

MP, DS de SI, décembre 2024

Durée 3h

Corrigé prochainement sur le site :
<http://perso.numericable.fr/starnaud/>

Ce DS comporte 2 problèmes :

- ✓ Premier problème : Sujet pages 2 à 7.
 Annexes 1 à 4, pages 13 à 17.

- ✓ Deuxième problème : Sujet pages 1 à 5.

PINCE BRUCELLES INSTRUMENTÉE HAPTIQUE DE MICRO-MANIPULATION

Inspiré de la thèse de doctorat en robotique de Sophia Sakr,
Robotique coopérative pour l'assistance à la manipulation multi-échelle
Sorbonne Université, Faculté des Sciences et Ingénierie, 2020

La **partie I** présente le contexte de la micro-manipulation et le système étudié.

La **partie II** porte sur la validation des exigences géométriques de la pince.

La **partie III** porte sur la validation des exigences mécaniques de la pince.

La **partie IV** porte sur l'étude du contrôle asservi de la pince et du retour haptique.

La **partie V** présente des fonctionnements alternatifs de la pince.

Partie I - Présentation du contexte de la micro-manipulation et de la pince

I.1 - Micro-manipulation manuelle et pince brucelles

La micro-manipulation désigne la manipulation d'objets de dimensions comprises entre quelques micromètres et quelques millimètres. Pour ceux assez grands pour être visibles à l'œil nu, mais trop petits pour être efficacement attrapés à la main, cela se fait actuellement bien souvent manuellement, avec des outils fins, tels que des pinces brucelles et requiert beaucoup d'expertise, de savoir-faire et de précision dans le geste. De nombreux domaines sont concernés par ces manipulations fines, complexes et rarement répétitives :

- la médecine (micro-chirurgie) ;
- l'artisanat (horlogerie, joaillerie) ;
- l'électronique (micro-circuits électroniques).

La pince brucelles est une pince fine à ressorts, ouverte au repos et adaptée pour saisir de très petits objets (**figure 1**). Les différents modèles manuels existants se distinguent par leur taille, rigidité ou encore embout de saisie.



Figure 1 - Pinces brucelles

I.2 - Pince brucelles instrumentée haptique

Dans des positions de travail souvent peu confortables et durant de longues heures, chirurgiens et artisans sont ainsi amenés à devoir contrôler leurs mains tant dans les mouvements minutieux que dans les efforts exercés pour le serrage de la pince.

Afin d'éviter des tremblements problématiques voire à plus long terme de nombreux troubles musculosquelettiques (TMS), une assistance cobotique (robotique collaborative) est naturellement envisagée à deux niveaux, tout en conservant la dextérité du geste manuel, l'adaptabilité à des tâches non répétitives et l'outil habituel pour l'opérateur :

- en co-manipulation : la pince robotisée assiste directement de façon collaborative le manipulateur dans ses mouvements et dans le maintien des efforts de serrage ;
- en téléopération : la pince esclave est pilotée à distance via la pince maître manipulée par l'opérateur dans un espace de travail plus ergonomique.

La téléopération permet d'amplifier ou de réduire les mouvements et les efforts et ainsi changer d'échelle au niveau de la pince esclave (manipulation d'objets plus petits ou plus grands). La dextérité du geste manuel peut également être améliorée en filtrant les éventuels mouvements physiologiques ou les tremblements parasites. Lorsque la commande est unidirectionnelle (du maître vers l'esclave, sans retour), le couplage est dit unilatéral. Au contraire, le couplage est dit bilatéral lorsqu'un retour d'information revient à l'opérateur, par exemple par le biais d'un retour haptique, qui permet alors à l'opérateur d'avoir la sensation de manipuler directement l'objet saisi par l'esclave. Une amplification des retours sensoriels permet également d'améliorer le geste manuel.



Figure 2 - Pince instrumentée

Le système étudié dans ce sujet se rapproche donc d'une pince brucelles classique. La pince instrumentée (**figure 2**) est polyvalente car destinée à quatre cas d'utilisation essentiels (diagramme SysML des cas d'utilisation **figure 9, annexe 1**) :

- manuelle : l'opérateur actionne alors uniquement avec ses doigts la fermeture de la pince sur un objet ;
- collaborative : l'opérateur commande avec sa main la pince, qui l'assiste alors notamment dans le contrôle de la force de serrage ou le maintien d'un objet (co-manipulation) ;
- maître : l'opérateur se sert de la pince pour contrôler à distance une autre pince (téléopération) ;
- esclave : le contrôle à distance permet automatiquement de suivre les mouvements du maître et de l'opérateur, en particulier l'ouverture et la fermeture de la pince (téléopération) sur un objet.

Dans les trois premiers cas d'utilisation, la pince est entre les mains de l'opérateur alors que dans le dernier cas, c'est un bras robotisé qui la déplace. Lorsque la pince est utilisée en téléopération en tant que pince maître, les déplacements sont suivis grâce à deux caméras infra-rouge et des marqueurs accrochés à la pince (système Optitrack, non étudié ici), et servent à commander le bras robotisé (non étudié ici).

Selon les cas d'utilisation, au plus trois actions mécaniques distinctes s'exercent sur les deux branches de la pince :

- F_u : force exercée par l'utilisateur sur la pince ;
- F_o : force exercée par l'objet saisi sur la pince ;
- C_m : couple exercé par le moteur sur la pince.

~~Q1. Compléter le tableau en cochant les cases lorsque l'action mécanique est non nulle pour chacun des quatre cas d'utilisation.~~

Le diagramme SysML partiel des exigences (**figure 10, annexe 1**) présente les principales exigences associées à la pince instrumentée.

Q2. Donner la sous-exigence du diagramme SysML partiel des exigences (**figure 10, annexe 1**) essentielle pour que la pince instrumentée puisse être employée dans le cas d'utilisation manuelle.

I.3 - Pince brucelles instrumentée

La **figure 3** donne une vue détaillée des éléments constitutifs de la pince instrumentée. Un diagramme SysML de définition des blocs est également fourni (**figure 11, annexe 1**) de même que la description incomplète des chaînes de puissance et d'information (**figure 12, annexe 2**).

Q3. Préciser les éléments numérotés de 1 à 8 des chaînes de puissance et d'information pour l'actionnement de la pince instrumentée haptique (**figure 12, annexe 2**).

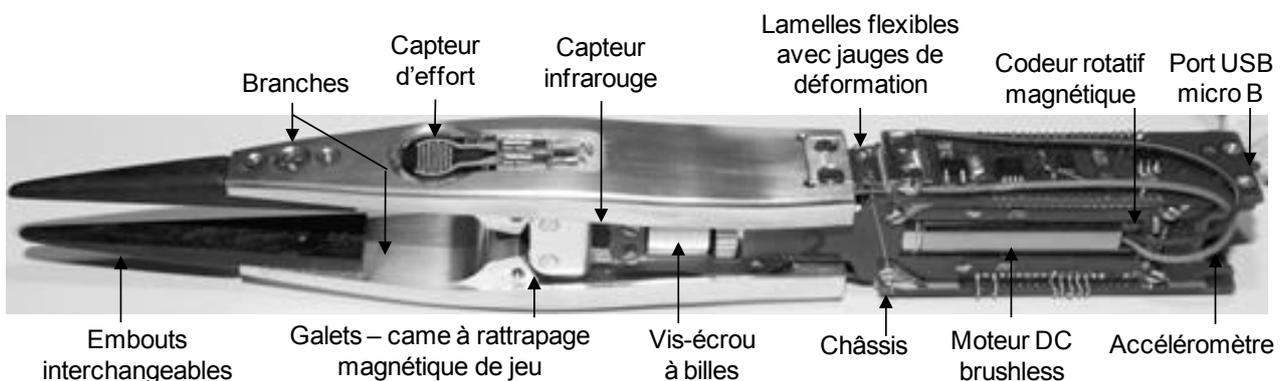


Figure 3 - Pince instrumentée – vue détaillée

Partie II - Validation des exigences géométriques de la pince

II.1 - Modèle géométrique de la pince

Le schéma cinématique d'une demi-pince est fourni (**figure 13, annexe 3**) ainsi que le paramétrage géométrique. Les liaisons entre les solides sont définies comme suit :

- 1/0 : liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) ;
- 4/1 : liaison cylindre-plan (ou linéaire rectiligne) de normale (I, \vec{y}_2) et génératrice (I, \vec{z}_0) ;
- 4/2 : liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) ;
- 2/3 : liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}_0) ;
- 3/0 : liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) .

Q4. Montrer par deux compositions des vitesses angulaires que $\vec{\Omega}(2/0) = \vec{0}$. En déduire la nature du mouvement de 2 par rapport à 0.

~~**Q5.** Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme constitué de la demi-pince (**figure 13, annexe 3**).~~

~~**Q6.** Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme complet (**figure 14, annexe 3**), sans considérer l'objet saisi. Comparer au résultat déterminé en **Q5** et justifier les éventuels écarts.~~

II.2 - Étude géométrique de la pince

On définit l'ouverture de la pince : $d = \overline{BB^1} \cdot \vec{y}_0$ (**figure 14, annexe 3**).

La symétrie du mécanisme permet de calculer l'ouverture avec : $d = 2 \overline{OB} \cdot \vec{y}_0$.

Q7. Déterminer l'expression de l'ouverture d en fonction de l'angle d'ouverture α et des données constantes.

La courbe de l'ouverture d en fonction de l'angle d'ouverture α est donnée **figure 4**.

Q8. Justifier d'après le résultat obtenu en **Q7** l'allure de la courbe obtenue **figure 4** et donner les valeurs numériques de a en $\text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ et b en m , tels que : $d = a\alpha + b$.

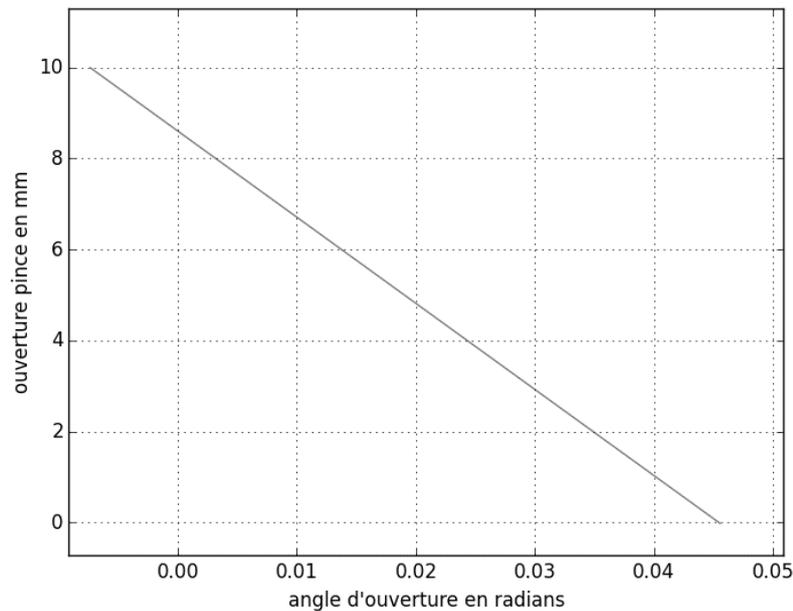


Figure 4 - Ouverture de la pince en fonction de l'angle d'ouverture α

Q9. Montrer par une fermeture géométrique que la relation entre le déplacement de l'écrou x_D et l'angle d'ouverture α peut s'écrire comme suit :

$$x_D = \frac{d_1 \sin \beta + d_2 \cos(\alpha + \beta) + d_3}{\sin(\alpha + \beta)} - d_4.$$

Préciser les expressions de d_1 , d_2 , d_3 et de d_4 en fonction des données constantes.

La courbe obtenue est donnée sur la **figure 5**.

Q10. Déterminer d'après la courbe de la **figure 5** le gain K_D en $\text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ tel que $x_D = K_D \alpha$.

Le codeur rotatif magnétique placé sur l'axe moteur mesure l'angle moteur θ_3 en absolu et code sa valeur en un nombre entier selon ses caractéristiques précisées sur le diagramme SysML de définition des blocs (**figure 11, annexe 1**).

Q11. Dédurre des questions précédentes la relation entre l'ouverture d et l'angle moteur θ_3 (voir **annexe 3**). Exprimer la plus petite variation $\Delta\theta_3$ mesurable par le codeur. En déduire la plus petite variation Δd d'ouverture correspondante. Seules les expressions littérales sont attendues.

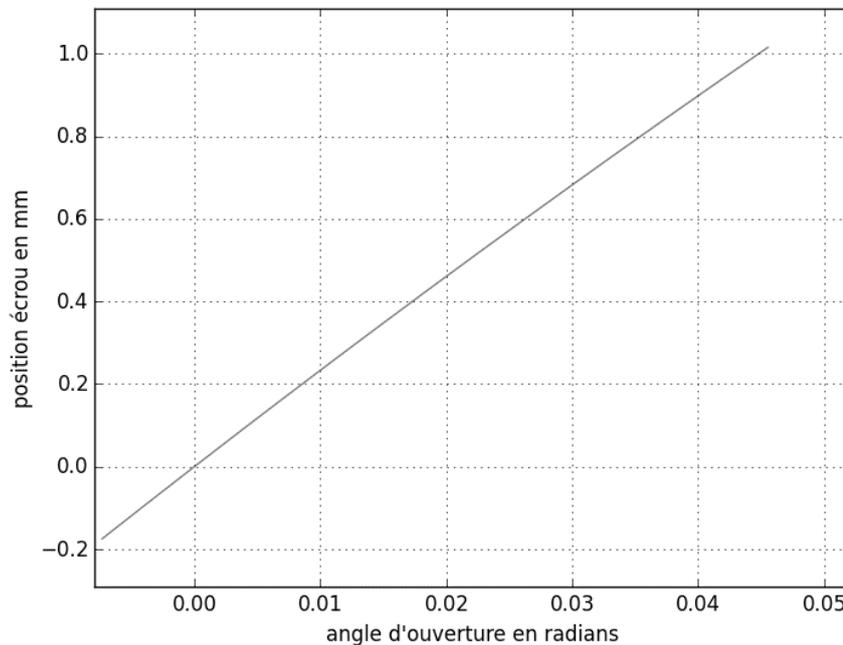


Figure 5 - Position de l'écrou en fonction de l'angle α de la branche

Partie III - Validation des exigences mécaniques de la pince

III.1 - Étude dynamique de la pince

On utilisera pour cette sous-partie la relation trouvée à la **Q10** : $x_D = K_D \alpha$.

Les données et notations utiles sont en **annexes 3 et 4**.

Q12. En exprimant la condition de roulement sans glissement au point I et en utilisant le résultat de **Q4**, déterminer la vitesse de rotation $\omega_{4/0}$ d'un galet en fonction de la vitesse d'ouverture $\dot{\alpha}$. En déduire le gain K_G , tel que : $\omega_{4/0} = K_G \dot{\alpha}$ en considérant l'angle α petit.

Pour établir l'équation de dynamique de la pince, on suppose que celle-ci est en mouvement et soumise aux actions mécaniques données en **annexe 4** et l'objet déformable ne bloque pas le mouvement. **Les actions de la pesanteur seront négligées. L'hypothèse des petits angles sera à nouveau retenue pour l'angle α .**

On supposera pour la suite $\alpha' = -\alpha$.

Q13. Exprimer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/0)$ de l'ensemble $\Sigma = \{1, 1', 2, 3, 4, 4'\}$.

Q14. En déduire l'expression de l'inertie équivalente J_{eq} rapportée sur l'axe moteur, telle que :

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}_3^2 .$$

Q15. Exprimer la puissance galiléenne des actions extérieures à l'ensemble Σ .

Q16. Exprimer la puissance des actions intérieures à l'ensemble Σ .

Q17. Dédurre des questions précédentes C_{eq} , f_{eq} , l_u et l_o , tels que :

$$J_{eq} \ddot{\theta}_3 + f_{eq} \dot{\theta}_3 + C_{eq} \theta_3 = -l_u F_u + l_o F_o + C_m.$$

III.2 - Retour haptique

Quand la pince est utilisée en pince maître de téléopération, afin de permettre à l'opérateur d'avoir la sensation de manipuler directement l'objet saisi par la pince esclave, le moteur doit simuler l'action de l'objet saisi en bloquant la pince maître. Pour que cela soit possible, on souhaite étudier la capacité **statique** du moteur à simuler le contact avec un objet saisi (pince maître) ou à saisir un objet (pince esclave).

Q18. Simplifier l'équation obtenue à la **Q17** dans le cas de la pince maître et exprimer le couple moteur nécessaire dans cette situation.

Q19. Simplifier l'équation obtenue à la **Q17** dans le cas de la pince esclave et exprimer le couple moteur nécessaire dans cette situation.

On donne **figure 6** l'évolution du couple moteur théorique en fonction de l'effort de l'utilisateur (obtenu en **Q18**) ou de l'objet (obtenu en **Q19**).

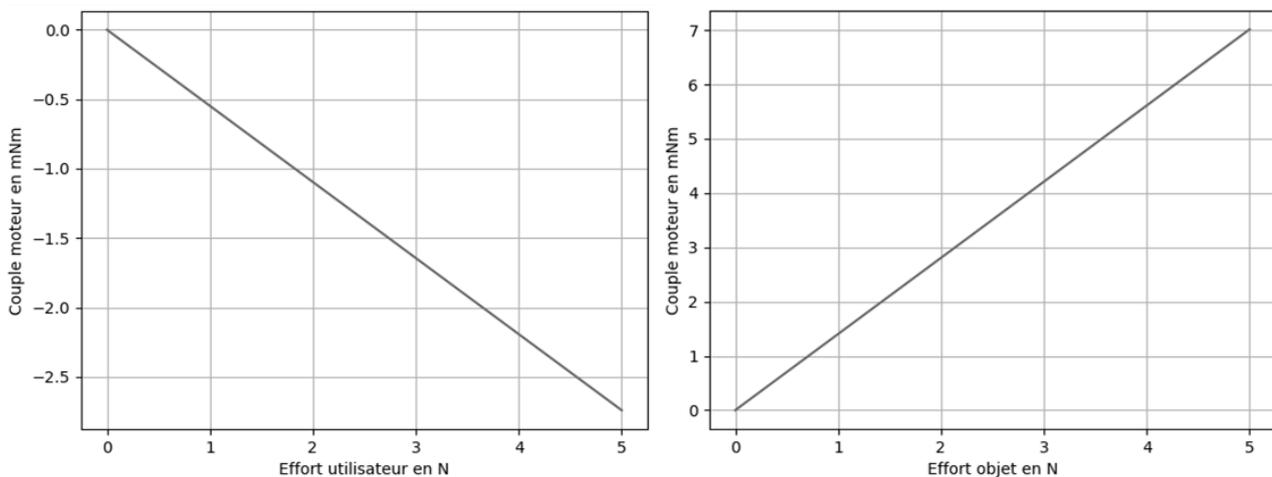


Figure 6 - Couple moteur en fonction de l'effort de l'utilisateur (gauche) ou de l'objet (droite)

Q20. Conclure quant à la capacité du moteur à vérifier les exigences 1.4.1 et 2.1.1.1 dans ces deux cas d'utilisation.

~~III.3 - Modification de la raideur de la pince~~

~~Le couple C_{eq} de la Q17 est lié aux lamelles flexibles qui donnent à la pince une raideur naturelle C_p . Dans les cas d'utilisation de co-manipulation, afin d'adapter la pince à l'utilisateur, on peut grâce au moteur augmenter ou diminuer la raideur apparente C_a , c'est à dire la raideur ressentie par l'utilisateur, telle que :~~

~~$$J_{eq} \ddot{\theta}_3 + f_{eq} \dot{\theta}_3 + 2C_a \left(\frac{pas}{2\pi K_D} \right)^2 \theta_3 = -l_u F_u + l_o F_o.$$~~

ANNEXE 1 - Diagrammes SysML et chaînes fonctionnelles

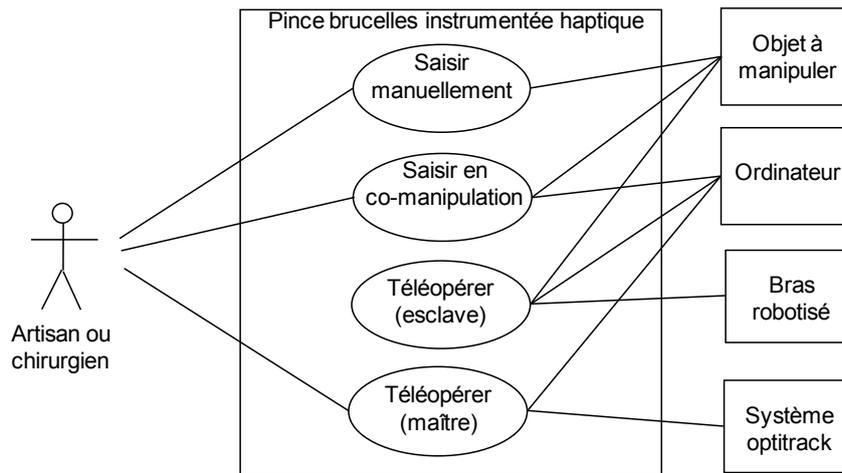


Figure 9 - Diagramme SysML des cas d'utilisation

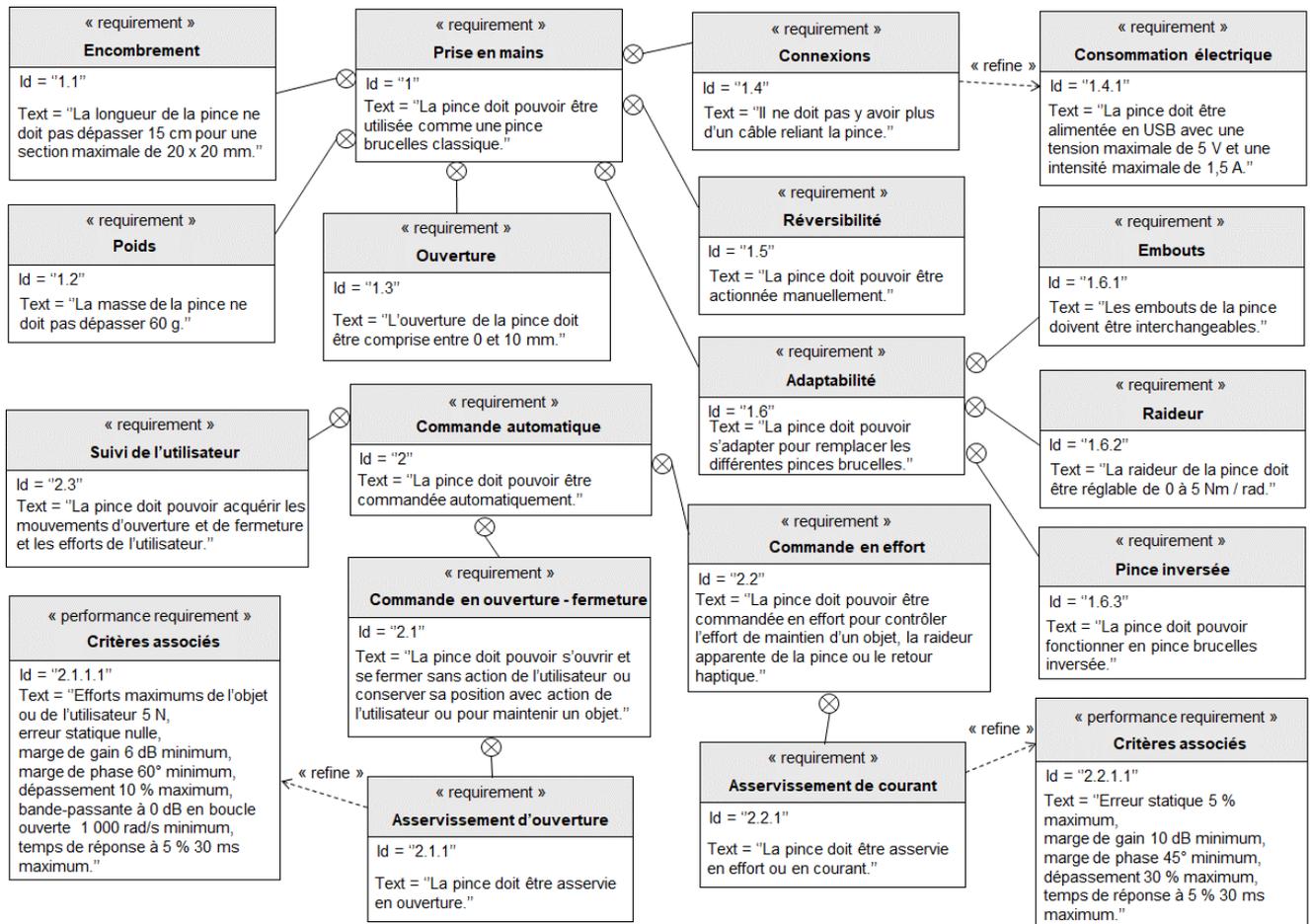


Figure 10 - Diagramme SysML partiel des exigences

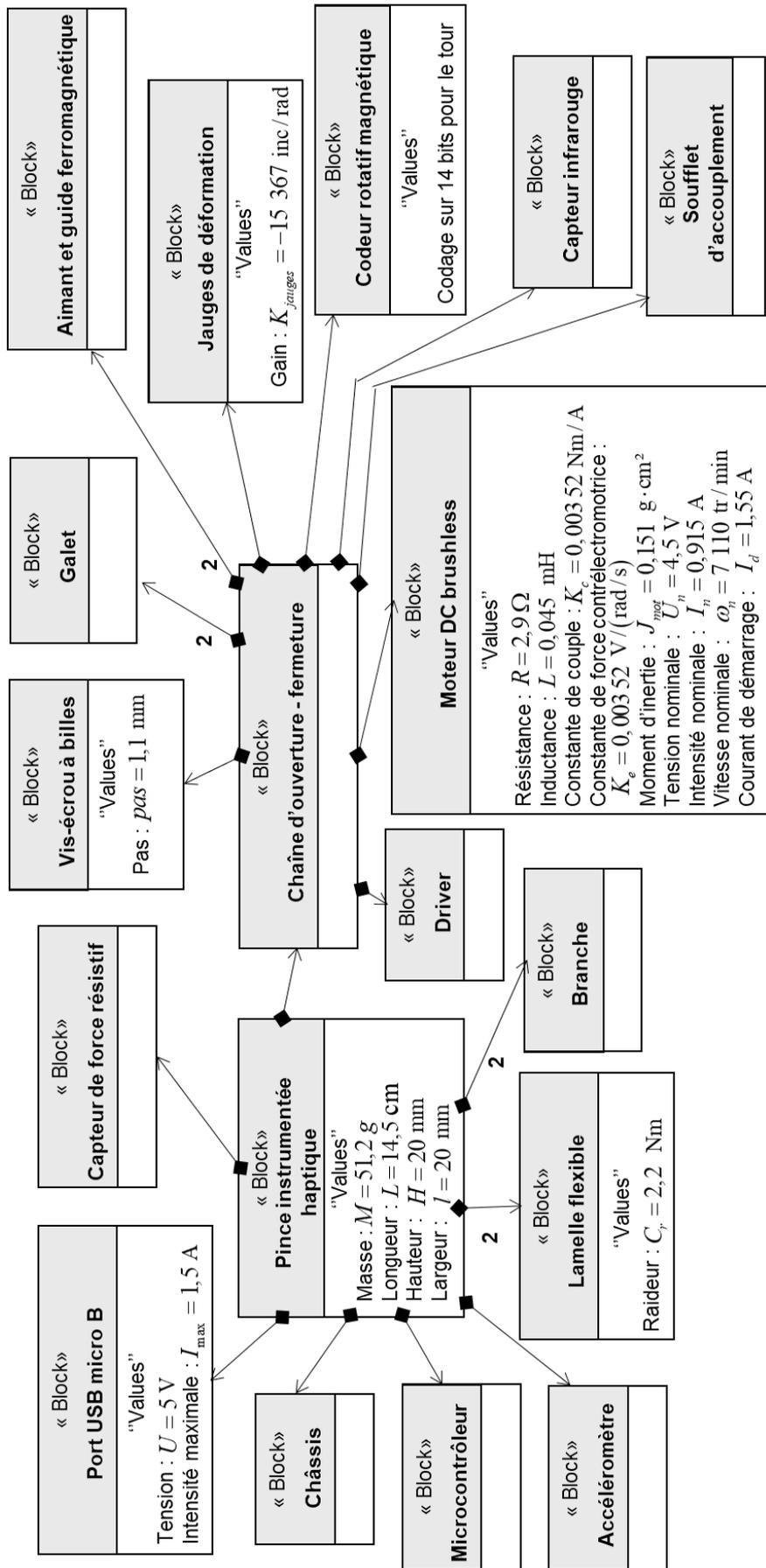


Figure 11 - Diagramme SysML de définition de blocs

ANNEXE 2 - Chaînes fonctionnelles

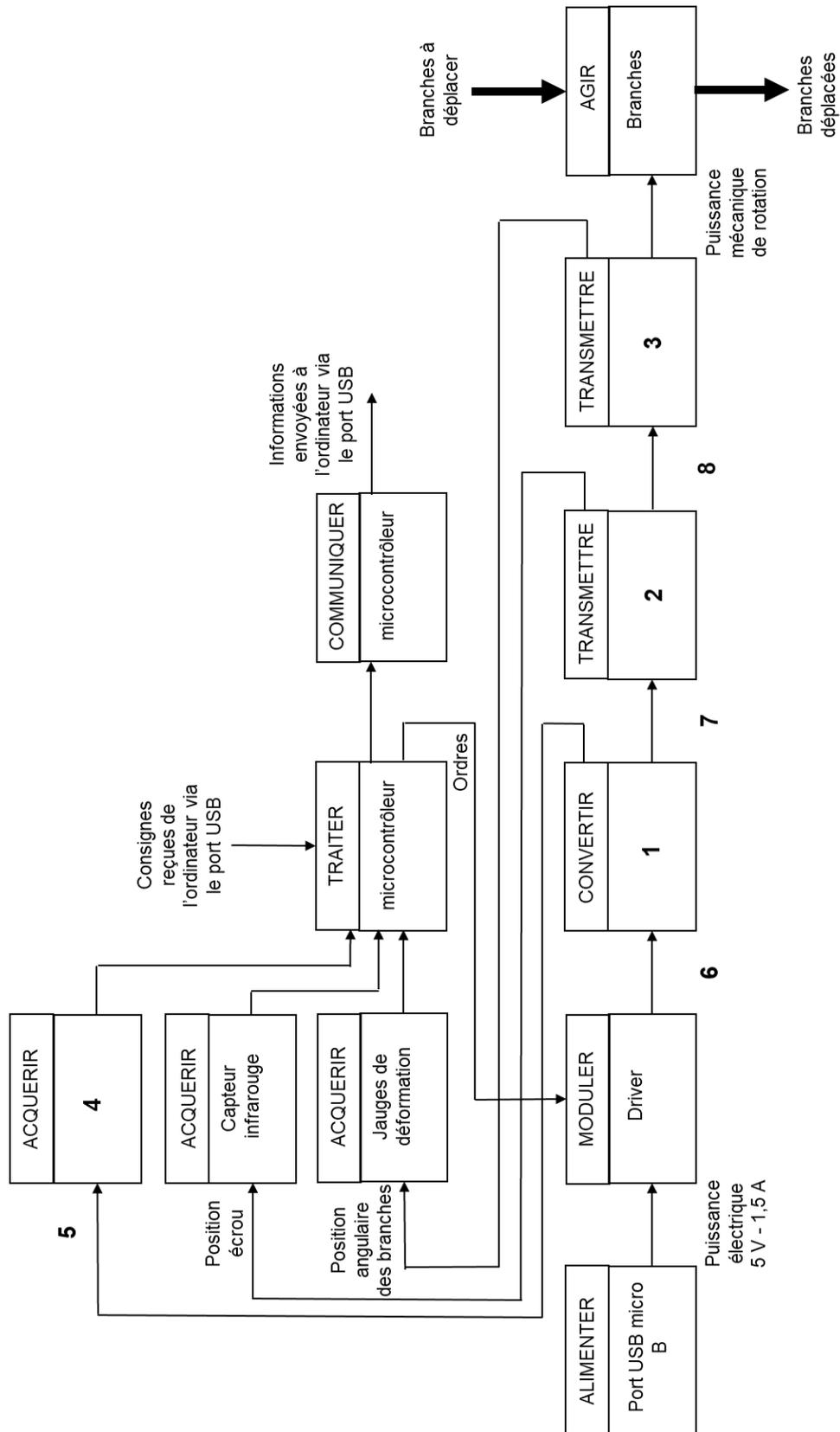


Figure 12 - Chaînes de puissance et d'information d'actionnement de la pince

ANNEXE 3 - Modèles mécaniques

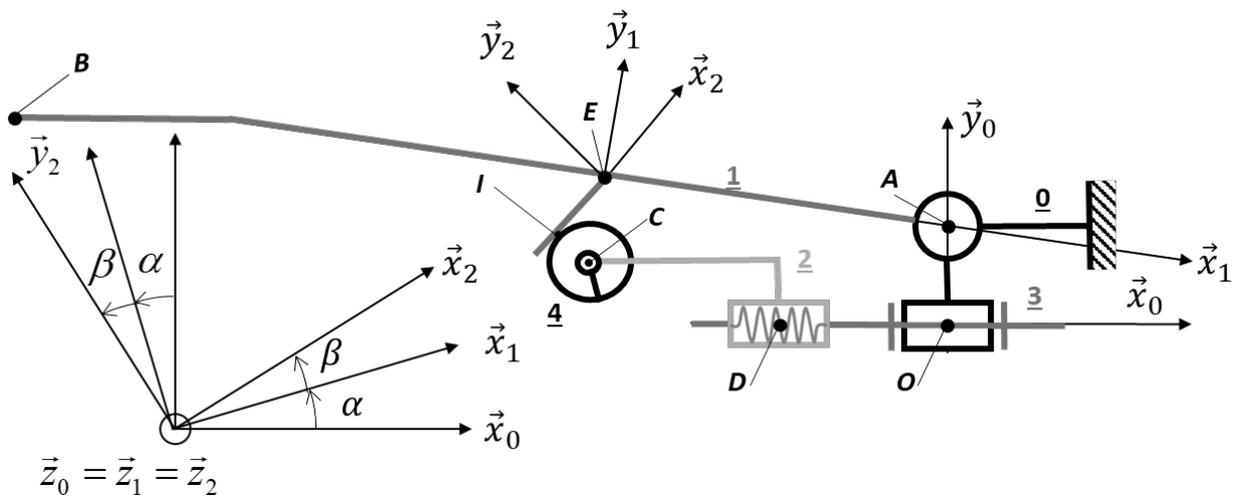


Figure 13 - Modèle géométrique de la demi-pince

Paramètres variables

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

$$\overline{OD} = x_D \vec{x}_0$$

$$\overline{EI} = x_I \vec{x}_2 \text{ avec } x_I < 0$$

et α, x_D et x_I variables

Données constantes

$$\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = 60^\circ$$

$$\overline{OA} = y_A \vec{y}_0$$

$$\overline{AE} = x_E \vec{x}_1 \text{ avec } x_E < 0$$

$$\overline{CI} = R_g \vec{y}_2$$

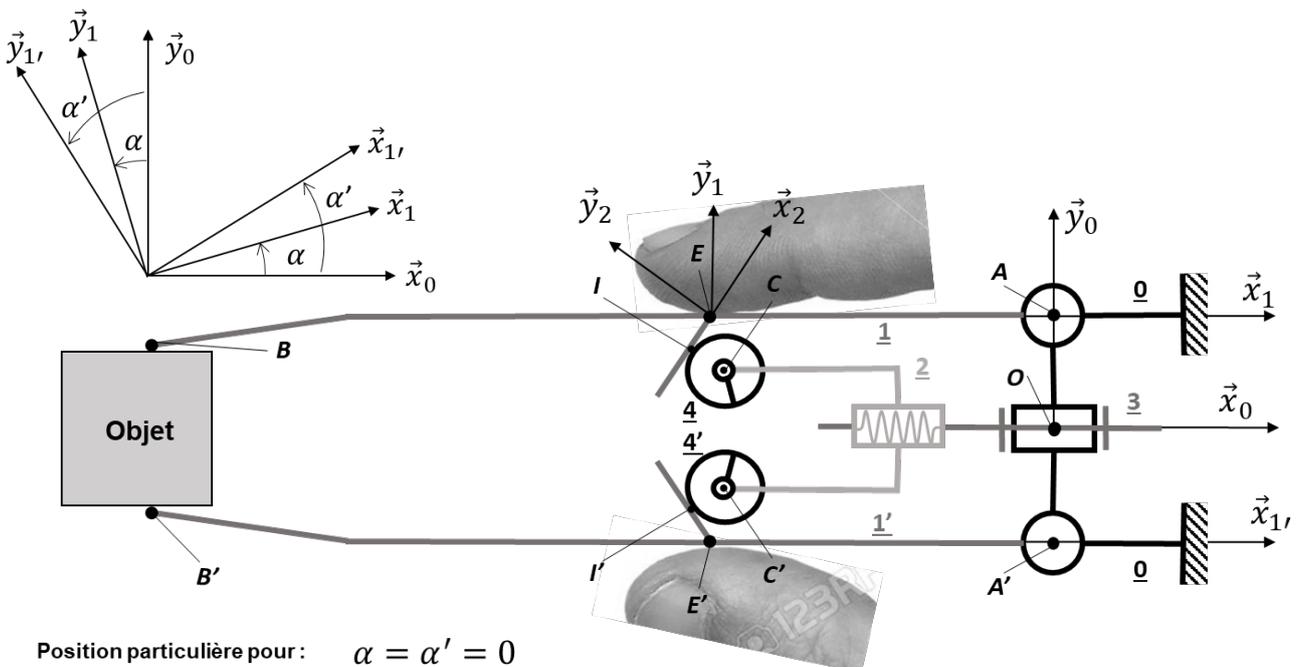
$$\overline{DC} = x_C \vec{x}_0 + y_C \vec{y}_0 \text{ avec } x_C < 0$$

$$\overline{AB} = x_B \vec{x}_1 + y_B \vec{y}_1$$

avec $x_B < 0$ et $y_B < 0$

Angle moteur θ_3 en fonction de la position de l'écrou x_D

$$x_D = \frac{pas}{2\pi} \theta_3 \text{ avec } \theta_3 = 0^\circ \text{ si } \alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = 0^\circ$$



Position particulière pour : $\alpha = \alpha' = 0$

Figure 14 - Modèle géométrique de la pince complète

ANNEXE 4 - Tableau des données des modèles mécaniques

Paramétrage cinétique

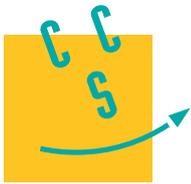
Solides	1 ou 1'	2	3	4 ou 4'
Masse	m_1	m_2	m_3	m_4
Moment d'inertie	I_1 selon les axes (A, \vec{z}_0) ou (A', \vec{z}_0)	I_2 selon l'axe (O, \vec{x}_0)	I_3 selon l'axe (O, \vec{x}_0)	I_4 selon les axes (C, \vec{z}_0) ou (C', \vec{z}_0)

Paramétrage cinématique

Solides/0	Mouvements	Paramètres
1 ou 1'/0	Rotation d'axe (A, \vec{z}_0) ou (A', \vec{z}_0)	$\alpha(t)$ ou $\alpha'(t)$
2/0	Translation de direction \vec{x}_0	$x_D(t)$
3/0	Rotation d'axe (O_3, \vec{z}_0)	$\theta_3(t)$
4 ou 4'/0	Translation de direction \vec{x}_0 Rotation d'axe (C, \vec{z}_0) ou (C', \vec{z}_0)	$x_D(t) + x_C$ $\omega_{4/0}$ ou $\omega_{4'/0}$

Actions mécaniques

Actions	Torseurs
Couple moteur s'exerçant de 0 sur 3	$\{T_{M0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_O$
Couple de frottement fluide interne ramené sur l'axe moteur 3	$\{T_{f0 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_f \dot{\theta}_3 \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_O$
Couple de rappel élastique sur 1 ou 1' (lames flexibles)	$\{T_{r0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_r \alpha \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$ ou $\{T_{r0 \rightarrow 1'}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_r \alpha' \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{A'}$
Effort de l'utilisateur sur 1 ou 1'	$\{T_{u \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -F_u \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$ ou $\{T_{u \rightarrow 1'}\} = \begin{Bmatrix} +F_u \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{E'}$
Effort de l'objet (déformable) sur 1 ou 1'	$\{T_{o \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} +F_o \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ ou $\{T_{o \rightarrow 1'}\} = \begin{Bmatrix} -F_o \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{B'}$



Étude d'un robot à câbles développé pour la manipulation de charges lourdes pour le génie civil

Présentation du système

Les robots parallèles à câbles (en anglais *Cable-Driven Parallel Robots*) sont une nouvelle structure de robots apparus au début des années 2000 et encore en développement actif. Dans ce système, la plate-forme est déplacée et orientée par rapport à une référence fixe dans toutes les directions de l'espace par l'enroulement ou le déroulement de plusieurs câbles (figure 1). Cette structure permet à la plate-forme d'atteindre une grande zone de travail avec, en tenant compte de l'inévitable déformation des câbles, une très grande précision dans le positionnement comme dans l'orientation.

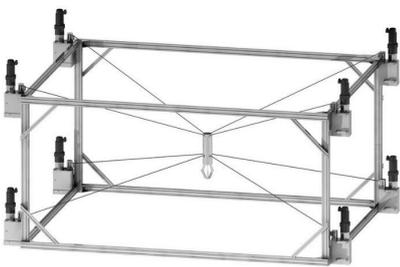


Plate-forme pilotée par huit câbles répartis – Fraunhofer Institute for Manufacturing Engineering and Automation (Allemagne)

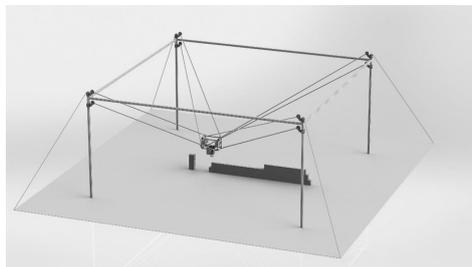


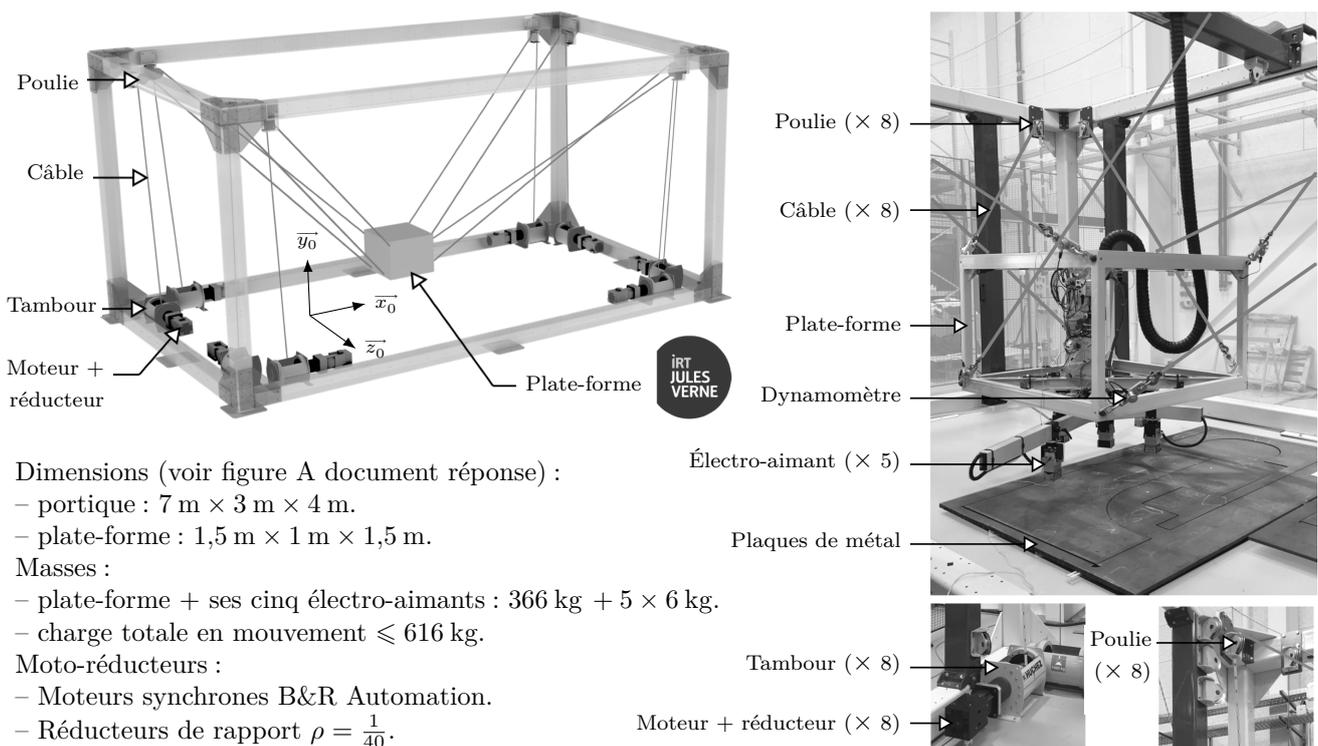
Plate-forme suspendue à huit câbles en zone supérieure pour le génie civil – Laboratoire de génie civil de l'Université de Duisburg (Allemagne)



Simulateur de vol à six degrés de liberté et huit câbles répartis – Max Planck Institute for Biological Cybernetics (Allemagne)

Figure 1 Quelques exemples de projets de robots à câbles

Le projet de robot à câbles CAROCA étudié dans la suite est de type « suspendu » comme le deuxième exemple de la figure 1. Il est développé dans plusieurs laboratoires à Nantes et sa structure est fournie figure 2.



Dimensions (voir figure A document réponse) :

- portique : 7 m × 3 m × 4 m.
- plate-forme : 1,5 m × 1 m × 1,5 m.

Masses :

- plate-forme + ses cinq électro-aimants : 366 kg + 5 × 6 kg.
- charge totale en mouvement ≤ 616 kg.

Moto-réducteurs :

- Moteurs synchrones B&R Automation.
- Réducteurs de rapport $\rho = \frac{1}{40}$.

Figure 2 Le robot à huit câbles à plate-forme suspendue étudié dans le sujet

Les cinq électro-aimants sous la plate-forme permettant de transporter des produits en acier pouvant être utilisés dans le génie civil (grilles pour le béton armé, plaques de renforts, etc.).

Dans tout le sujet, et pour simplifier l'étude, seuls des déplacements du centre géométrique G de la plate-forme dans le plan médian selon la direction normale, soit à la cote $z = 2\text{ m}$ (voir figure A du document réponse), seront étudiés. Dans cette configuration particulière, les points d'accroche des câbles sur la plate-forme restent très éloignés des poulies guidant le câble par rapport au portique : le décalage de l'implantation de ces poulies par rapport aux coins du portique est donc négligé (cette hypothèse est tout à fait cohérente pour l'évolution proposée, ce qui pourrait être confirmé par une étude géométrique complète).

Les performances attendues pour ce robot à câbles sont précisées dans le tableau 1.

Exigence	Niveau	Remarques
Charge déplacée	$\leq 616\text{ kg}$	Valeur limitée par la résistance des câbles
Précision de positionnement	$\leq 10\text{ mm}$	Dans les trois directions de l'espace
Vitesse de translation	$\leq 1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	Selon les trois directions de l'espace
Accélération de translation	$\leq 0,5\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$	Selon les trois directions de l'espace

Tableau 1 Performances attendues pour le robot à câbles au niveau de la plate-forme suspendue

L'objectif général du sujet est d'analyser quelques contraintes sur le pilotage des huit câbles à la fois en enroulement/déroulement et en maintien en tension dans le cas particulier du déplacement du centre géométrique G de la plate-forme dans le plan médian du portique.

Le sujet est organisé en six parties où sont abordés les points suivants :

- gestion de l'attitude de la plate-forme dans le plan médian en partie I ;
- commande des moteurs pour une évolution rectiligne dans le plan médian en partie II ;
- analyse des différentes sources d'incertitudes pour la gestion de l'attitude de la plate-forme en partie III ;
- analyse de l'alimentation en énergie électrique des moteurs partie IV ;
- asservissement de la longueur d'un des huit câbles pour gérer le mouvement en partie V ;
- et enfin comparaison de cette structure avec celle d'un classique robot portique afin de conclure quant aux avantages et inconvénients de cette structure de déplacement par câbles en partie VI.

I Gestion de l'attitude de la plate-forme dans le plan médian

Objectif

Le but de cette partie est d'analyser les contraintes de pilotage des longueurs des câbles afin de gérer l'attitude de la plate-forme dans le plan médian, soit sa position et son orientation.

Le paramétrage pour le pilotage dans le plan de la plate-forme est fourni figure 3 où chaque câble équivalent correspond à l'association de deux câbles ayant un mouvement coordonné. Pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la longueur du câble équivalent (i), orienté par le vecteur unitaire \vec{u}_i , est notée λ_i .

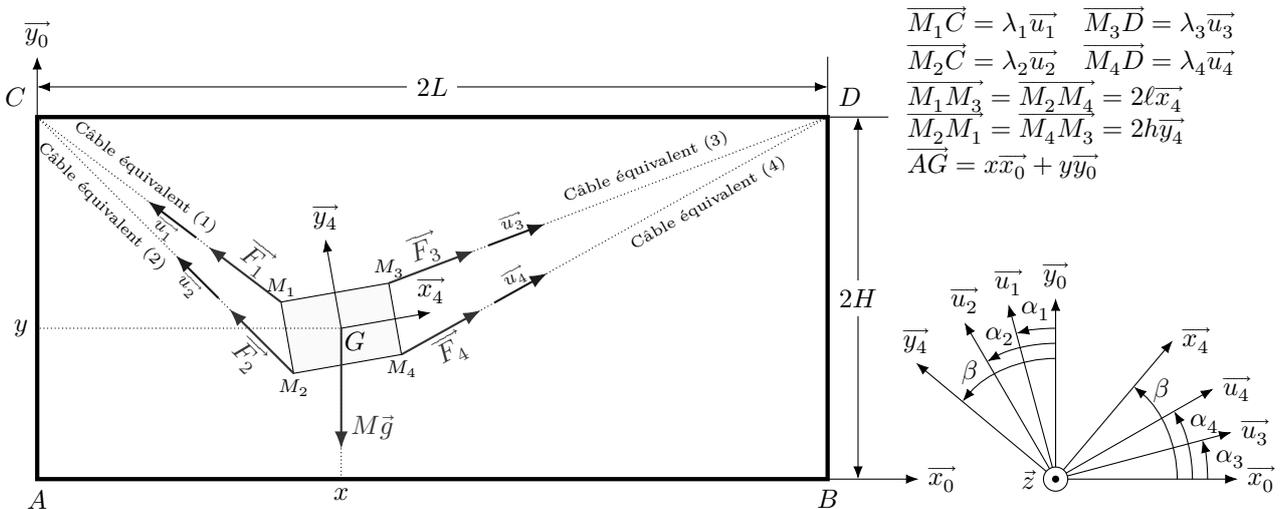


Figure 3 Paramétrage de l'étude plane dans le plan médian : les points A, B, C et D sont à la cote $z = 2\text{ m}$

Le pilotage coordonné des huit moteurs permettant l'enroulement/déroulement des câbles doit assurer un positionnement du centre géométrique G de la plate-forme selon les directions \vec{x}_0 (abscisse x) et \vec{y}_0 (ordonnée y) et

son orientation autour de la direction \vec{z} (angle $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ avec $\vec{z} = \vec{z}_0 = \vec{z}_4$), ces trois paramètres correspondant à l'attitude de la plate-forme dans cette étude simplifiée (figure 3).

La plate-forme est de dimensions $2\ell \times 2h$ selon respectivement \vec{x}_4 et \vec{y}_4 . Le centre géométrique G de la plate-forme est donc situé à une distance $\pm\ell$ (selon \vec{x}_4) et $\pm h$ (selon \vec{y}_4) des quatre coins M_1 à M_4 .

Pour trouver la relation entre les quatre longueurs λ_1 à λ_4 , la géométrie des éléments (longueurs L et H pour le portique et longueurs ℓ et h pour la plate-forme) et les paramètres x , y et β définissant la position du centre géométrique G et l'orientation de la plate-forme dans le plan médian, il est nécessaire de déterminer les équations issues des fermetures géométriques sur les boucles formées par les câbles et la structure du portique.

I.A – Relations entre longueurs des câbles et angles d'inclinaison des câbles et de la plate-forme

Q 1. En projetant la fermeture vectorielle $\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} + \overrightarrow{M_3D} = \overrightarrow{CD}$ sur les directions \vec{x}_0 et \vec{y}_0 , en déduire deux équations scalaires entre les longueurs L , ℓ , λ_1 et λ_3 et les angles α_1 , α_3 et β .

Remarque – En projetant les autres fermetures vectorielles associées aux câbles, soit $\overrightarrow{CM_2} + \overrightarrow{M_2M_4} + \overrightarrow{M_4D} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{CM_2}$ et $\overrightarrow{DM_3} + \overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{DM_4}$ sur les directions \vec{x}_0 et \vec{y}_0 , il serait possible d'obtenir six autres équations scalaires reliant les longueurs λ_1 à λ_4 des câbles, leurs inclinaisons α_1 à α_4 , les dimensions L du portique et ℓ ou h de la plate-forme et l'angle β .

I.B – Relations entre longueurs des câbles et attitude de la plate-forme

Q 2. En projetant la relation vectorielle $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1G}$ sur les directions \vec{x}_0 et \vec{y}_0 , déterminer les expressions des coordonnées x et y du centre géométrique G en fonction des longueurs λ_1 , ℓ , h et H et des angles α_1 et β . En déduire l'expression de la longueur λ_1 du câble équivalent (1) sous la forme

$$\lambda_1 = \sqrt{(x - f_1(\beta))^2 + (y - f_2(\beta))^2}$$

où les deux fonctions f_1 et f_2 sont à exprimer en fonction de l'angle β et des longueurs constantes ℓ , h et H .

Remarque – En projetant les trois autres relations vectorielles de détermination des coordonnées x et y de G , soit $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM_2} + \overrightarrow{M_2G}$, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM_3} + \overrightarrow{M_3G}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM_4} + \overrightarrow{M_4G}$ sur les directions \vec{x}_0 et \vec{y}_0 , il serait possible d'obtenir six autres équations scalaires reliant les longueurs λ_2 à λ_4 et les inclinaisons α_2 à α_4 des câbles, les dimensions L ou H du portique et ℓ et h de la plate-forme, l'angle β et les coordonnées x et y .

I.C – Mise en place du modèle inverse

Le modèle dit « inverse » de commande de ce système, défini par les quatre lois $\lambda_1(x, y, \beta)$, $\lambda_2(x, y, \beta)$, $\lambda_3(x, y, \beta)$ et $\lambda_4(x, y, \beta)$ associées aux quatre câbles équivalents, est finalement obtenu par la démarche précédente.

Q 3. Pour déplacer (paramètres x et y) et orienter (paramètre β) la plate-forme avec son centre géométrique G maintenu dans le plan médian, indiquer sans calcul (mais en le justifiant rigoureusement), le nombre de câbles équivalents qui doivent être pilotés en position (gestion précise de leurs longueurs λ_i). Comment doit-on piloter le(s) dernier(s) câble(s) équivalent(s) pour qu'il(s) ne se détende(nt) pas ?

Conclusion : cette partie ayant permis de montrer qu'il faut piloter de manière coordonnée les différents câbles, à la fois sur l'enroulement ou le déroulement et pour qu'ils ne se détendent pas, la commande des moteurs permettant de gérer cette double contrainte est étudiée dans la partie suivante.

II Commande des moteurs pour une évolution rectiligne de la plate-forme dans le plan médian

Objectif

Le but de cette partie est d'analyser les évolutions du couple devant être généré par les moteurs lors d'un déplacement centré de la plate-forme selon une loi en triangle de vitesse.

Pour toute la suite du sujet, l'étude est faite dans le cas particulier d'un déplacement vertical de la plate-forme supposée parfaitement horizontale (l'inclinaison $\beta = 0$) avec son centre géométrique G à mi-longueur ($x = L$) et toujours à la cote médiane $z = 2$ m : à l'instant initial, la plate-forme est posée sur le sol puis est déplacée selon la seule direction verticale d'une hauteur d (figure 4).

Le repère $R_0 = (A; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen tel que l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ (avec $g = 9,81$ m.s⁻²).

La plate-forme avec la charge transportée est de masse $M = 616$ kg. Le centre de gravité de la plate-forme chargée est supposé confondu avec le centre géométrique G de la plate-forme (dans la réalité, il est légèrement en-dessous mais cela ne change rien pour l'étude proposée, où la plate-forme est déplacée verticalement).

Dans cette phase de montée parfaitement centrée :

- les efforts F_1 et F_3 des câbles équivalents supérieurs sont égaux pour des raisons de symétrie ;
- et les deux câbles équivalents inférieurs ne participent pas au déplacement de la plate-forme et sont maintenus sous une légère tension et on supposera donc que les efforts F_2 et F_4 sont nuls.

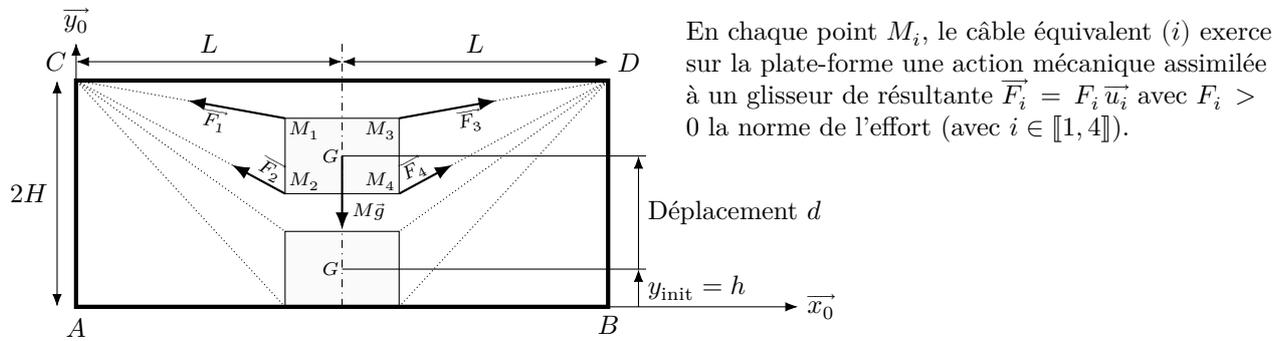


Figure 4 Mouvement de référence pour les études : déplacement vertical centré dans le plan médian

Par ailleurs, toujours pour des raisons de symétrie, les longueurs des deux câbles équivalents supérieurs sont égales, soit $\lambda_1 = \lambda_3$. Avec les équations précédentes, on en déduit que $\sin \alpha_1 = \cos \alpha_3$ et $\cos \alpha_1 = \sin \alpha_3$, ce qui permet d'en déduire deux relations entre la longueur λ_1 du câble équivalent (1), l'angle α_1 et la géométrie :

$$\lambda_1 \sin \alpha_1 = L - \ell \quad \text{et} \quad \lambda_1 \cos \alpha_1 = 2H - y - h$$

Q 4. En dérivant les deux relations précédentes, en déduire que

$$\dot{\lambda}_1 = -\dot{y} \cos \alpha_1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \dot{\alpha}_1 = \dot{y} \sin \alpha_1$$

Les deux relations obtenues à la question 4 relient la longueur et la vitesse d'enroulement ou de déroulement du câble équivalent (1) à la vitesse d'évolution verticale de la plate-forme, ce qui va permettre de mettre en place une étude dynamique de l'évolution, proposée dans la suite.

II.A – Étude de l'évolution dynamique

La configuration de la figure 5 est alors adoptée : seuls les câbles équivalents supérieurs sont utilisés et ils sont tous deux pilotés de manière symétrique par deux moteurs.

Dans toute l'étude, l'effet de la pesanteur sur les câbles est négligé au regard des autres efforts.

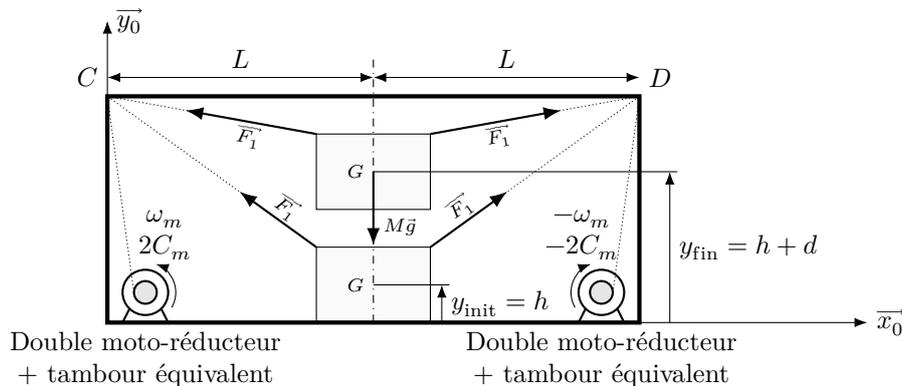


Figure 5 Modèle d'étude du déplacement vertical de la plate-forme en position centrée dans le plan médian sous l'action des deux câbles équivalents supérieurs (l'influence des deux câbles équivalents inférieurs est négligée et ils ne sont donc pas représentés)

Les quatre moteurs de pilotage (deux par câbles équivalents) sont supposés parfaitement identiques : de moment d'inertie J_m , ils délivrent un même couple $\pm C_m$ et tournent à la même vitesse angulaire $\pm \omega_m$.

Dans la phase de montée, où la vitesse de déplacement de la plate-forme $\dot{y} > 0$ et la vitesse d'enroulement du câble équivalent (1) $\dot{\lambda}_1 < 0$, la vitesse de rotation est telle que $\omega_m > 0$.

Les câbles, le réducteur de rapport $\rho = \frac{1}{40}$ et le tambour d'enroulement de rayon $R = 60$ mm (supposé constant malgré l'enroulement du câble) ont en pratique une faible influence dynamique par rapport à celles des autres éléments (moteurs et plate-forme) : par conséquent, leurs masses et inerties sont négligées dans toute la suite.

Q 5. Donner la relation entre la vitesse d'enroulement du câble $\dot{\lambda}_1$, la vitesse de rotation du moteur ω_m , le rapport ρ et le rayon R du tambour d'enroulement.

Q 6. Déterminer l'énergie cinétique galiléenne du système $(\Sigma) = \{\text{plate-forme} + \text{quatre ensembles}\{\text{moteur} + \text{réducteur} + \text{tambour d'enroulement} + \text{câble}\}\}$ en mouvement et l'écrire sous la forme $E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} J_{\text{éq}} \omega_m^2$ où l'inertie équivalente $J_{\text{éq}}$ sera exprimée en fonction de l'inertie J_m d'un des quatre moteurs, de la masse M de la plate-forme, du rayon R du tambour d'enroulement, du rapport ρ du réducteur et de $\cos \alpha_1$.

Q 7. Déterminer la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à l'ensemble (Σ) en mouvement et l'écrire sous la forme $\mathcal{P}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = \mathcal{C}\omega_m$ où la grandeur \mathcal{C} sera exprimée en fonction du couple C_m d'un des quatre moteurs, de la masse M de la plate-forme, de l'accélération g de la pesanteur, du rayon R du tambour d'enroulement, du rapport ρ du réducteur et de $\cos \alpha_1$.

Les pertes internes dans les liaisons ou au niveau des poulies de renvoi étant négligées, la puissance des actions mécaniques intérieures à l'ensemble (Σ) l'est également.

Q 8. En déduire que le couple moteur C_m d'un des quatre moteurs s'exprime sous la forme

$$C_m = \frac{1}{4} \left[(4J_m + M r^2(\alpha_1)) \dot{\omega}_m + M \tan \alpha_1 r^2(\alpha_1) \dot{\alpha}_1 \omega_m + M g r(\alpha_1) \right] \quad \text{où} \quad r(\alpha_1) = \frac{R\rho}{\cos \alpha_1}$$

La fonction $r(\alpha_1)$ étant connue pour chaque position de la plate-forme, le couple moteur l'est également.

~~II.B — Évolution du couple moteur sur une phase d'accélération / décélération de la plate-forme~~

~~Une commande symétrique, composée de deux plateaux en accélération / décélération constante de valeur $\ddot{y} = \pm 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ pendant une durée $T/2$ est choisie : voir partie gauche de la figure B du document réponse. L'amplitude du déplacement souhaité est $d = 1 \text{ m}$.~~

~~**Q 9.** Répondre à cette question exclusivement sur la figure B du document réponse. Après avoir déterminé les valeurs du temps total T et de la vitesse maximale atteinte V_{\max} atteinte lors de cette évolution, tracer les allures des courbes d'évolution de la vitesse \dot{y} et de la position y du centre de gravité de la plate-forme (confondu avec le centre géométrique de la plate-forme).~~

~~Le déplacement se faisant à vitesse très lente, il est intéressant d'analyser l'évolution du couple selon la seule hauteur, sans tenir compte des effets dynamiques.~~

~~**Q 10.** Que devient la relation de la question 8 dans le cas statique ?~~

~~Par une étude de l'équilibre de la plate-forme (point de vue quasi statique), on peut montrer que, dans le cas de l'étude proposée, les efforts dans les deux câbles équivalents supérieurs : $F_1 = F_3 = \frac{Mg}{2\cos \alpha_1}$.~~

~~**Q 11.** En utilisant les deux équations scalaires fournies juste avant la question 4, déterminer l'expression de l'effort dans les deux câbles équivalents supérieurs $F_1 = F_3$ en fonction de la masse M , de l'accélération de la pesanteur g , de la géométrie (longueurs ℓ , L et h) et de l'ordonnée y du centre géométrique de la place-forme). Les expressions déterminées précédemment permettent alors d'obtenir les courbes de la partie droite de la figure B du document réponse qui seront utilisées dans la suite de l'étude.~~

~~Cette étude ayant permis d'analyser la démarche de pilotage des câbles en enroulement/déroulement et la conséquence sur le couple moteur, il est possible de mettre en place un asservissement en position angulaire du tambour et en effort de tension pour chaque câble, directement lié au couple moteur. Avant cela, il est cependant important d'estimer les différentes sources d'incertitude sur le modèle : c'est l'objet de la partie suivante.~~

~~III Analyse de l'influence des différences sources d'incertitude sur le positionnement de la plate-forme~~

~~Objectif~~

~~Le but de cette partie est d'analyser et de quantifier les différentes sources d'erreur qui pourraient induire des incertitudes dans le positionnement de la plate-forme dans l'espace puis de les comparer aux performances attendues pour ce système à câbles.~~

~~Toute l'analyse est faite sur le seul déplacement vertical de la plate-forme dont le centre géométrique G est supposé rester au milieu du plan médian : par conséquent, il est possible d'utiliser les courbes fournies dans le document réponse figure B.~~

~~III.A — Analyse de deux sources d'incertitude sur le positionnement de la plate-forme~~

~~III.A.1) Estimation de l'incertitude due à la résolution du codeur~~

~~Pour positionner et orienter correctement la plate-forme dans la zone accessible en pilotant les huit câbles, des codeurs incrémentaux sont placés sur l'arbre moteur des motoréducteurs de rapport $\rho = \frac{1}{40}$ afin de mesurer précisément leur rotation. De technologie optique, chaque disque comporte 2048 fentes et la rotation est identifiée par deux voies en quadrature avec décompte des fronts montants et descendants des deux voies.~~

~~On rappelle que le tambour d'enroulement est de rayon $R = 60 \text{ mm}$ constant.~~

~~**Q 12.** Déterminer la valeur de l'incertitude $\Delta\theta_{\text{cod}}$ (en degrés) de mesure de la position angulaire de l'arbre moteur par le codeur. En déduire la valeur de l'incertitude $\Delta\lambda_{\text{cod}}$ (en mm) sur la longueur du câble due à la mesure par le codeur en supposant le réducteur sans jeux.~~