

---

# LE SISMOMÈTRE SEIS

MP, Lycée Corneille

---

DM de SI pour le 9 novembre 2023

## 1 Présentation

Après des années de recherche et de développement puis un voyage de 485 millions de kilomètres, la sonde InSight (*Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport*) s'est posée sur Mars le 26 novembre 2018. Elle est le premier observatoire géophysique martien, dont l'objectif est d'étudier la structure interne de Mars et de comprendre la formation et l'évolution des planètes rocheuses du Système solaire. En mesurant la façon dont les ondes sismiques, provoquées par des séismes martiens ou des impacts de météorites, se propagent à l'intérieur de Mars, les géophysiciens vont pouvoir répondre avec précision à cet objectif.

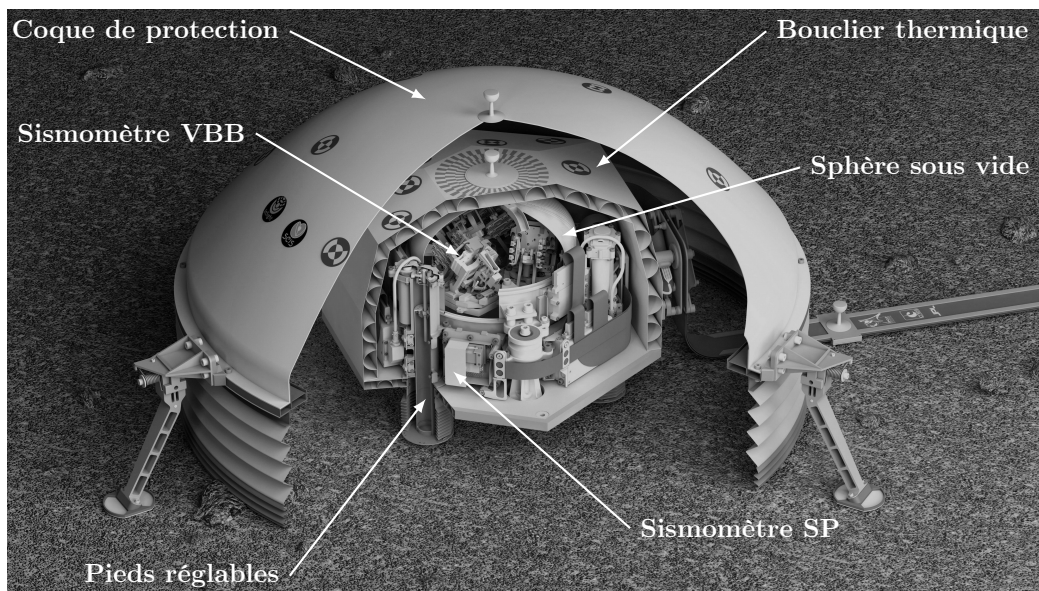


FIGURE 1 – Écorché de SEIS et ses différents niveaux de protection

Le sismomètre SEIS (*Seismic Experiment for Interior Structures*), déployé à la surface de Mars, est protégé des variations de la température et du vent à l'aide d'un bouclier thermique et d'une coque de protection. SEIS comporte deux sismomètres indépendants, le VBB (*Very Broad Band*) et le SP (*Short Periods*), montés sur une structure commune pouvant être réglée à l'horizontale grâce à des pieds de longueur variable.

- Le sismomètre VBB comporte trois systèmes identiques, composés chacun d'un pendule et d'un bâti, inclinés différemment par rapport au sol. Ils sont fixés dans une sphère en titane sous vide, et sensibles à une large bande de fréquence d'ondes sismiques, entre 0,01 Hz et 0,5 Hz.
- Le sismomètre SP est adapté aux ondes sismiques de plus hautes fréquences, entre 0,1 et 50 Hz.

Dans ce sujet, on s'intéresse uniquement au sismomètre VBB. Une vue détaillée d'un des systèmes du VBB est fournie en FIGURE 2 et le détail des différents éléments qui le constituent est fourni en Annexe 1.

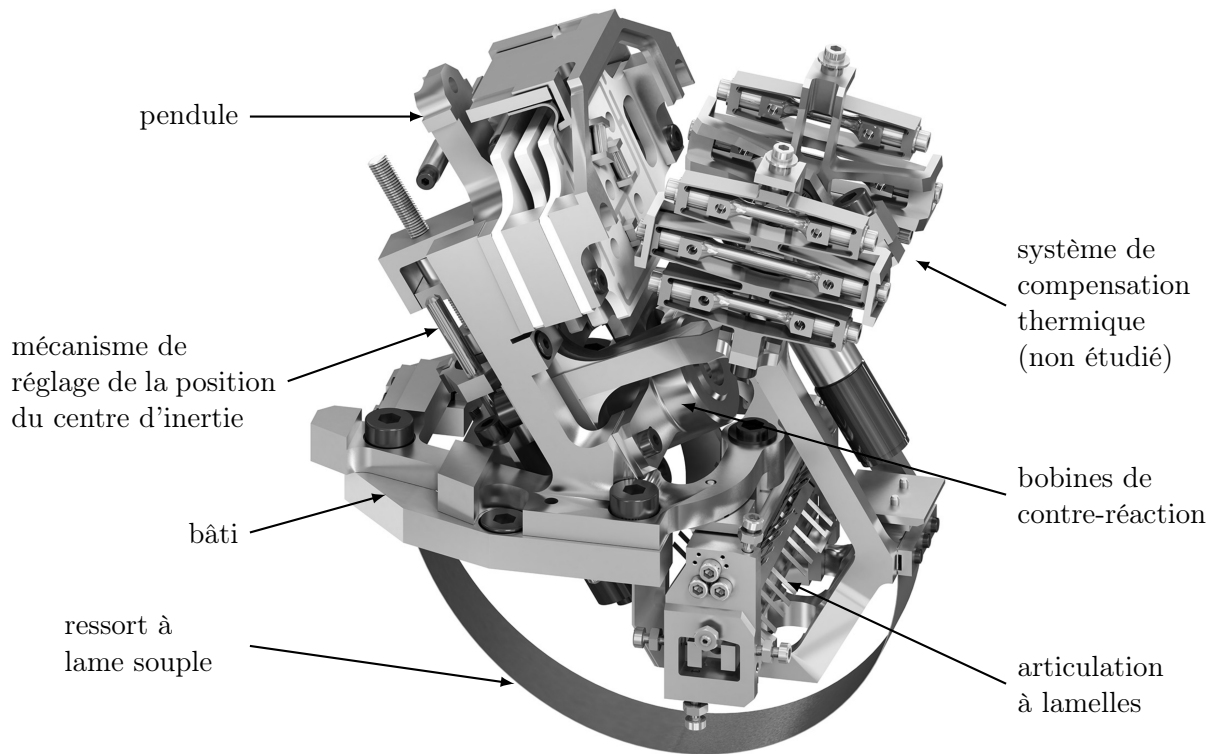


FIGURE 2 – Vue 3D d'un des trois systèmes du VBB

Comme pour les applications terrestres, chaque système du sismomètre VBB possède un pendule qui oscille par rapport à un bâti sous l'impulsion de secousses sismiques transmises par le sol à l'instrument. Une articulation à lamelles permet des mouvements de très faible amplitude avec un minimum de frottements visqueux entre le pendule et le bâti, et sans jeu. Elle constitue l'axe de rotation du pendule dans son mouvement par rapport au bâti.

Le sismomètre VBB s'appuie sur le principe du pendule inversé. L'instabilité inhérente au pendule inversé lui confère une plus grande sensibilité que celle d'un pendule classique. Bien qu'instable par nature, le pendule inversé du sismomètre VBB conserve son équilibre grâce à un ressort à lame souple, recourbé en demi-cercle, et qui applique en permanence une action mécanique de rappel.

## 2 Réglage de la position d'équilibre du pendule

L'ajustement de la position d'équilibre du pendule en l'absence de séisme est primordial car il permet au sismomètre de fonctionner dans la configuration pour laquelle il a été optimisé. Il peut se faire à distance, depuis la Terre, grâce au mécanisme de réglage du centre d'inertie du pendule (voir FIGURE 2 et l'Annexe 1). Cela permet de rattraper les défauts d'inclinaison de la surface sur laquelle le sismomètre est posé si les pieds réglables ne suffisent pas.

Id	Exigence	Critère	Niveau
1	Ajuster la position d'équilibre du pendule sur Mars		
1.1	Déplacer le centre d'inertie du pendule	Moment généré par le déplacement du centre d'inertie du pendule	$\pm 0,9 \text{ N}\cdot\text{mm}$ sur l'axe de rotation du pendule

TABLE 1 – Liste (non exhaustive) des exigences du mécanisme de translation du centre d'inertie du pendule

**Objectif :** définir la position d'équilibre du pendule et valider l'exigence 1.1 de réglage à distance de cette position.

Le schéma cinématique et le paramétrage du dispositif sont fournis en Annexe 2, ainsi que l'ensemble des notations et hypothèses utiles pour cette partie.

**Q1.** Par application du Principe Fondamental de la Statique au pendule (2) à l'équilibre sur Mars, lorsque  $\alpha(t) = \alpha_{\text{eq}}$ , exprimer le moment de précontrainte  $C_0$  en fonction des autres paramètres de l'étude. Préciser le bilan des actions mécaniques extérieures, le théorème appliqué et les éléments d'application du théorème (projection, point éventuel...).

Le mécanisme de réglage de la position du centre d'inertie du pendule est constitué d'une masselotte guidée en translation par rapport à (2) le long de l'axe  $(O_1, \vec{y}_2)$ . Le réglage doit permettre d'imposer  $\alpha_{\text{eq}} = \alpha_0$  en cas de défauts d'inclinaison du sol. La masselotte de masse  $m = 60 \text{ g}$  a une amplitude de translation  $c = 18 \text{ mm}$ , centrée sur la position idéale de  $G$  en l'absence de défauts d'inclinaison. Cette masse  $m$  est incluse dans la masse  $M$  de (2).

On donne  $g_M \approx 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  et  $\alpha_0 = 30^\circ$ .

**Q2.** Calculer le moment en  $\text{N}\cdot\text{mm}$  sur l'axe de rotation du pendule, généré par le déplacement de la masse  $m$ , en supposant  $\alpha_{\text{eq}} = \alpha_0$ . Conclure vis-à-vis de l'exigence 1.1.

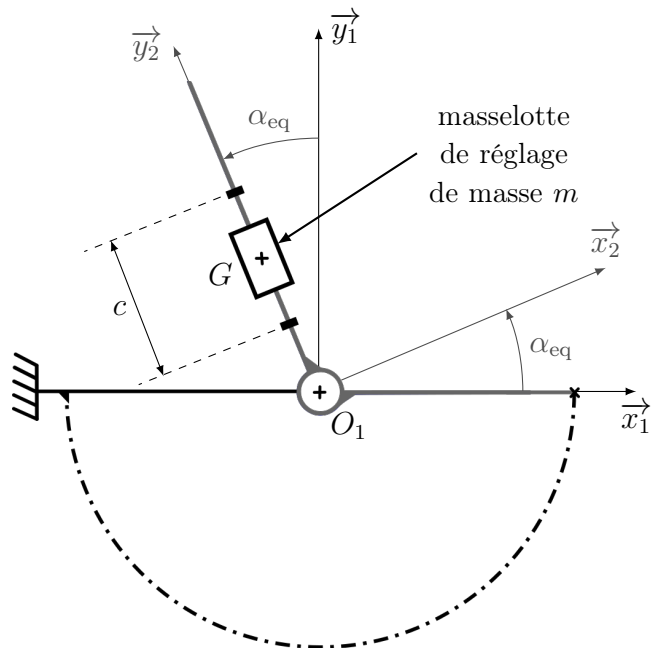


FIGURE 3 – Réglage de la position du centre d'inertie

### 3 Sensibilité intrinsèque d'un pendule à un séisme

Le schéma cinématique et le paramétrage du dispositif sont fournis en Annexe 3, ainsi que l'ensemble des notations et hypothèses utiles pour cette partie.

En cas de séisme, le sol (1) est en mouvement. Il entraîne dans son mouvement le bâti du système et ne peut plus être considéré comme un référentiel galiléen.

Le réglage à distance de la position du centre d'inertie permet d'imposer  $\alpha_{eq} = \alpha_0$ .

On admet qu'il y a un mouvement de translation de (1) par rapport au repère  $R_0$  dans les directions  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$ , comme imposé par les deux liaisons glissières en série entre (1) et (0) sur le schéma cinématique de l'Annexe 3. Aucun degré de liberté en rotation n'est admis :  $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$ .

Le système doit permettre d'amplifier les mouvements sur la plage de fréquences attendues pour les séismes martiens. On définit pour cela les exigences de la TABLE 2.

<b>2</b>	Être mécaniquement sensible aux séismes attendus sur Mars		
<b>2.1</b>	Être suffisamment sensible	Amplification mécanique	$> 2 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^2$
<b>2.2</b>	Être sensible aux fréquences des séismes attendus sur Mars	Amplification en fonction de la fréquence des mouvements du sol	$\geq 10 \text{ dB}$ dans la bande $[0,01; 0,5] \text{ Hz}$ soit $[0,06; 3] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

TABLE 2 – Liste (non exhaustive) des exigences de sensibilité mécanique d'un système

---

**Objectif :** mettre en évidence la grandeur physique à laquelle le pendule est sensible lors d'un séisme, ainsi que ses caractéristiques dynamiques, en vue du réglage de sa commande.

---

**Q3.** Déterminer, dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , l'expression du moment cinétique du pendule (2) en  $O_1$ ,  $\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0}$ . On l'exprimera en fonction des paramètres cinétiques de (2) et des paramètres géométriques et cinématiques du système.

**Q4.** Montrer que la projection sur  $\vec{z}_1$  du moment dynamique du pendule (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  en  $O_1$ , est de la forme suivante :

$$\vec{\delta}_{O_1,2/R_0} \cdot \vec{z}_1 = J\ddot{\alpha}(t) - dM\gamma_{x2}(t)$$

où l'on précisera l'expression de  $\gamma_{x2}(t)$ .

On déduit de cette équation que  $\vec{x}_2$  est la direction de sensibilité du pendule, c'est-à-dire que le pendule n'est sensible qu'aux accélérations du sol en projection sur  $\vec{x}_2$ .

**Q5.** Préciser, sans faire de calculs, le système isolé et l'équation issue du Principe Fondamental de la Dynamique qui permet d'obtenir l'équation du mouvement du pendule suivante :

$$J\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) + k(\alpha(t) - \alpha_0) = dM g_M \sin \alpha(t) + dM\gamma_{x2}(t) + C_0 \quad (\text{eq. 1})$$

Donner les éléments d'application (équation, projection, point éventuel...) du théorème utilisé. Justifier que l'équation obtenue n'est pas linéaire, indépendamment de l'expression de  $\gamma_{x2}(t)$ .

Afin de mettre en évidence les caractéristiques du pendule en réponse à une accélération du sol  $\gamma_{x2}(t)$ , ses oscillations ayant une amplitude très faible, l'équation du mouvement est linéarisée autour du point d'équilibre  $\alpha_{\text{eq}} = \alpha_0$  du pendule.

On pose  $\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha(t)$ , avec  $\Delta\alpha(t) \ll \alpha_0$ .

**Q6.** Montrer que l'équation du mouvement linéarisée s'écrit :

$$J \ddot{\Delta\alpha}(t) + \mu \dot{\Delta\alpha}(t) + k \Delta\alpha(t) = dM g_M \cos \alpha_0 \Delta\alpha(t) + dM \gamma_{x2}(t) \quad (\text{eq. 2})$$

On note  $\alpha(p)$  et  $\gamma_{x2}(p)$  respectivement les transformées de Laplace des variations angulaires  $\Delta\alpha(t)$  et de l'accélération du sol  $\gamma_{x2}(t)$ . Les conditions initiales sont supposées nulles.

**Q7.** Exprimer, sous forme canonique, la fonction de transfert du pendule  $\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x2}(p)}$  et donner la condition de stabilité du pendule sous la forme d'une inéquation. Conclure sur le rôle stabilisateur du ressort.

**Q8.** Donner, en fonction des constantes du problème, les expressions des constantes caractéristiques de cette fonction de transfert : gain d'amplification mécanique noté  $A$ , pulsation propre  $\omega_0$  et coefficient d'amortissement  $\xi$ .

**Q9.** Donner l'expression de  $\alpha_0$  permettant de maximiser le gain d'amplification mécanique  $A$ .

Le diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert  $\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x2}(p)}$  du pendule est fourni sur la FIGURE A du Cahier Réponses.

**Q10.** Conclure vis-à-vis de l'exigence 2.2. Les tracés nécessaires devront figurer sur la FIGURE A du Cahier Réponses.

## ~~4 Optimisation de la réponse d'un pendule à un séisme par un asservissement~~

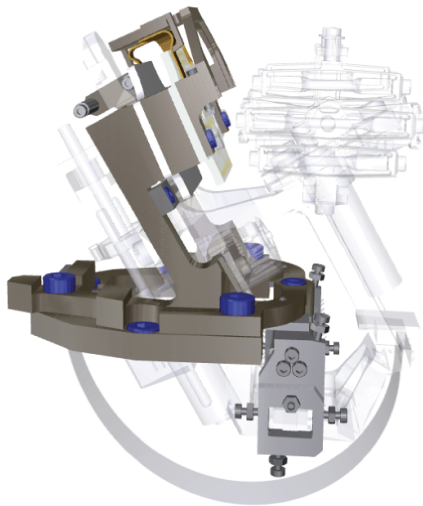
~~À chaque mouvement du sol, un capteur mesure la position angulaire du pendule (2) par rapport au bâti (1). Des bobines de contre réaction situées sur le pendule (voir FIGURE 2 et l'Annexe 1) génèrent un moment de rappel sur son axe de rotation par rapport au bâti, qui le ramène à sa position d'équilibre.~~

- ~~— La bobine HF (pour *Haute Fréquence*) pilote l'asservissement entre 0,05 Hz et 0,5 Hz. Son rôle principal est d'amortir les secousses trop brusques et d'éliminer la résonance du pendule.~~
- ~~— La bobine BF (pour *Basse Fréquence*) a été conçue pour intervenir sur les fréquences inférieures à 0,05 Hz. Elle permet de filtrer la variation journalière de température et les dérives saisonnières plus lentes.~~

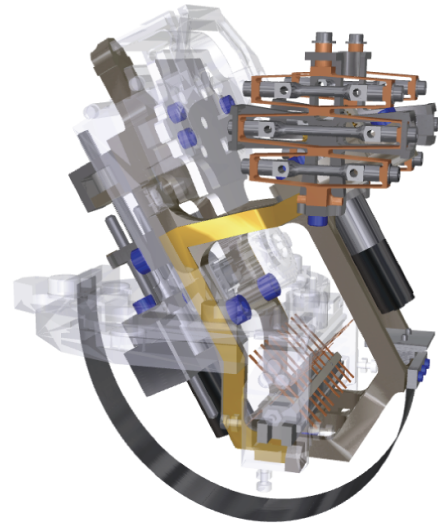
~~L'asservissement mis en place est donc une régulation devant permettre d'annuler en régime permanent les effets des secousses sismiques sur le pendule, tout en étant sensible aux signaux dans une large bande de fréquences d'ondes sismiques, entre 0,01 Hz et 0,5 Hz.~~

~~Les exigences auxquelles doit répondre cet asservissement sont fournies dans la TABLE 3.~~

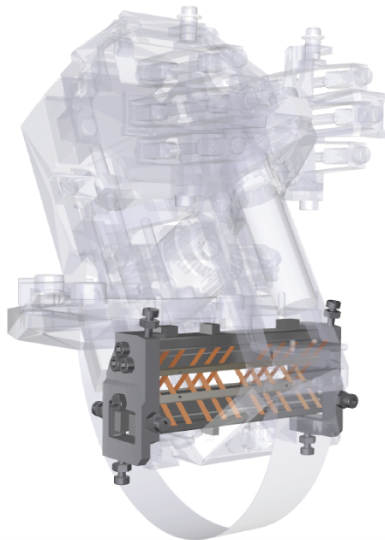
## Annexe 1 - Détail des éléments d'un des systèmes du VBB



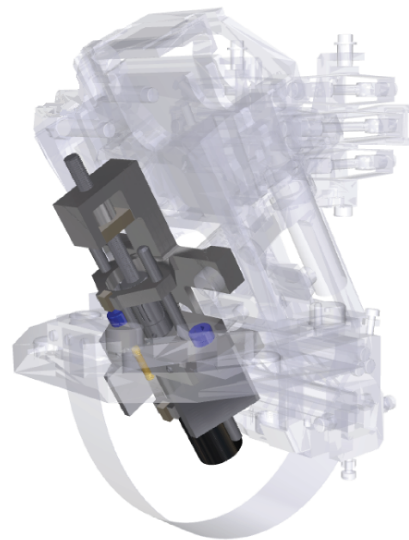
bâti (1)



pendule (2)

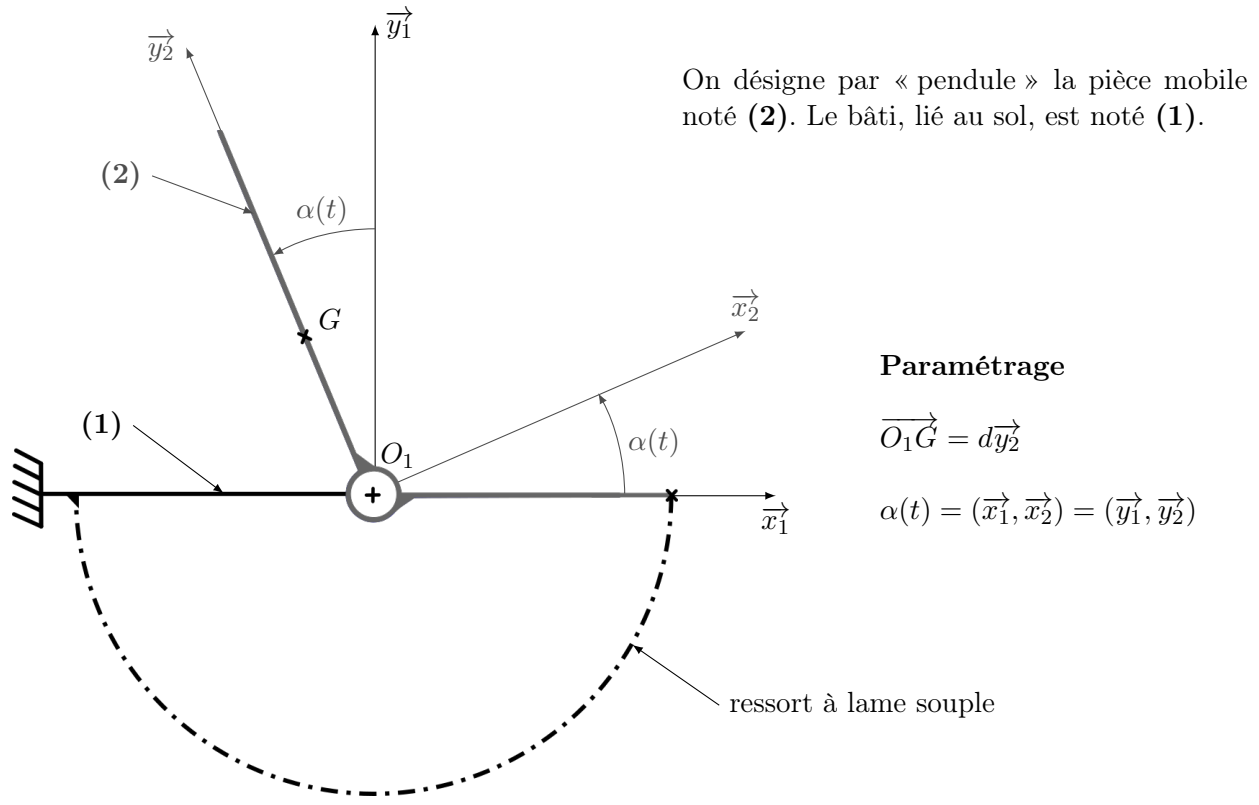


articulation à lamelles entre (1) et (2)



mécanisme de translation  
du centre d'inertie de (2)

## Annexe 2 - Modèle cinématique du système en l'absence de séisme



### Notations

$G$	centre d'inertie du pendule (2)
$M$	masse du pendule (2)
$C_0$	moment de précontrainte de l'ensemble {ressort + articulation} sur (2)
$k$	raideur de l'ensemble {ressort + articulation} sur l'axe $(O_1, \vec{z}_1)$
$\alpha_0$	position angulaire à vide du pendule
$\alpha_{eq}$	position angulaire du pendule à l'équilibre (sous l'effet des actions de la pesanteur et du ressort)
$g_M$	champ de pesanteur à la surface de Mars, de direction $-\vec{y}_1$

### Hypothèses

Le référentiel  $\mathcal{R}_1$ , auquel est associé le repère  $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au sol, est supposé galiléen en l'absence de séisme.

La liaison pivot réalisée par l'articulation à lames sur l'axe de rotation  $(O_1, \vec{z}_1)$  du pendule par rapport à (1) n'est pas parfaite. Les frottements visqueux sont pris en compte à travers un coefficient de frottement  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) :

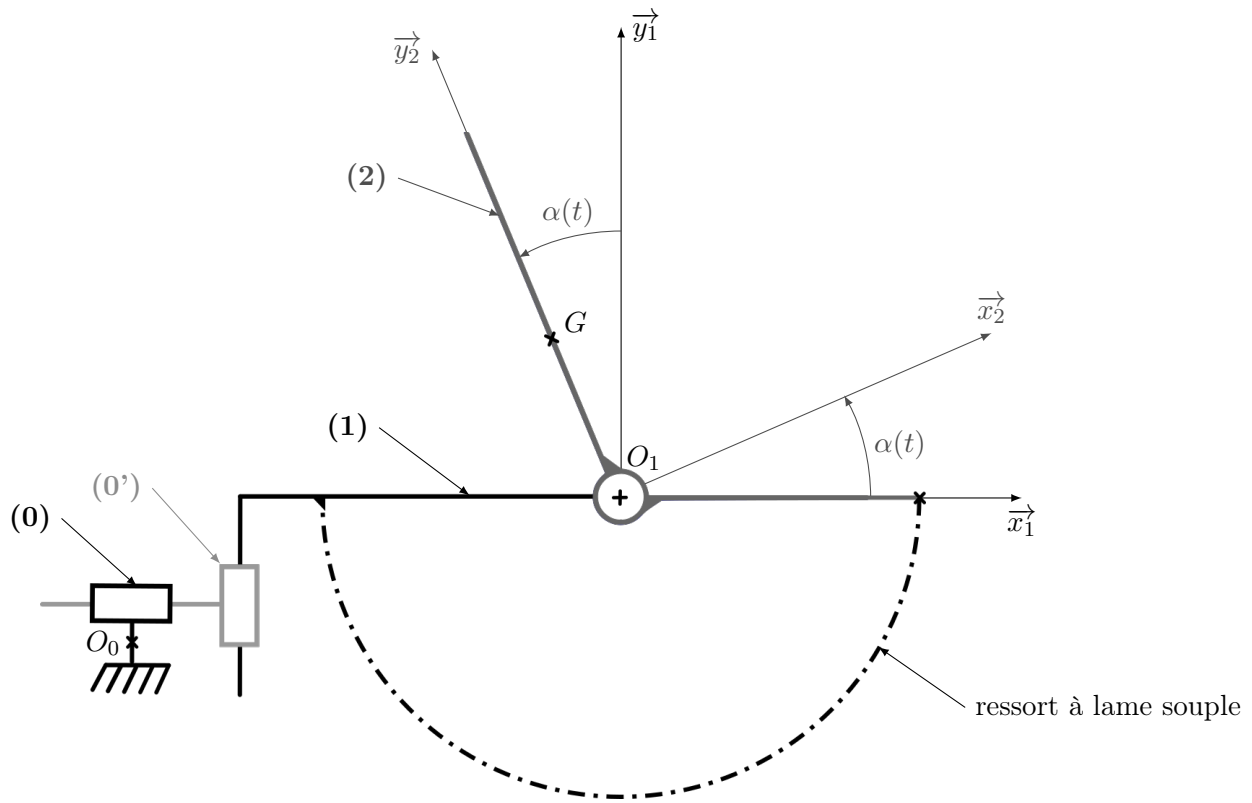
$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_O \vec{x}_1 + Y_O \vec{y}_1 + Z_O \vec{z}_1 \\ L_O \vec{x}_1 + M_O \vec{y}_1 - \mu \dot{\alpha}(t) \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}$$

L'action de rappel de l'ensemble {ressort + articulation} est assimilée à un couple sur l'axe de rotation  $(O_1, \vec{z}_1)$  du pendule :

$$\{\mathcal{T}_{ressort \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ (C_0 - k(\alpha(t) - \alpha_0)) \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_1}$$

## Annexe 3 - Modèle cinématique du système lors d'un séisme

Les torseurs d'actions mécaniques et les notations de l'Annexe 2 restent valables.



### Notations et hypothèses supplémentaires

En tenant compte des symétries, la matrice d'inertie du pendule (2) en  $O_1$  est de la forme :

$$\bar{I}_{(O_1,2)} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)}$$

Le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , auquel est associé le repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , est supposé galiléen.

On note la vitesse du sol (1) par rapport à  $R_0$  :

$$\vec{V}_{(O_1,1/R_0)} = V_x(t)\vec{x}_1 + V_y(t)\vec{y}_1$$