PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

La statique, c'est l'étude des équilibres mécaniques.

On cherche à définir et à calculer les actions mécaniques appliquées sur un système matériel en équilibre.

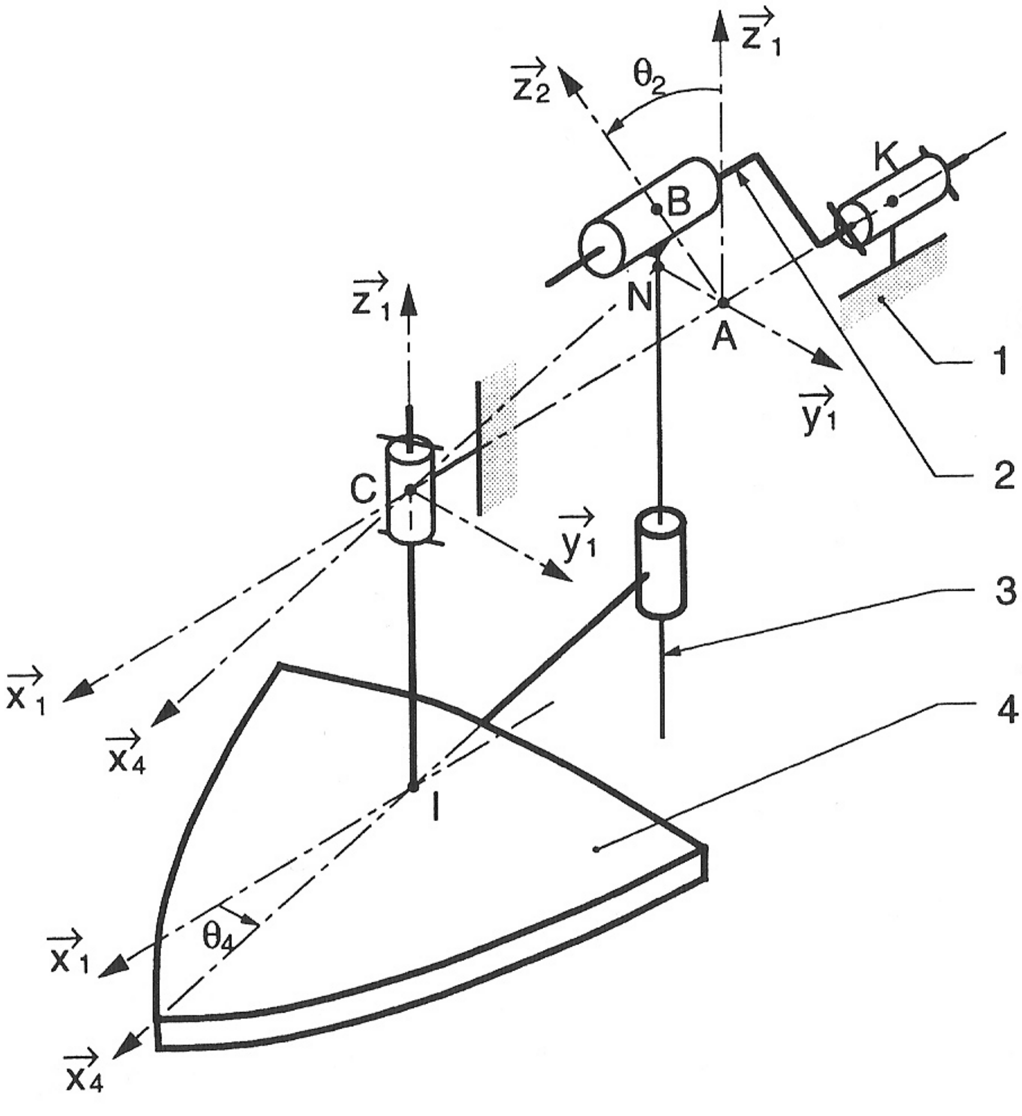
I. DEFINITIONS.

Exemple : Ponceuse

La figure représente le schéma cinématique d'une ponceuse électro-portative.

Elle est animée par un moteur électrique dont le rotor entraîne en rotation l'arbre (2).

La rotation continue du moteur est transformée en rotation alternative de faible débattement du solide (4).



Système isolé (ou ensemble isolé) : On isole un système en définissant les éléments qui le composent.

Dans l'exemple : On peut isoler l'ensemble formé par les solides 2, 3 et 4.

Efforts extérieurs : Ce sont les efforts exercés sur le système isolé par son environnement.

Dans l'exemple :

- ✓ Action de la pesanteur (négligé).
- ✓ Action du bâti 1 sur 2 (pivot au point K).
- ✓ Action du bâti 1 sur 4 (pivot au point C).
- ✓ Action du moteur sur le solide 2.
- ✓ Action de la pièce à poncer sur le solide 4.

On parle de Bilan des Actions Mécaniques Extérieures : « BAME ».

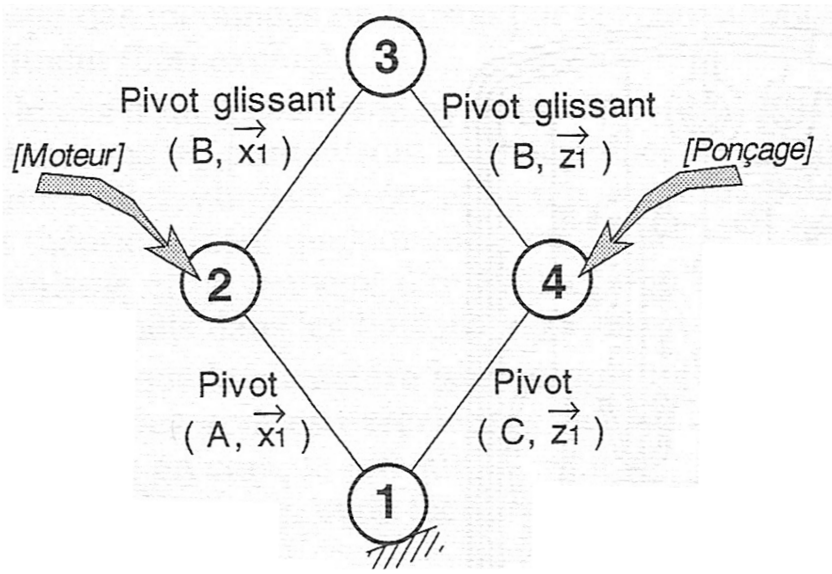
Efforts intérieurs : Ce sont les efforts exercés entre les éléments du système isolé.

Dans l'exemple : Action de 2 sur 3, action de 3 sur 4.

Remarque :

On peut représenter les efforts sur le graphe de structure.

Ce graphe est appelé le graphe des actions mécaniques.



II. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS).

Si un solide ou un ensemble de solides (E) est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors le torseur de la somme des efforts extérieurs exercés sur (E) est nul.

$$\left\{ \mathcal{T}\ \bar{E} \rightarrow E \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M}(A) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ 0 \right\}_A$$

Théorème des actions réciproques

L'action mécanique d'un système matériel E_1 sur un système matériel E_2 est opposée à l'action mécanique de E_2 sur E_1 :

$$\left\{ \mathcal{T} E2 \rightarrow E1 \right\}_A = -\left\{ \mathcal{T} E1 \rightarrow E2 \right\}_A$$

Théorème de la résultante statique (TRS).

Pour un système matériel en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g, la résultante du torseur des Actions Mécaniques Extérieures à E est nulle :

$$\vec{F}_{(\overline{E} \to E)} = \vec{0}$$

Théorème du moment statique (TMS).

Pour un système matériel en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g, le moment du torseur des Actions Mécaniques Extérieures à E est nul.

$$\vec{M}_{(\overline{E} \to E)}(A) = \vec{0}$$

Remarques :

- ✓ On n'isole jamais le bâti.
- ✓ Les actions mécaniques intérieures ne sont pas prises en compte lors de l'écriture du principe fondamental de la statique.
- ✓ Les torseurs doivent être exprimés au <u>MEME</u> point.

III. LE PROBLEME PEUT-IL SE RESOUDRE ?

1. Problème posé.

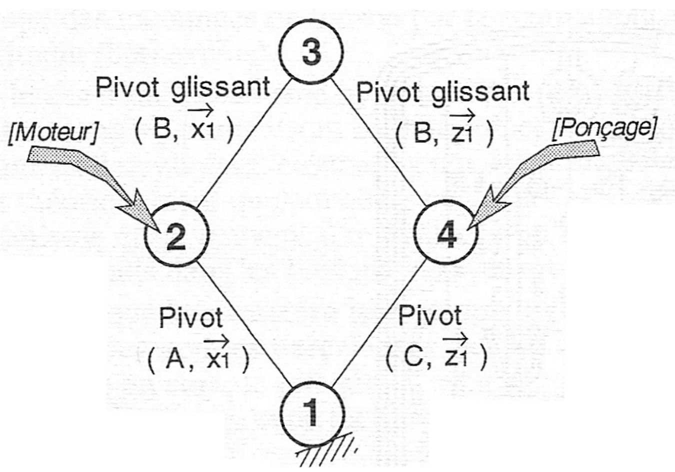
L'étape préalable à la résolution d'un problème de statique consiste à modéliser les actions mécaniques, en particulier les actions de liaisons.

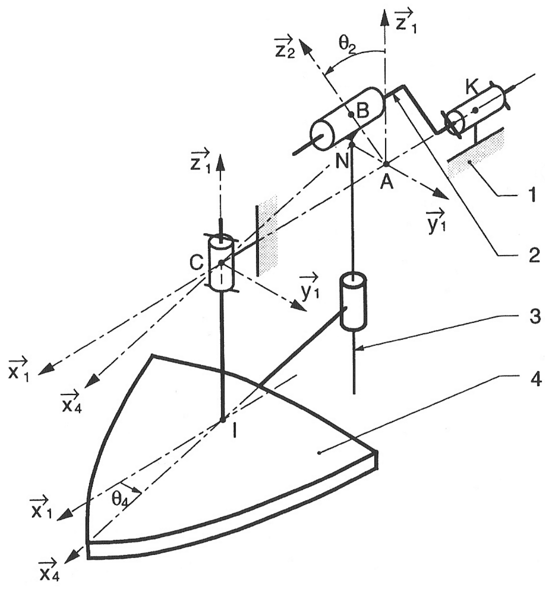
Avant toute tentative de résolution, il est nécessaire de s'assurer que le problème modélisé peut être résolu avec les équations du PFS.

Dans ce cas, on parle de mécanisme <u>isostatique</u>.

Dans le cas contraire, on parle de mécanisme <u>hyperstatique</u>.

2. Exemple : Ponceuse.





✓ Inconnues.

Le mécanisme est composé de 2 liaisons pivots et de 2 liaisons pivots glissant.

Cela nous donne 2*5 + 2*4 = 18 inconnues de liaison.

✓ Equations.

En appliquant le PFS aux solides 2, 3 et 4, cela nous donne 3*6 = 18 équations scalaires.

Le mécanisme a une mobilité, c'est-à-dire la possibilité d'un mouvement qui n'est pas bloqué par les liaisons. Il y a donc une équation en moins.

Remarque : Cette équation correspond à l'équation de mouvement de la ponceuse. Elle se détermine en utilisant le PFD (Principe Fondamental de la Dynamique) ou le TEC (Théorème de L'Energie Cinétique). Elle va nous donner une relation entre l'accélération du mouvement et les efforts exercés.

✓ Résolution.

Il y a 17 équations et 18 inconnues, on ne peut pas tout résoudre, le mécanisme est hyperstatique de degrés 1.

✓ Solution.

Pour résoudre, il faut revoir la modélisation des liaisons ou la conception (modifier le mécanisme, prévoir des possibilités de réglage…).

3. Cas général (hors programme, pour info)...

Le degré d'hyperstatisme h correspond aux nombres de degrés de libertés de liaisons qui sont supprimés plus d'une fois (liaisons surabondantes).

On a : $$h = m + I_s - E_s$$

I_s : Nombre d'inconnues statiques de liaisons.

$E_s = 6.(n-1)$: Nombre d'équation, avec n : Nombre de solides

$m = m_u + m_i$: Nombre de mobilité du mécanisme.

m_u : Nombre de mobilité utile (par exemple la relation entrée sortie).

m_i : Nombre de mobilité inutile.

Exemple : Ponceuse électro-portative, $h = m + I_s - E_s = 1$

4. Remarque.

Cette partie est hors programme.

Dans la majorité des problèmes qui vous sont posés :

- ✓ La modélisation des liaisons est donnée (sous forme de schéma cinématique).
- ✓ Le mécanisme est isostatique (on peut résoudre en utilisant le PFS).

IV. METHODE DE RESOLUTION SYSTEMATIQUE (INFORMATIQUE) D'UN PROBLEME DE STATIQUE.

La méthode systématique consiste à isoler chaque solide individuellement de façon à écrire la totalité des équations disponibles.

C'est la méthode employée par les logiciels de simulation numérique.

Pour chaque isolement la démarche est la même :

- ✓ Etablir le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME).
- ✓ Ecrire le PFS pour chaque solide.
- ✓ Réduire en un point quelconque les torseurs d'action mécanique.
- ✓ Projeter dans une base commune pour obtenir un système d'équations scalaires à résoudre.

Dans une résolution informatique, le système de n équations linéaires à n inconnues peut être résolu par des méthodes numériques.

Dans le cas d'une résolution analytique « manuelle », cette méthode devient rapidement inappropriée car le nombre d'équations devenir important.

V. METHODE DE RESOLUTION ANALYTIQUE (CALCULS MANUELS) D'UN PROBLEME DE STATIQUE.

En pratique, seules certaines inconnues d'actions mécaniques sont recherchées. On cherche alors à écrire le minimum d'équations permettant de relier ces inconnues aux données.

Etapes :

- ⇨ Analyser le mécanisme modélisé (schéma cinématique + informations sur les actions mécaniques).
- ⇨ Proposer un isolement ou une série d'isolements qui permet de parvenir au résultat recherché.

Les problèmes sont simplifiés pour deux raisons :

- ✓ Dans 90% des cas, les problèmes sont des problèmes plans.
- ✓ On retrouve très souvent des cas particuliers d'équilibre.

VI. CAS DES PROBLEMES PLANS.

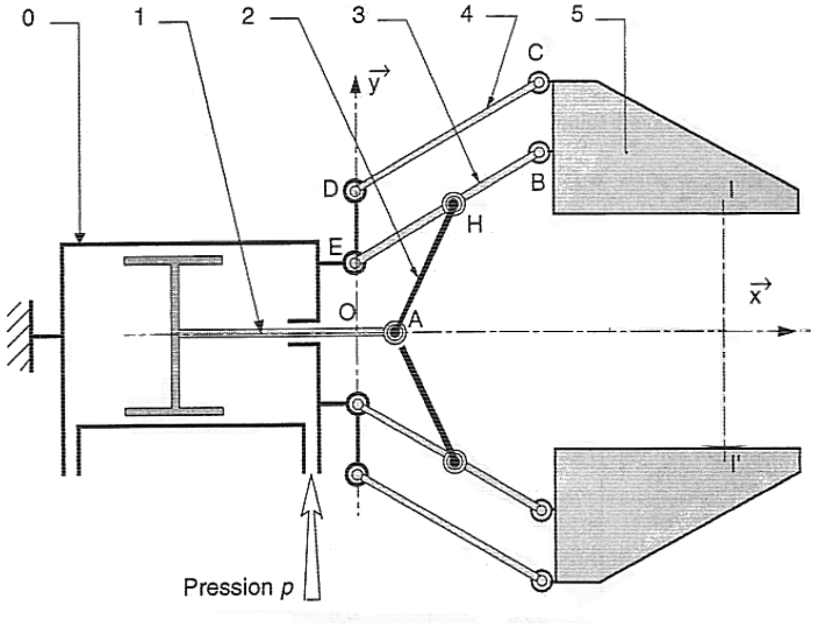
On peut admettre qu'un problème est « plan », si le système matériel possède un plan de symétrie et si les A.M. extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan.

Dans ce cas :

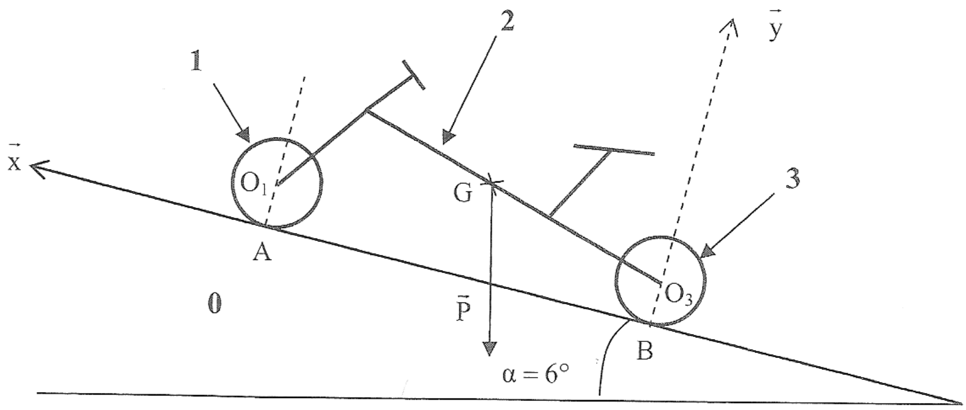
- ✓ Les résultantes des A.M. extérieures sont dans le plan (Fx, Fy).
- ✓ Les moments des A.M. extérieures sont perpendiculaires au plan (Mz).

Exemples de problèmes plans :

Pince de robot



Scooter sur une pente :



Simplification du Torseur d'action mécanique dans un problème plan :

Il subsiste dans un problème plan:

- ✓ Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie.
- ✓ La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie.

Dans l'exemple du scooter, le plan de symétrie est $(O,\vec{x},\vec{y})$.

Allure générale (3D) :

$$\left\{\tau_{(2\to 1)}\right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}$$

Allure simplifiée (2D) :

$$\left\{\tau_{(2\to 1)}\right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{21} & * \\ Y_{21} & * \\ * & N_{21} \end{Bmatrix}$$

L'application du PFS sur un solide ou un ensemble de solides dans le plan permet d'obtenir 3 équations.

- ✓ Deux équations de résultante en projection sur les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ (dans l'exemple)
- ✓ Une équation de moment en projection sur l'axe $\vec{z}$ (dans l'exemple).

Remarque :

Dans cet exemple, il y a de nombreuse liaisons pivot, appelés aussi des articulations.

Les torseurs statiques de ces liaisons sont des glisseurs (juste des forces), le moment est nul au centre de la liaison :

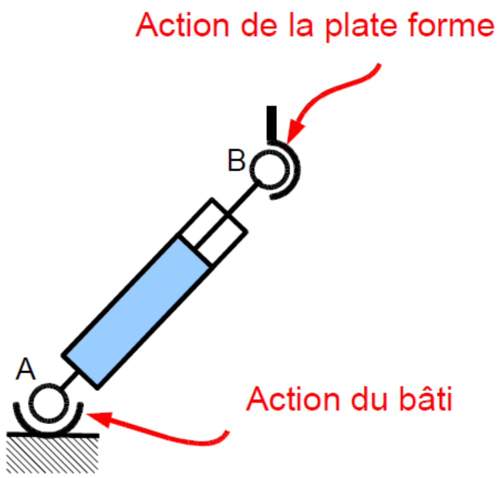
$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_A = \begin{Bmatrix} X_{21} & * \\ Y_{21} & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}$$

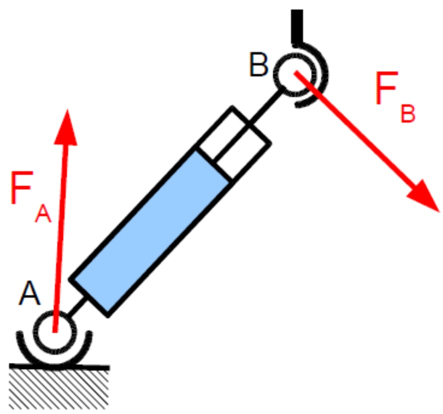
VII. CAS PARTICULIERS D'EQUILIBRE.

5.1. Solide soumis à l'action de 2 glisseurs (2 forces).

Exemple : Equilibre d'un vérin de la plateforme 6 axes

Remarques : On néglige la pesanteur.
Ces 2 actions sont des forces (glisseurs)





On applique le PFS :

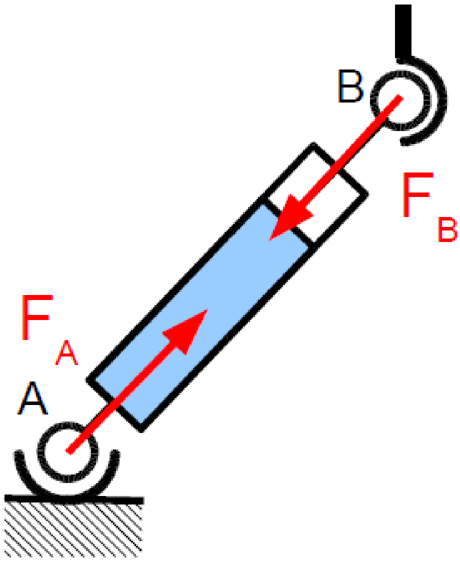
Equation des résultantes : $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$ ⇨ Les 2 forces sont opposées

Equation des moments : $\vec{M}_{\vec{F}_A}(A) + \vec{M}_{\vec{F}_B}(A) = \vec{0}$

$$\vec{M}_{\vec{F}_B}(A) = \vec{M}_{\vec{F}_B}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B$$

⇨ $\vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$

⇨ $\vec{F}_B$ sur $\overrightarrow{AB}$ (idem pour $\vec{F}_A$)

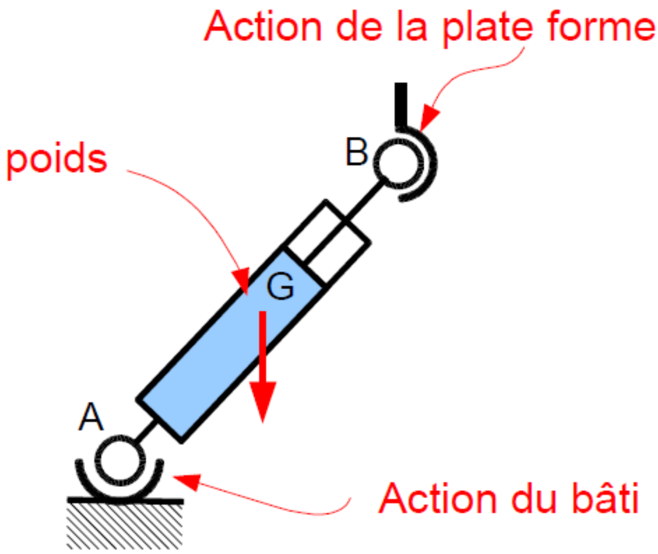


Conclusion :

Si un solide (ou ensemble de solides) est en équilibre soumis à l'action de 2 forces, ces 2 forces sont égales et directement opposées.

5.2. Solide soumis à l'action de 3 glisseurs (3 forces).

Exemple : Equilibre d'un vérin de la plateforme 6 axes



Remarques :

- ✓ On ne néglige plus la pesanteur.
- ✓ Ces « actions sont des forces (glisseurs)

TRS : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$

TMS : $\vec{M}_{\vec{F}_A}(A) + \vec{M}_{\vec{F}_B}(A) + \vec{M}_{\vec{F}_G}(A) = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_G = \vec{0}$ □ $\vec{u}_B + \vec{u}_G = \vec{0}$

Remarque : $\vec{u}_B \perp plan(A, B, \vec{F}_B)$ et

$\vec{u}_G \perp plan(A, G, \vec{F}_G)$

$\vec{u}_B + \vec{u}_G = \vec{0}$ □ Les 2 plans sont confondus.

Les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_G$ appartiennent au plan (A, B, G) .

$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = \vec{0}$, donc les 3 forces appartiennent au plan (A, B, G).

Deux cas possibles :

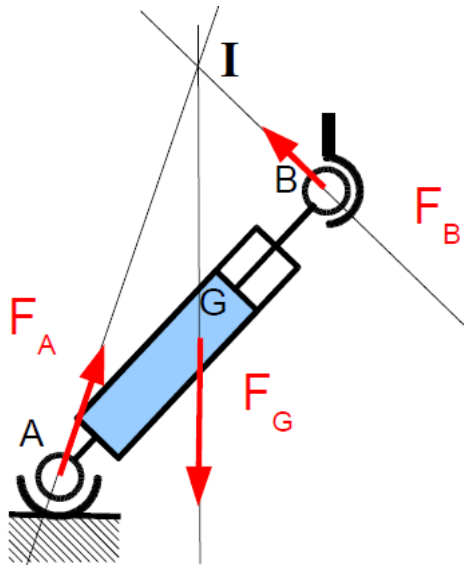
- Les forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_G$ sont parallèles, alors $\vec{F}_B$ est aussi parallèles aux 2 autres.
- Les forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_G$ sont sécantes en un point I

On a : $\vec{M}_{\vec{F}_A}(I) + \vec{M}_{\vec{F}_B}(I) + \vec{M}_{\vec{F}_G}(I) = \vec{0}$ □ $\overrightarrow{IB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$

Le support de $\vec{F}_B$ passe aussi par I.

Conclusion :

Si un solide (ou ensemble de solides) est en équilibre soumis à l'action de 3 forces, ces 3 forces sont coplanaires, courantes en un point unique ou parallèles.



Remarque :

Connaissant les 3 points d'application, 2 directions et une norme, on peut tout déterminer.

On a en effet 4 inconnues, XA, YA, XB et YB.

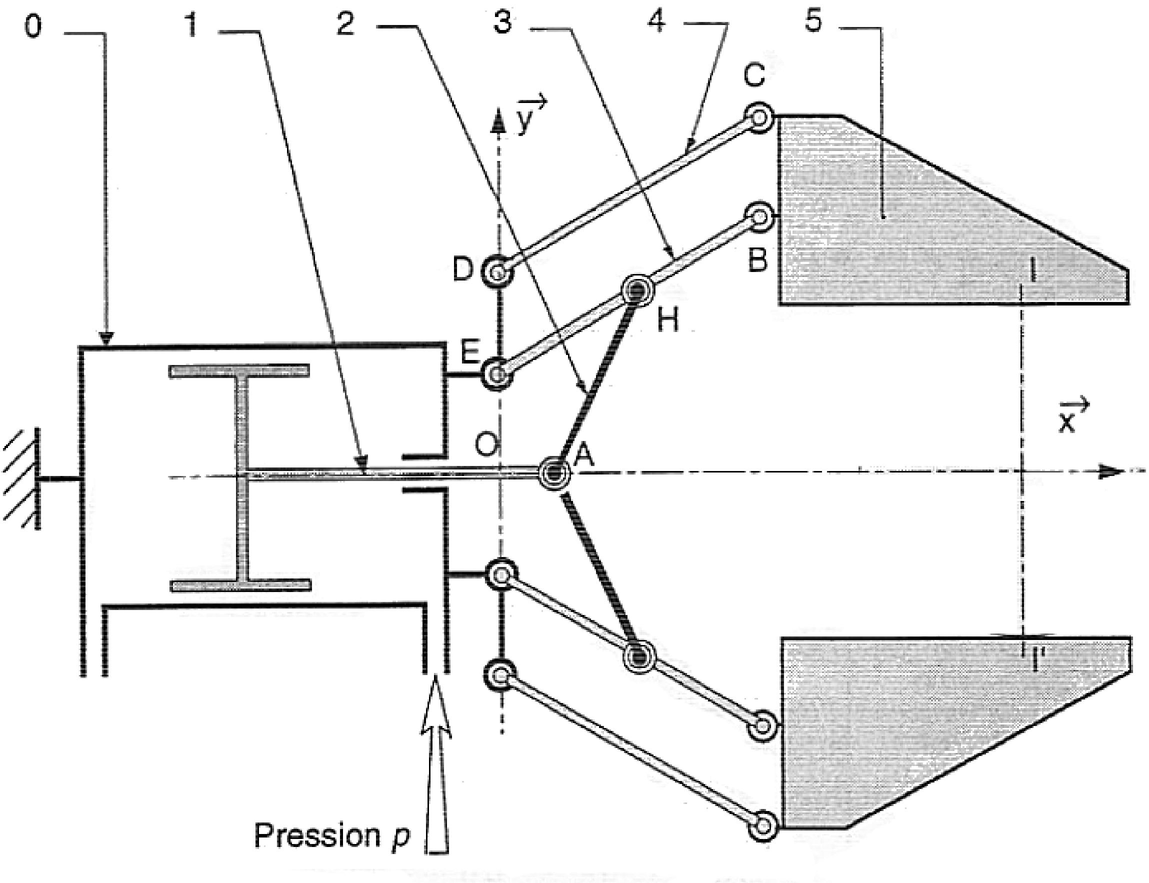
Le PFS dans le plan donne 3 équations.

Connaitre la direction d'une des forces inconnue permet d'avoir une équation en plus.

VIII. EXEMPLE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE.

Exemple : Pince de robot

On veut déterminer la pression nécessaire afin d'exercer sur la pièce à serrer en I une force verticale F : $\vec{F}_{P5} = F.\vec{y}$.



On isole (4) : Solide soumis à l'action de 2 forces

⇨ Ces 2 forces sont égales et directement opposées.

$\vec{F}_{54}$ est sur la droite (DC), $\vec{F}_{54} = X_{54}.\vec{x} + Y_{54}.\vec{y}$ avec $\tan\alpha = \dfrac{Y_{54}}{X_{54}}$

Avec : α angle entre (DC) et l'horizontale, $X_{54}. < 0$, $Y_{54} < 0$

On isole (5) : Solide soumis à l'action de 3 forces, en I, B et C.

⇨ On connaît 2 directions (celles de $\vec{F}_{45}$ et $\vec{F}_{P5}$) et une norme $\vec{F}_{P5}$.
On peut tout déterminer…
On a 4 inconnues X_{45} , X_{35} , Y_{45} et Y_{35}
On va écrire 3 équations en appliquant le PFS

On va utiliser l'équation $\tan\alpha = \dfrac{Y_{54}}{X_{54}}$.

TRS : $\vec{F}_{45} + \vec{F}_{35} + \vec{F}_{P5} = \vec{0}$

En projection : $X_{45} + X_{35} = 0 \qquad Y_{45} + Y_{35} + F = 0$

TMS en B : $\vec{M}_{45}(B) + \vec{M}_{35}(B) + \vec{M}_{P5}(B) = \vec{0}$

$\overrightarrow{BC} \wedge \vec{F}_{45} + \overrightarrow{BI} \wedge \vec{F}_{P5} = \vec{0}$ ….

On isole (2) : Solide soumis à l'action de 2 forces

- ⇨ Ces 2 forces sont égales et directement opposées.
  $\vec{F}_{32}$ et $\vec{F}_{12}$ sont sur la droite (AH).

On isole (3) : Solide soumis à l'action de 3 forces, en E, H et B.

- ⇨ On connaît 2 directions (celles de $\vec{F}_{23}$ et $\vec{F}_{53}$) et une norme $\vec{F}_{53}$.
  On peut tout déterminer…

On isole (1)

- ⇨ L'équation du TRD sur $\vec{x}$ permet de calculer la force à exercer sur le vérin.

IX. STATIQUE GRAPHIQUE PLANE.

La statique graphique était très utilisée avant que n'apparaissent les moyens de calcul modernes. Elle reste cependant un outil pédagogique très important car elle permet de visualiser les problèmes.

Remarques :

- ✓ La statique graphique permet de résoudre uniquement des problèmes plans.
- ✓ On manipule uniquement des glisseurs (torseur glisseur)

Rappel : Un glisseur (torseur glisseur) est torseur pour lequel il existe un point ou le moment est nul.

Exemples de glisseurs :

- ⇨ Action de la pesanteur (moment nul au centre de gravité du solide).
- ⇨ Action ponctuelle (moment nul au point de contact).

Exemple : Pince de robot

On veut déterminer la pression nécessaire afin d'exercer sur la pièce à serrer en I une force verticale F (représentée par 20 mm).

On isole (4) :

- ⇨ Solide soumis à l'action de 2 forces
- ⇨ Ces 2 forces sont égales et directement opposées.
- ⇨ $\vec{F}_{45}$ est sur la droite (DC).

On isole (5) :

- ⇨ Solide soumis à l'action de 3 forces, en I, B et C.
- ⇨ On connaît 2 directions (celles de $\vec{F}_{45}$ et $\vec{F}_{P5}$) et une norme $\vec{F}_{P5}$.
- ⇨ Les 3 forces sont courantes en un point unique.
- ⇨ On en déduit la direction de $\vec{F}_{35}$
- ⇨ On construit le triangle des forces
- ⇨ On en déduit la norme de $\vec{F}_{35}$.

Démarche pour terminer la résolution du problème :

- ⇨ On isole (2), solide soumis à l'action de 2 forces, ces 2 forces sont égales et directement opposées.
- ⇨ On isole (3), solide soumis à l'action de 3 forces, en E, B et H, on connaît 2 directions et une norme, on peut tout déterminer.
- ⇨ On isole (1), l'équation des résultantes sur l'axe x donne l'effort à exercer par la pression.