du point  $P$  situé au bout du stabilisateur (1) correspond à une trop grande flexibilité de l'attache reconfigurable (figures 1 et 2) utilisée pour lier le stabilisateur à la table d'opération (0). La liaison entre les solides (0) et (1) est modélisée par une liaison sphérique de centre  $O_0$ .

Deux rotations successives permettent de positionner la base  $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  liée au stabilisateur par rapport à la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  liée à la table d'opération :

- une rotation autour de  $\vec{x}_0$  d'angle  $\theta_{1x}$  permet de définir une base intermédiaire  $\mathcal{B}'_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1', \vec{z}_1')$  ;
- une rotation autour de  $\vec{y}_1'$  d'angle  $\theta_{1y}$  permet d'orienter la base  $\mathcal{B}_1$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'_1$ .

Les figures de changement de base sont données figure 5. La position du point  $P$  par rapport à la table d'opération (0) est donnée par  $\overrightarrow{O_0P} = L\vec{z}_1$  avec  $L = 0,3$  m. Le point  $P_0$  tel que  $\overrightarrow{O_0P_0} = L\vec{z}_0$  correspond à la position de référence du point  $P$  pour laquelle  $\theta_{1x} = \theta_{1y} = 0$ .

**Q 2.** Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{P_0P}$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ . En déduire l'expression de  $u_d = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{y}_0$  correspondant au déplacement en bout de stabilisateur dans la direction dorso-ventrale et  $u_f = \|\overrightarrow{P_0P} - u_d\vec{y}_0\|$  traduisant le déplacement en bout de stabilisateur dans le plan frontal.

**Q 3.** Déterminer les expressions linéarisées à l'ordre 1 de  $u_d$  et  $u_f$  ( $\theta_{1x}$  et  $\theta_{1y}$  sont proches de 0). En utilisant le résultat de la question 1, donner la valeur numérique (en radian) des débattements angulaires  $\Delta\theta_{1x} = \max(\theta_{1x}) - \min(\theta_{1x})$  et  $\Delta\theta_{1y}$  du stabilisateur. En déduire qu'une rotation peut être négligée (en précisant laquelle). En supposant que la rotation d'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  est également négligeable, proposer une « nouvelle » liaison (en précisant ses caractéristiques géométriques) modélisant le mouvement du stabilisateur (1) par rapport à la table d'opération (0).

**Q 4.** Préciser alors la direction du moment de compensation que devra générer le système GyroLock afin de réduire le déplacement du point  $P$ .

## II Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

### Objectif

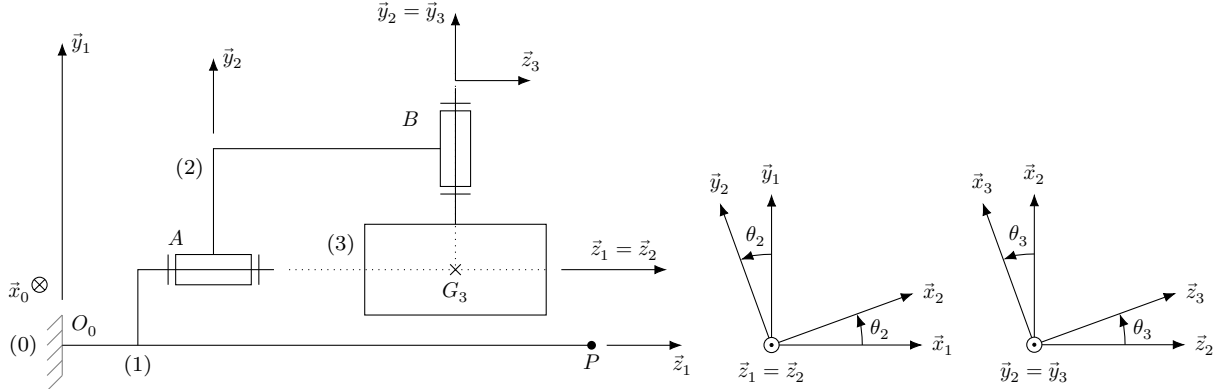
Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaîne d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

### II.A – Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Pour déterminer les actions mécaniques créées par le système GyroLock sur le stabilisateur (1), un modèle simplifié du mécanisme, donné figure 6, est utilisé.

Ce modèle simplifié, dans lequel la liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) est modélisée par un encastrement, permet :

- d'étudier l'effet gyroscopique  $c_x(t)$  créé par le système GyroLock permettant de compenser l'effet de l'effort cardiaque, sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur (1) ;
- de déterminer les conditions d'utilisation du système GyroLock afin de minimiser les autres actions mécaniques créées et considérées comme indésirables.



**Figure 6** Schéma cinématique simplifié du mécanisme (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ ) et figures de changement de base

Le système GyroLock, dont la modélisation est donnée figure 6, est composé de trois solides :

- le support, relié au stabilisateur (1) de repère associé  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en liaison encastrement au point  $O_0$  avec la table d'opération (0) ;
- l'étrier (2) de repère associé  $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1 = \vec{z}_2)$  tel que  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$  ;
- la toupie (3) de repère associé  $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_2 = \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ .

Les figures de changement de base sont données figure 6. Toutes les liaisons sont supposées parfaites et les caractéristiques inertielles des solides sont les suivantes

- étrier (2) : masse et inertie négligeables ;
- toupie (3) : masse  $m_3$ , centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$ . L'axe  $(G_3, \vec{y}_3 = \vec{y}_2)$  étant un axe de symétrie de révolution de la toupie (3), sa matrice d'inertie au point  $G_3$  s'exprime dans la base  $\mathcal{B}_2$  sous

$$\text{la forme } \mathcal{J}(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Pour la modélisation des actions mécaniques extérieures, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques ;
- l'action mécanique transmise par la liaison encastrement entre les solides (0) et (1) est modélisée au point

$$G_3 \text{ par } \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01}\vec{x}_1 + Y_{01}\vec{y}_1 + Z_{01}\vec{z}_1 \\ L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{G_3}.$$

Le référentiel  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table d'opération (0) est galiléen.

**Q 5.** Exprimer, dans la base  $\mathcal{B}_2$ , le moment cinétique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\vec{\sigma}(G_3, 3/0)$ .

**Q 6.** En déduire, dans la base  $\mathcal{B}_2$ , le moment dynamique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\vec{\delta}(G_3, 3/0)$ .

**Q 7.** Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  en fonction de  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  (et leurs dérivées temporelles),  $A_3$  et  $B_3$ .

Lorsque la toupie (3) tourne avec une vitesse constante  $\omega_3$  par rapport à l'étrier (2), l'expression des moments  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  est la suivante :

$$\begin{cases} L_{01}(t) = -c_x(t) \cos \theta_2(t) \\ M_{01}(t) = -c_x(t) \sin \theta_2(t) \\ N_{01}(t) = A_3 \dot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

où  $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2(t) = K_3 \dot{\theta}_2(t)$  correspond à l'effet gyroscopique.

L'action du cœur sur le stabilisateur est modélisée par un glisseur de résultante  $\vec{R}_{c \rightarrow 1} = f_c \vec{y}_1$  au point  $P$  tel que  $\overrightarrow{O_0P} = L\vec{z}_1$ .

Les moments  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  doivent rester faibles afin de limiter les déformations de l'attache reconfigurable liant le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

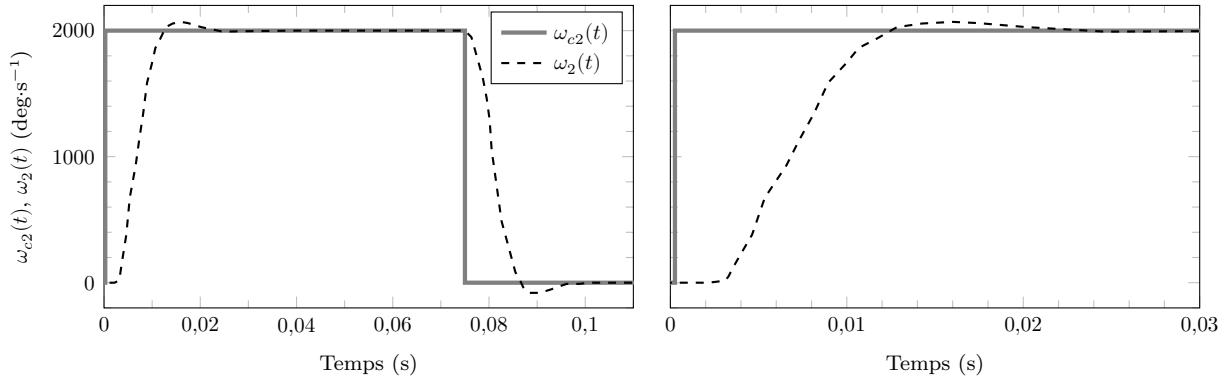
**Q 8.** En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer  $\dot{\theta}_2$  en fonction de  $K_3$ ,  $\theta_2$ ,  $f_c$  et  $L - L_{G_3}$  permettant de garantir  $L_{01} = 0$  et de compenser l'effet de l'effort cardiaque  $f_c$ .

**Q 9.** Donner une condition sur l'angle  $\theta_2$  et sur l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}_2$  afin que les moments  $M_{01}$  et  $N_{01}$  soient faibles.

L'étrier (2) doit être piloté en vitesse de rotation pour que l'effet gyroscopique  $c_x(t) = K_3\dot{\theta}_2(t)$  compense l'effet de l'effort cardiaque. La campagne expérimentale présentée en partie I a permis de déterminer que la fréquence fondamentale de l'effort cardiaque  $f_c(t)$  est de 1,5 Hz.

La réponse de l'étrier (2) sera considérée comme suffisamment réactive si le temps de réponse à 5% de la vitesse  $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$  pour une consigne  $\dot{\theta}_{c2}(t) = \omega_{c2}(t)$  en échelon est d'un ordre inférieur à la demi-période du signal perturbateur  $f_c(t)$ .

La réponse expérimentale à un échelon de vitesse  $\omega_{c2}(t)$  d'amplitude  $2000 \text{ deg}\cdot\text{s}^{-1}$  est représentée figure 7.



**Figure 7** Réponse expérimentale de l'étrier et consigne associée (à droite, zoom sur le régime transitoire)

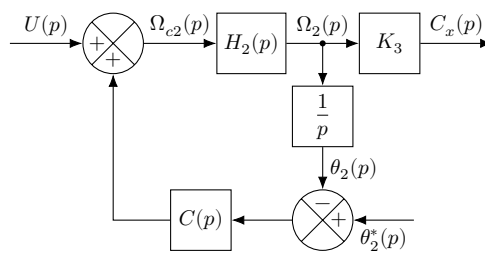
Les transformées de Laplace de  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_{c2}(t)$ ,  $\theta_2(t)$  et  $c_x(t)$  sont notées  $\Omega_2(p)$ ,  $\Omega_{c2}(p)$ ,  $\theta_2(p)$  et  $C_x(p)$ .

**Q 10.** Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2)  $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)}$  peut alors être approchée par un gain statique  $K_2$  de valeur à préciser.

Il faut s'assurer que la position  $\theta_2$  de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence  $\theta_2^* = 0$ . Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite  $M_{01}$  responsable d'un déplacement du point  $P$  selon  $\vec{x}_1$ .

### II.B – Réglage du correcteur de la chaîne d'asservissement de l'étrier

La figure 8 montre la boucle d'asservissement sur la position  $\theta_2(t)$ .  $C(p)$  est la fonction de transfert d'un correcteur appelé correcteur d'étrier. La dérive de l'étrier sera évitée si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = 0$  lorsque la commande de l'étrier  $U(p)$  est un échelon.



**Figure 8** Asservissement de l'étrier

Les deux cas suivants sont envisagés

— avec une correction proportionnelle :  $C(p) = K_{10}$  ;

— avec une correction proportionnelle-intégrale :  $C(p) = K_{10} + \frac{K_{11}}{p}$ .

**Q 11.** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert  $H_{\theta_2}(p) = \frac{\theta_2(p)}{U(p)}$  en fonction de  $C(p)$  et  $K_2$ . Après avoir déterminé  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t)$  lorsque  $U(p)$  est un échelon unitaire dans les deux cas cités précédemment, justifier la pertinence d'une correction proportionnelle-intégrale au regard de la problématique de la dérive de l'étrier.

Dans la suite de l'étude, le correcteur adopté est  $C(p) = K_{10} + \frac{K_{11}}{p}$ . L'effet gyroscopique  $c_x(t)$  est lié à la vitesse de rotation  $\omega_2(t)$  et la consigne  $\theta_2^*(t)$  est maintenue à 0 pour éviter la dérive de l'étrier. La fonction de transfert utilisée pour modéliser le comportement de l'étrier (2) est notée  $H_m(p) = \frac{\Omega_2(p)}{U(p)}$ .

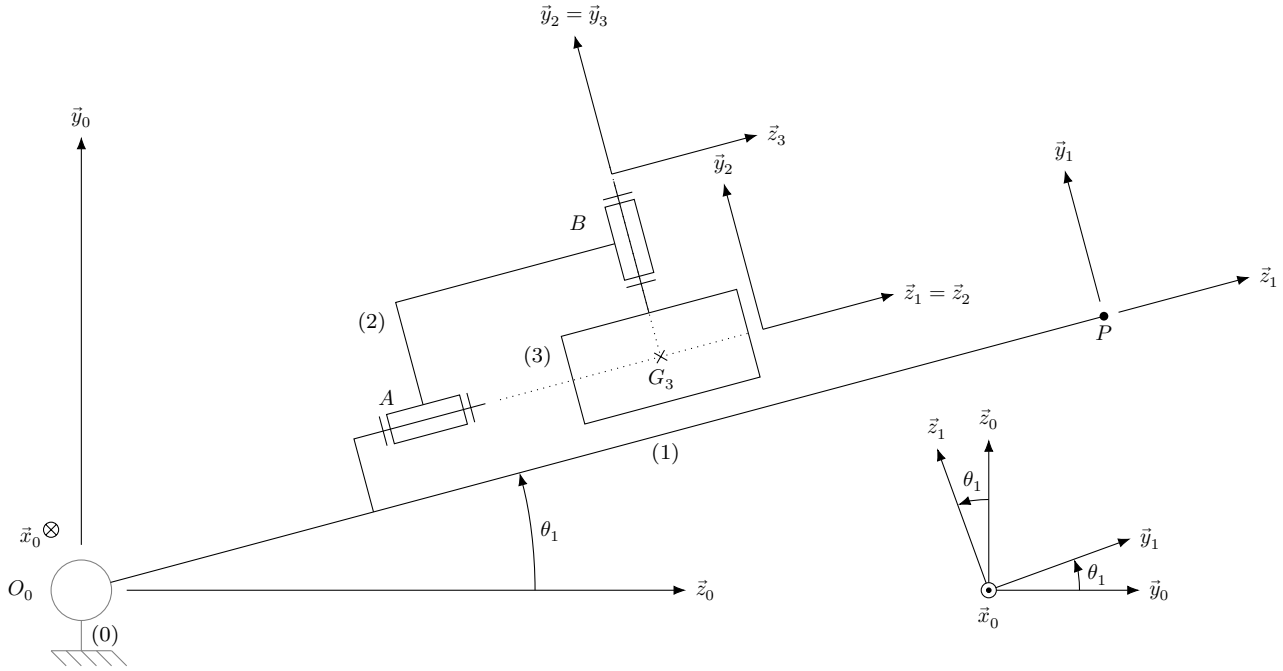
**Q 12.** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert  $H_m(p)$  en fonction de  $K_2$ ,  $K_{10}$  et  $K_{11}$ .

Le calcul des gains  $K_{10}$  et  $K_{11}$  doit répondre aux deux exigences suivantes : permettre d'éviter la dérive de l'étrier (2) et ne pas ralentir le système, d'où le choix d'une fonction de transfert  $H_m(p)$  caractérisée par un amortissement  $\xi_m = 0,37$  et une pulsation propre  $\omega_m = 2,45 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**Q 13.** Déterminer les valeurs numériques de  $K_{10}$  et  $K_{11}$  au regard de ces exigences.

La rotation du stabilisateur (1) étudiée en partie I n'est pas prise en compte figure 6. Il est indispensable de considérer la flexibilité de l'attache reconfigurable utilisée pour lier le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

### II.C – Comportement dynamique du stabilisateur



**Figure 9** Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ )

Dans la modélisation retenue (figure 9), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . Le point  $P$  tel que  $O_0P = L$  représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

#### Paramétrage, notations et hypothèses

— La liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  entre les solides (0) et (1) possède une raideur  $k$  et un coefficient de frottement visqueux  $f$ , d'où  $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$  ;

— les autres liaisons sont supposées parfaites ;

— l'action du cœur sur le stabilisateur (1) est modélisée par  $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} f_c \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_P$  ;

— seul le déplacement vertical du point  $P$  est pris en compte. On note  $y(t) = -\vec{O}_0\vec{P} \cdot \vec{y}_0$  ;

— le stabilisateur (1) est de masse  $m_1$  et possède un centre d'inertie  $G_1$  tel que  $\vec{O}_0\vec{G}_1 = L_{G_1}\vec{z}_1$  et l'opérateur

$$\text{d'inertie est } \mathcal{J}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} ;$$

— la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables ;

— la toupie (3) est de masse  $m_3$  et possède un centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\vec{O}_0\vec{G}_3 = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$  ;

— les figures de changement de base sont données figures 6 et 9 ;

— les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques.



**Q 14.** Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en  $\theta_1(t)$ ). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

**Q 15.** Exprimer  $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$ , la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique au point  $O_0$  du solide (1) en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .

**Q 16.** Exprimer littéralement la vitesse  $\vec{V}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ , puis l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

**Q 17.** En conservant les conditions de fonctionnement issues de la partie II.A ( $\ddot{\theta}_2 \approx 0$ ,  $\theta_2 \approx 0$  et  $\dot{\theta}_3 = \omega_3$  constante), il est possible de montrer que  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$  avec  $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$  (résultat admis sans démonstration). En déduire  $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$ , en fonction de  $A_3$ ,  $c_x(t)$ ,  $m_3$ ,  $L_{G_3}$ ,  $H_{G_3}$  et  $\ddot{\theta}_1(t)$ .

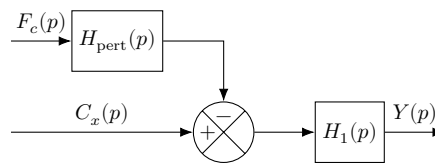
**Q 18.** Exprimer  $J_x$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $m_1$ ,  $m_3$ ,  $L_{G_1}$ ,  $L_{G_3}$  et  $H_{G_3}$  permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

En supposant que  $\theta_1$  reste proche de 0, la relation  $y(t) = L \theta_1(t)$  sera utilisée.

Les transformées de Laplace de  $y(t)$ ,  $c_x(t)$  et  $f_c(t)$  sont notées  $Y(p)$ ,  $C_x(p)$  et  $F_c(p)$ .

**Q 19.** En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_{\text{pert}}(p)$  et  $H_1(p)$  du schéma bloc figure 10 en fonction de  $L$ ,  $J_x$ ,  $f$  et  $k$ .



**Figure 10** Schéma bloc du stabilisateur (1)

On rappelle que  $L = 0,3$  m et les valeurs retenues pour  $J_x$ ,  $f$  et  $k$  sont :

- $J_x = 1,14 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  ;
- $f = 64 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$  ;
- $k = 95 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ .

**Q 20.** Écrire  $H_1(p)$  sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique  $K_1$ , amortissement  $\xi_1$  et pulsation propre  $\omega_1$ . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

### III Réglage de la loi de commande du stabilisateur

#### Objectif

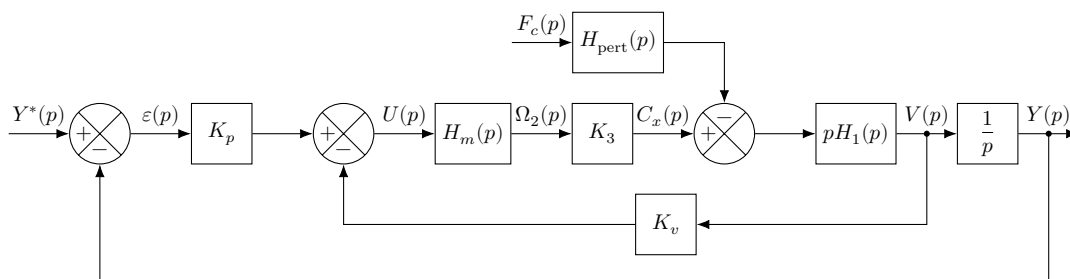
Régler une loi de commande permettant de respecter les exigences figure 3.

Le faible amortissement de la fonction de transfert  $H_1(p)$  et la rapidité du système imposent la mise en place de deux boucles d'asservissement :

- un asservissement en vitesse de la vitesse  $v(t) = \dot{y}(t)$  ;
- un asservissement en position de la position  $y(t)$ .

Le schéma bloc global du système est donné figure 11, où :

- $H_m(p)$  est la fonction de transfert de l'étrier asservi ;
- $Y^*(p)$  est une consigne virtuelle de valeur nulle ;
- $K_p$  et  $K_v$  sont deux gains à déterminer.



**Figure 11** Schéma bloc global du système GyroLock