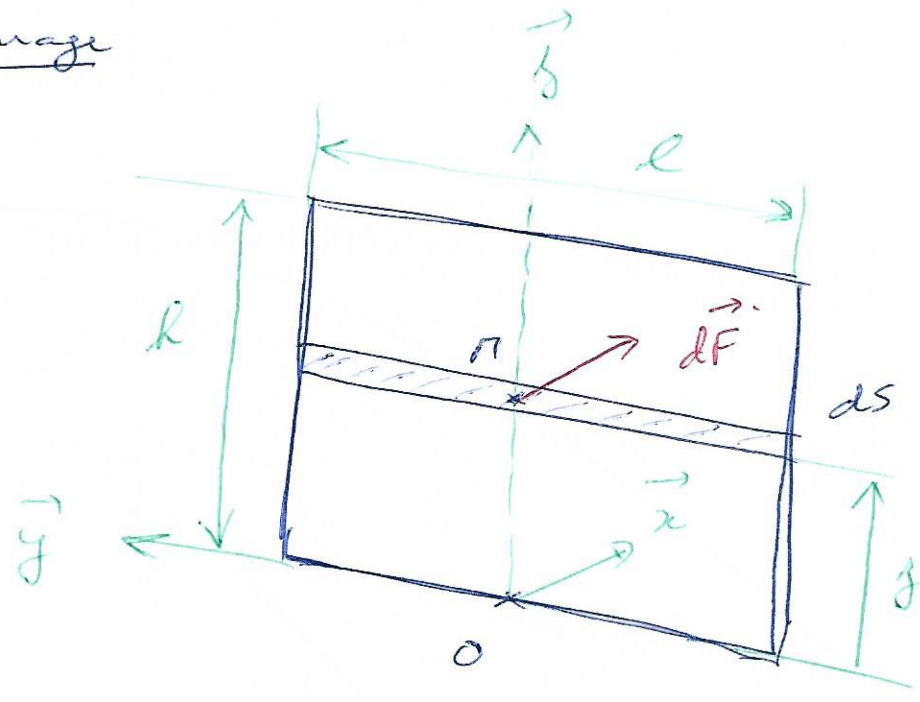
(7) Exo 3 — Barrage



Q1

Sur la surface élémentaire dS, l'eau exerce en M une force élémentaire $\vec{dF}$.

Remarques :

(1) Par symétrie, le moment est nul en M.

(2) Sur cette surface, la pression est constante.

$$\vec{dF} = p \cdot dS \cdot \vec{x}$$

$$p = \rho \cdot g\,(h - z)$$

$$dS = l\,dz$$

$$\Rightarrow \vec{dF} = \rho\, g\,(h-z)\, l\, dz \cdot \vec{x}$$

On intègre sur toute la surface : $\vec{F} = \int_S \vec{dF}$

$$\vec{F} = \rho g l \vec{x} \int_0^h (h-z)\,dz = \rho g l \vec{x} \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

$$\vec{F} = \frac{\rho g l h^2}{2} \cdot \vec{x}$$

⑧

Moment élémentaire créé par $d\vec{F}$ en O

(Moment = Force × Bras de levier).

$$\Rightarrow d\vec{M}(O) = dF \times z \times \vec{y} = z.dF.\vec{y}$$

$$d\vec{M}(O) = \rho.g.l.\vec{y}\,(hz - z^2)dz$$

On intègre sur toute la surface :

$$\vec{M}(O) = \int_S d\vec{M}(O) = \rho g l \vec{y} \int_0^h (hz - z^2)dz$$

$$\vec{M}(O) = \rho g l \vec{y} \left[h\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{\rho g l h^3}{6}.\vec{y}$$

(Q2) On cherche un point P tel que $\vec{OP} = a\vec{z}$ avec $\vec{M}(P) = \vec{0}$.

BABAR $\Rightarrow \vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{PO} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{M}(O) + \vec{F} \wedge \vec{OP} = \vec{0}.$$

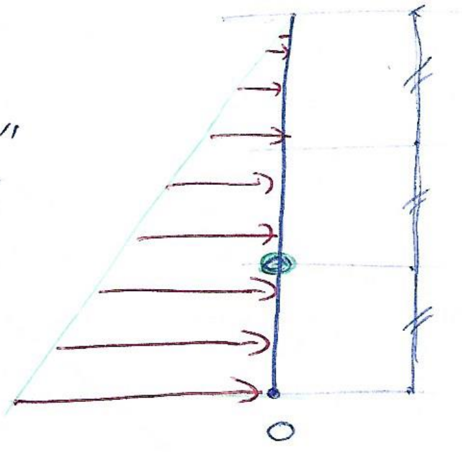
$$\frac{\cancel{\rho g l} h^{\cancel{3}}}{6}\vec{y} + \frac{\cancel{\rho g l h^2}}{2}\vec{x} \wedge a.\vec{z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{6} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{h}{3}$$

Conclusion : Au point P, $\vec{OP} = \frac{h}{3}\vec{z}$, $\vec{M}(P) = \vec{0}$.

P est le "centre de poussée".

Remarque :



La répartition des forces est de forme "triangulaire"

Cette répartition est équivalente à une force $\vec{F} = \frac{p_{max}}{2} \times \text{Surface} = \frac{\rho g h}{2} \times l \times h.$

$\Rightarrow F = \frac{\rho . g . h^2 . l}{2}$ (on retrouve le résultat de la Q1).

Le centre de poussée est situé à $\frac{1}{3}$ / $\frac{2}{3}$.

On peut retrouver le $\vec{M}(O)$.

Moment = Force × Bras de levier.

$$\vec{M}(O) = \frac{\rho g h^2 l}{2} \times \frac{h}{3} = \frac{\rho . g . l . h^3}{6}$$

↳ **A retenir**

(10) **Exo 4** Poutre

On va calculer les torseurs des actions de P_1 puis de P_2

$$\{\tau P_1\} = \begin{Bmatrix} \vec{F_1} \\ \vec{M_1}(O) \end{Bmatrix}_O$$

$$\vec{F_1} = -P_1 \times a . \vec{z} = -a . P_1 . \vec{z}$$

Calcul de $\vec{M_1}(O)$: Moment = Force × bras de levier.

(le centre de poussé est au milieu de OA).

$$\vec{M_1}(O) = a P_1 \times \frac{a}{2} \times (-\vec{y}) = -\frac{a^2}{2} P_1 . \vec{y}$$

$$\{\tau P_2\} = \begin{Bmatrix} \vec{F_2} \\ \vec{M_2}(O) \end{Bmatrix}_O$$

P_2 correspond à la pression linéique maximum.

On utilise les resultats de l'exercice 3 (barrage), cas d'une repartition triangulaire des pressions.

Le centre de poussé est au point P tel que $\vec{OP} = a\vec{x} - \frac{2}{3} l . \vec{y}$

$$\vec{F_2} = -\frac{P_2}{2} \times l \times \vec{z} = -\frac{l}{2} . P_2 . \vec{z}$$

Calcul du moment en O : $\vec{M_2}(O)$

(11)

Méthode 1 : BABAR (du calcul).

$$\vec{M}_2(O) = \vec{M}_2(P) + \vec{OP} \wedge \vec{F_2}$$

$$= \vec{0} + \left(a.\vec{x} - \frac{2b}{3}\vec{y}\right) \wedge \left(-\frac{P_2}{2}.b\,\vec{z}\right)$$

$$= + \frac{a.b.P_2}{2}\vec{y} + \frac{b^2.P_2}{3}\vec{x}.$$

Méthode 2 : Moment = Force × bras de levier

(avec la figure ...)

$$\vec{M}_2(O) = \frac{P_2.b}{2} \times a \times (+\vec{y}) + \frac{P_2 b}{2} \times \frac{2b}{3} \times \vec{x}$$

$$= + \frac{a b P_2}{2}\vec{y} + \frac{b^2.P_2}{3}\vec{x}.$$

Il ne reste plus qu'à additionner les 2 torseurs.