Cours de 1-TSI
Année 2010-2011

S. Gautier

1er septembre 2011

Table des matières

I. Cours et Travaux Dirigés **7**

1. Équations et inéquations réelles **9**
1.1. COURS . . . 10
1.2. TD . . . 16

2. Fonctions réelles **18**
2.1. COURS . . . 19
2.2. TD . . . 29

3. Nombres complexes et trigonométrie **31**
3.1. COURS . . . 32
3.2. TD . . . 42

4. Équations différentielles linéaires à coefficients constants **44**
4.1. COURS . . . 45
4.2. TD . . . 50

5. Géométrie plane **52**
5.1. COURS . . . 53
5.2. TD . . . 63

6. Limites de fonctions et asymptotes **65**
6.1. COURS . . . 66
6.2. TD . . . 70

7. Courbes paramétrées **71**
7.1. COURS . . . 72
7.2. TD . . . 79

8. Primitives et équations différentielles linéaires **81**
8.1. COURS . . . 82
8.2. TD . . . 89

9. Coniques **91**
9.1. COURS . . . 92
9.2. TD . . . 98

10. Bijections et fonctions reciproques **100**
10.1. COURS . . . 101
10.2. TD . . . 110

11. Géométrie dans l'espace **112**
11.1. COURS . . . 113
11.2. TD . . . 121

12. Nombres, arithmétique et récurrence **123**
12.1. COURS . . . 124
12.2. TD . . . 130

13. Systèmes linéaires **132**
13.1. COURS . . . 133
13.2. TD . . . 139

14. Sommes et produits de nombres **140**
14.1. COURS . . . 141
14.2. TD . . . 146

15. Limites de suites **148**
15.1. COURS . . . 149
15.2. TD . . . 155

16. Groupes, nombres complexes et géométrie **157**
16.1. COURS . . . 158
16.2. TD . . . 164

17. Comparaisons des suites réelles **166**
17.1. COURS . . . 167
17.2. TD . . . 171

18. Matrices **173**
18.1. COURS . . . 174
18.2. TD . . . 181

19. Limites et continuité de fonctions **183**
19.1. COURS . . . 184
19.2. TD . . . 191

20. Espaces vectoriels **193**
20.1. COURS . . . 194
20.2. TD . . . 201

21. Limites et comparaisons de fonctions **203**
21.1. COURS . . . 204
21.2. TD . . . 208

22. Dimension d'un espace vectoriel **209**
22.1. COURS . . . 210
22.2. TD . . . 217

23. Développements limités **219**
23.1. COURS . . . 220
23.2. TD . . . 227

24. Matrices de vecteurs et d'applications linéaires **229**
24.1. COURS . . . 230
24.2. TD . . . 235

25. Fonctions dérivables et régularités d'ordres supérieurs **237**
25.1. COURS . . . 238
25.2. TD . . . 243

26. Polynômes 245
26.1. COURS . . . 246
26.2. TD . . . 253

27. Intégrales de fonctions 255
27.1. COURS . . . 256
27.2. TD . . . 263

28. Formules de Taylor 265
28.1. COURS . . . 266

II. Tests de cours, devoirs maisons et devoirs surveillés 270

29. Tests de cours 272
29.1. test1 . . . 273
29.2. test2 . . . 274
29.3. test3 . . . 275
29.4. test4 . . . 276
29.5. test5 . . . 277
29.6. test6 . . . 278
29.7. test7 . . . 279
29.8. test8 . . . 280
29.9. test9 . . . 281
29.10test10 . . . 282
29.11test11 . . . 283
29.12test12 . . . 284
29.13test13 . . . 285
29.14test14 . . . 286
29.15test15 . . . 287
29.16test16 . . . 288
29.17test17 . . . 289
29.18test18 . . . 290
29.19test19 . . . 291
29.20test20 . . . 292
29.21test21 . . . 293
29.22test22 . . . 294
29.23test23 . . . 295
29.24test24 . . . 296
29.25test25 . . . 297
29.26test26 . . . 298
29.27test27 . . . 299
29.28test28 . . . 300
29.29test29 . . . 301
29.30test30 . . . 302
29.31test31 . . . 303

30. Devoirs maisons 304
30.1. Sujet dm1 . . . 305
30.2. Corrigé dm1 . . . 306
30.3. Sujet dm2 . . . 307
30.4. Corrigé dm2 . . . 308
30.5. Sujet dm3 . . . 311

30.6. Corrigé dm3 312
30.7. Sujet dm4 313
30.8. Corrigé dm4 314
30.9. Sujet dm5 315
30.10 Corrigé dm5 316
30.11 Sujet dm6 318
30.12 Corrigé dm6 319
30.13 Sujet dm7 321
30.14 Corrigé dm7 322
30.15 Sujet dm8 323
30.16 Corrigé dm8 324
30.17 Sujet dm9 326
30.18 Corrigé dm9 327
30.19 Sujet dm10 329
30.20 Corrigé dm10 330
30.21 Sujet dm11 332
30.22 Corrigé dm11 333
30.23 Sujet dm12 335
30.24 Corrigé dm12 337

31. Devoirs surveillés **340**
31.1. Sujet ds1 341
31.2. Corrigé ds1 342
31.3. Sujet ds2 344
31.4. Corrigé ds2 346
31.5. Sujet ds3 349
31.6. Corrigé ds3 351
31.7. Sujet ds4 354
31.8. Corrigé ds4 357
31.9. Sujet ds5 361
31.10 Corrigé ds5 363
31.11 Sujet ds6 367
31.12 Corrigé ds6 370
31.13 Sujet ds7 374
31.14 Corrigé ds7 376
31.15 Sujet ds8 380

*A*vertissement : Vous trouverez ici des fiches de cours, feuilles de travaux dirigés, tests de cours, devoirs surveillés et devoirs maisons qui ont été proposés à la classe de mathématiques de CPGE 1-TSI du lycée Pierre-Paul Riquet. Vous y trouverez très certainement des coquilles. Merci de me les signaler.

Première partie .

Cours et Travaux Dirigés

1. Équations et inéquations réelles

Table des matières

1 Avant-propos **2**
- 1.1 Quantificateurs logiques 2
- 1.2 Implications, équivalences 2
- 1.3 Relation d'ordre 4
- 1.4 Valeur absolue d'un nombre réel 4
- 1.5 Factorisation d'expressions 5

2 Expressions algébriques **6**
- 2.1 Expressions de degré 1 6
- 2.2 Expressions de degré 2 7
- 2.3 Expressions rationnelles 9

3 Expressions avec radicaux **9**
- 3.1 Racine carrée d'un nombre 9
- 3.2 Équations 10
- 3.3 Inéquations 10

Équations et inéquations réelles

$\rightsquigarrow$ 6h

1 Avant-propos

Estimation : 2h
Durée : 1h40

1.1 Quantificateurs logiques

On retiendra pour la suite les symboles suivants abondamment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- / se lit « tel que ».

Exemples :

(1) pour tout réel x, x^2 est positif se traduit par : . . . ;

(2) il existe un réel x tel que x soit supérieur ou égal à deux se traduit par : . . . .

1.2 Implications, équivalences

DÉFINITION :

> On appelle assertion tout énoncé dont on peut décider s'il est vrai ou faux.

Exemples :

(1) $\mathcal{P}(x)$: « $x \geq 2$ »est une assertion. Elle est vraie si $x = 3$ ($\mathcal{P}(3)$ est vraie) et fausse si $x = 1$ ($\mathcal{P}(1)$ est fausse) ;

(2) $\mathcal{P}$: « $3 = 2$ »est une assertion. Elle est toujours fausse ;

DÉFINITION :

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles une assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie est appelé ensemble des solutions.

Exemples :

(1) $\mathcal{P}(x)$: « $x \geq 2$ ». L'ensemble des solutions est $S = \ldots$;

(2) $\mathcal{P}(x)$: « $x = 2$ ».L'ensemble des solutions est $S = \ldots$.

DÉFINITION :

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;
2. On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, lorsque A implique B et B implique A.

Exemples :

(1) $x^2 = 1 \ldots x = 1$;

(2) $x \geq 1 \ldots x \geq 2$;

(3) $x + 3 = 4 \ldots x = 1$;

(4) $x < 1 \ldots x = 1$;

(5) $x + 3 \geq 4 \ldots x \geq 1$;

PROPOSITION :

Soient A et B deux assertions.

1. Si $A \Rightarrow B$, l'ensemble des solutions de A est inclus dans l'ensemble des solutions de B ;
2. Si $A \Leftrightarrow B$, l'ensemble des solutions de A et l'ensemble des solutions de B sont égaux.

Exemples :

(1) $x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$. L'ensemble des solutions S de l'équation $x + 3 = 4$ est donc S ... ;

(2) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, donc 1 est solution de $x^2 = 1$;
$x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$, donc -1 est solution de $x^2 = 1$.
Finalement : $S \ldots \{-1;\ 1\}$.

1.3 Relation d'ordre

Il est possible de comparer deux nombres réels, à l'aide de la relation $\leq$. On rappelle que :

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre positif, l'inégalité est inchangée ;

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, l'inégalité est renversée.

DÉFINITION :

(Intervalles réels) On note, pour deux nombres réels a et b :

1. $[a;\ b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé ou segment) ;
2. $]a;\ b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ (intervalle ouvert) ;
3. $\left.\begin{array}{l} [a;\ b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\} \\ ]a;\ b] = \{x\ \mathbb{R}/a < x \leq b\} \end{array}\right\}$ (intervalles semi-ouverts ou semi-fermés) ;
4. $\left.\begin{array}{l} [a;\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x\} \\ ]-\infty;\ b] = \{x\ \mathbb{R}/x \leq b\} \end{array}\right\}$ (demi-droites fermés) ;
5. $\left.\begin{array}{l}]a;\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a < x\} \\ ]-\infty;\ b[= \{x\ \mathbb{R}/x < b\} \end{array}\right\}$ (demi-droites ouvertes).

Exemple :

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty]$ n'est pas un intervalle.

REMARQUE : Intuitivement, un intervalle est « quelque chose qui n'a pas de trou ».

1.4 Valeur absolue d'un nombre réel

DÉFINITION :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que :
$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

(1) $|3| = 3$;

(2) $|-2| = 2$;

(3) $|x| = 1 \ldots x = 1$.

PROPOSITION :

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| \in \mathbb{R}^+$;
2. $|x| = |-x|$;
3. $|xy| = |x||y|$;
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
5. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Exemples :

(1) Résolution de $|x+1| = 3 \ldots$;

(2) Résolution de $|x+1| \leq 3 \ldots$.

1.5 Factorisation d'expressions

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.

Exemples :

(1) $2x - 6 = 2(x-3)$;

(2) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3;$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Exemples :

(1) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$;

(2) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$;

(3) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

➩ la division euclidienne :

Rappel : Si un polynôme s'annule pour une valeur α, alors il est factorisable par $x - \alpha$.

Exemples :

(1) $x^2 - x - 2$ s'annule pour $x = -1$, donc $x^2 - x - 2 = (x+1)(?)$. On détermine (?) à l'aide d'une division euclidienne de polynômes :

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -x & -2 & x\ +1 \\ \cline{4-4} x^2 & x & & x\ -2 \\ \hline & -2x & -2 & \\ & -2x & -2 & \\ \cline{2-3} & 0 & 0 & \end{array}$$

Ainsi : $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ et $? = x - 2$.

2 Expressions algébriques

Estimation : 2h

Durée : 2h40

2.1 Expressions de degré 1

➩ équations :

PROPOSITION :

Soit l'équation de paramètres réels a et b : $ax + b = 0$. Alors :

1. Si $a \neq 0$, l'équation a pour unique solution : $x = -\frac{b}{a}$. On note : $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$;
2. Si $a = 0$:
   - Pour $b \neq 0$, l'équation n'admet pas de solutions : $S = \emptyset$;
   - Pour $b = 0$, tous les nombres réels sont solutions : $S = \mathbb{R}$.

Exemples :

(1) $2x + 3 = 0$. $S = \dots$;

(2) Résolution de l'équation de paramètre réel m : $mx + 4 = 0$.

⇨ <u>inéquations</u> :

PROPOSITION :

Soit l'expression de paramètres réels a et b : $E = ax + b$. Alors :

1. Si $a > 0$, l'expression est strictement positive sur $\left]-\frac{b}{a};\ +\infty\right[$, strictement négative sur $\left]-\infty;\ -\frac{b}{a}\right[$ et s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$:

x		$-\frac{b}{a}$	
E	$-$	0	$+$

2. Si $a < 0$, l'expression est strictement positive sur $\left]-\infty;\ -\frac{b}{a}\right[$, strictement négative sur $\left]-\frac{b}{a};\ +\infty\right[$ et s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$:

x		$-\frac{b}{a}$	
E	$+$	0	$-$

3. Si $a = 0$, l'expression est du signe de b.

Exemples :

(1) Résolution de $2x + 3 > 0$;

(2) Résolution de l'inéquation de paramètre réel m : $mx + 3 > 0$.

2.2 Expressions de degré 2

⇨ <u>équations</u> :

PROPOSITION :

Soit l'expression réelle $T = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme T. Alors :

1. Si $\Delta < 0$, l'équation $T = 0$ n'a pas de solutions réelles : $S = \emptyset$;
2. Si $\Delta = 0$, l'équation $T = 0$ admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$, appelée solution double de l'équation : $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$;
3. Si $\Delta > 0$, l'équation $T = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, appelées solutions simples de l'équation : $S = \{x_1;\ x_2\}$.

REMARQUES :

(1) Si $\Delta > 0$, T se factorise : $T = a(x - x_1)(x - x_2)$;

(2) Si $\Delta = 0$, T se factorise : $T = a(x - x_0)^2$;

(3) Si $\Delta < 0$, T ne « peut pas »se factoriser (dans $\mathbb{R}$).

Exemples :

(1) Résolution de $x^2 + 2x - 15 = 0$;

(2) Résolution de $mx^2 + 2x + 1 = 0$.

⇨ <u>inéquations</u> :

PROPOSITION :

Soit l'expression réelle $T = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme T. Alors :

1. Si $\Delta < 0$, T est du signe de a ;
2. Si $\Delta = 0$, T s'annule pour $x = x_0$, où x_0 est la solution double de l'équation $T = 0$ et est du signe de a ailleurs ;
3. Si $\Delta > 0$, T est du signe de a à l'extérieur des solutions simples, est du signe de $-a$ à l'intérieur des solutions, et s'annule pour $= x_1$ ou $x = x_2$, où x_1 et x_2 sont les solutions simples de l'équation $T = 0$.

Exemples :

(1) Résoudre l'inéquation : $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$;

(2) Résoudre l'équation : $x^2 + mx + 1 = 0$.

2.3 Expressions rationnelles

DÉFINITION :

> On appelle expression rationnelle toute expression E de la forme : $E = \frac{F}{G}$, où F et G sont des expressions polynômiales.

Exemples :

(1) $E = \frac{x^2+3}{2x-1}$ est une expression rationnelle ;

(2) $E = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ est une expression rationnelle : $E = \ldots$.

Pour résoudre une équation ou une inéquation associée à une expression rationnelle ($E = 0, E \leq 0$ etc..), on :

- détermine les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs pour lesquelles l'expression n'est pas définie (on manipule par la suite l'expression pour les valeurs de x telles que l'expression est définie) ;
- écrit l'expression sous la forme $E = \frac{F}{G}$;
- – Dans le cas d'une équation, on factorise uniquement le numérateur : ceci nous permet d'obtenir les solutions finales : solutions de $F = 0$ qui ne sont pas des valeurs interdites ;
  – Dans le cas d'une inéquation, on factorise le numérateur et le dénominateur, puis on fait un tableau de signes pour conclure.

Exemples :

(1) Résolution de $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0$;

(2) Résolution de $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$;

(3) Résolution de $x^3 + x - 2 = 0$.

(4) Résolution de $x^3 + x - 2 < 0$.

3 Expressions avec radicaux

Estimation : 2h
Durée : 1h50

3.1 Racine carrée d'un nombre

DÉFINITION :

> On appelle racine carrée d'un nombre positif a, et on note $\sqrt{a}$, l'unique solution **positive** de l'équation : $x^2 = a$.

faire une illustration graphique

PROPOSITION :

> Si a et b sont deux réels positifs, alors :
> 1. $\sqrt{a^2} = a$;
> 2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
> 3. $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$;
> 4. $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$;
> 5. $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$.

1. Si $a < 0$, $\sqrt{a^2} \neq a$ (en fait, quel que soit a, $\sqrt{a^2} = |a|$) ;
2. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en toute généralité. Par exemple, une telle égalité n'est pas vérifiée pour $a = b = 1$.

3.2 Équations

Exemple : Résolution de $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$. On procède comme suit :

- Les termes de l'équation sont définis si et seulement si : $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = 4 > 0$. Ainsi, comme $a = 1 > 0$, le signe du trinôme est donné par le diagramme :

x		x_1		x_2	
E	$+$	0	$-$	0	$+$

  avec $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$. L'équation est donc définie si et seulement si $x \in]-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty[$.
- Pour $x \in]-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty[$, nous avons : $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = x - 2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \ldots$

3.3 Inéquations

Exemples :

(1) Résolution de $3 < \sqrt{x+4}$. Les termes de l'inéquation sont définis si et seulement si $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. Pour $x \geq -4$, nous avons : $\sqrt{9} < \sqrt{x+4} \Leftrightarrow 9 < x+4 \ldots$;

(2) Résolution de $-3 < \sqrt{x+4}$. Les termes de l'inéquation sont définis si et seulement si $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. Pour $x \geq -4$, l'inégalité $-3 < \sqrt{x+4}$ est toujours vérifiée. Ainsi, $S = \ldots$;

(3) Résolution de $3-2x < \sqrt{x+4}$. Pour commencer, les termes de l'inéquation sont toujours définis si et seulement si $x \geq -4$. On poursuit en s'inspirant des deux exemples précédents, c'est à dire on sépare la résolution selon le signe de $3-2x$. Ainsi :
   - Si $3-2x \geq 0$, nous avons : $3-2x < \sqrt{x+4} \Leftrightarrow (3-2x)^2 < x+4$ (cf. exemple 1) ;
   - Si $3-2x < 0$, l'inégalité est toujours vérifiée (cf. exemple 2).

   Finalement $S = \ldots$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Équations et inéquations réelles

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

(a) $x^2+1=2x$; (b) $x^2-x=\sqrt{2}(x+1)$; (c) $(x+1)(x^2+2x-3)=0$;

(d) $x^3=x$; (e) $x^3-39x+70=0$; (f) $x^3+6=3x+2x^2$;

(g) $x^3-2x=x^2-2$; (h) $x^3+2x^2-x=2$; (i) $x^3-x^2+x-1=0$;

(j) $x^4=2x^2$; (k) $x^4=1$; (l) $x^4+1=0$;

(m) $x^4-4x^2+3=0$; (n) $(x^3-x)^2-x^2=0$; (o) $\dfrac{1}{x}=2x+1$;

(p) $x^2=\dfrac{2}{x+1}$; (q) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{18}{x^2-4}$; (r) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2=0$.

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $6x+5<-4x+3$; (b) $3x+2\geq 5x-1$; (c) $x^2<4x$;

(d) $(x+5)(x-2)\leq 0$; (e) $x(x+2)\leq 2x+6$; (f) $x^3<x$;

(g) $x^4\geq x^2$; (h) $(x^2+x+1)^2-4(x^2-x+1)^2>0$; (i) $x^4+2x^2-3<0$;

(j) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}>0$; (k) $\dfrac{x}{2-x}<1$; (l) $\dfrac{4-x}{7+x}\leq -1$;

(m) $\dfrac{2x+1}{x+1}\geq x$; (n) $\dfrac{x-2}{2x-2}<\dfrac{x-1}{x-5}$; (o) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}\leq\dfrac{36}{x^2-9}$.

Exercice 3 : Complétez les pointillés par $\Rightarrow, \Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$:

(a) $x^3=2x^2\ \ldots\ x=2$; (b) $x\leq -2\ \ldots\ x^2$; (c) $x\geq 3\ \ldots\ x^2\geq 3x$;
(d) $x\geq -3\ \ldots\ x^2\geq -3x$ (e) $x\geq 2\ \ldots\ \frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}$ (f) $x\leq -1\ \ldots\frac{1}{x}\geq -1$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

(a) $(m-1)x+1=0$; (b) $2mx-3=x+5m$; (c) $x^2+mx-2m^2=0$;

(d) $x^4+2mx^2+1=0$; (e) $\dfrac{2x+1}{x+3}=m$; (f) $\dfrac{x-2m}{mx+5}=m-1$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

(a) $(m+1)x^2+(m+1)x+1=0$;
(b) $(m+1)x^2+(m+1)x+1=0$ (l'inconnue est m) ;
(c) $(m-1)x^2-2(m-2)x+m+1=0$.

Exercice 6 : Déterminer selon les valeurs du réel m le signe des trinômes suivants :

$$\text{(a) } 2x^2 - mx - m^2; \quad \text{(b) } mx^2 + 2(2m+1)x + 1.$$

Exercice 7 : Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel m les trinômes $x^2 + 2x + m$ et $x^2 + x - 7m + 1$ ont une racine commune.

Exercice 8 : Comparer les expressions A et B suivantes :

$$\text{(a) } A = \tfrac{1}{\sqrt{2}+1},\ B = \sqrt{2} - 1; \quad \text{(b) } A = \sqrt{7} + 3,\ B = \sqrt{3} + 4; \quad \text{(c) } A = \sqrt{2 + \sqrt{3}},\ B = 2.$$

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$\text{(a) } \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}; \quad \text{(b) } \sqrt{x^2 - 3x - 3} = x + 2; \quad \text{(c) } \sqrt{1-2x} = x + 1;$$

$$\text{(d) } \sqrt{x+1} < \sqrt{3-2x}; \quad \text{(e) } \sqrt{x^2 + 5x + 3} < x + 2; \quad \text{(f) } 2 - x < \sqrt{x+1}.$$

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$\text{(a) } |x+1| = |2x-3|; \quad \text{(b) } |1-2x| = x+1\ ; \qquad \text{(c) } |x^2 - 3x - 3| = x + 2;$$

$$\text{(d) } |x| + |x+1| = 2; \quad \text{(e) } |x^2 + 5x + 3| < x + 2; \quad \text{(f) } 2 - x < |x+1|.$$

Exercice 11 : a et b sont deux entiers strictement positifs.

1. Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$;
2. Montrer que $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{a}{b}$;
3. Montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 12 : x et y sont des réels strictement positifs.

1. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$;
2. Montrer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Pour quelles valeurs de x et y a-t'on égalité ?
3. On suppose de plus $z \geq 0$. En déduire : $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$.

Exercice 13 : Le trésor de Rackham ™. On vient de retrouver un parchemin atribué à Rackham Le Pirate. Sur ce parchemin, figure le plan d'une île avec un côté le message qui suit : « *Sur la ligne qui passe par le cocotier et le mat, un tresor j'ai cache. Deux fois la distance du tresor au mat, plus trois fois la distance du tresor au cocotier est egal a 65 pas. De plus, 65 pas j'ai compte entre le mat et le cocotier.* »où se situe exactement le trésor de Rackham le Pirate ?

Exercice 14 : Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \sqrt{5}$. Montrer que : $\left|\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right| = 1$.

---

2. Fonctions réelles

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 Domaine de définition 2
1.2 Image d'un ensemble 2
1.3 Opérations sur les fonctions 2
1.4 Courbe représentative d'une fonction 3
1.5 Symétries de la courbe de représentative 4
1.6 Sens de variation d'une fonction 4

2 Dérivée d'une fonction **5**
2.1 Tangente d' une courbe représentative en un point 6
2.2 Fonction dérivée 6
2.3 Calcul des dérivées 7
2.4 Dérivée et sens de variation 8
2.5 Exemple d'application : le problème de la boîte 9

3 Fonctions usuelles associées à la fonction logarithme **9**
3.1 Fonction logarithme 9
3.2 Fonction exponentielle 11
3.3 Fonctions hyperboliques 13
3.4 Fonction exponentielle de base a 16
3.5 Fonction puissance 18

Fonctions de la variable réelle

$\rightsquigarrow$ 8h

1 Généralités

Estimation : 2h
Durée : 2h

1.1 Domaine de définition

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ est le plus grand sous-ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.

Exemples :
(1) $f(x) = \sqrt{x}.\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$;
(2) $f(x) = \frac{1}{1-x}.\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.

1.2 Image d'un ensemble

Notation : Si f est une fonction définie sur un ensemble D, on note $f(D) = \{f(x), x \in D\}$.

Exemple : Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, nous avons : $f([0;\ 1]) = \ldots$, $f([-1;\ 1]) = \ldots$, $f(]-1;\ 1]) = \ldots$, $f([2;\ +\infty[) = \ldots$.

1.3 Opérations sur les fonctions

DÉFINITION :

Étant données deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on appelle :

1. Somme de f et g la fonction, notée $f+g$, telle que $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$;
2. Produit de f et g la fonction, notée fg, telle que $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$;
3. Composée de g par f la fonction, notée $f \circ g$, telle que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Exemples :

(1) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $(f - 3g)(x) = \ldots$;

(2) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $(fg)(x) = \ldots$;

(3) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $(f \circ g)(x) = \ldots$, $(g \circ f)(x) = \ldots$;

(4) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -x^2$, $(f \circ g)(x) = \ldots$, $(g \circ f)(x) = \ldots$.

REMARQUES :

(1) Pour le dernier exemple ci-dessus, on remarque que $f \circ g$ est une fonction qui n'est pas définie, alors que $g \circ f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On retiendra la chose suivante : pour que $f \circ g$ ait un sens, c'est à dire soit définie sur un ensemble D, il faut que l'image de D par g soit incluse dans le domaine de définition de f : $g(D) \subset \mathcal{D}_f$;

(2) Le produit et la somme de fonctions commutent, par contre $f \circ g \neq g \circ f$ en toute généralité ;

(3) La fonction qui à tout réel x associe x est appelée fonction identité et est notée *id*.

1.4 Courbe représentative d'une fonction

DÉFINITION :

Soit $\mathcal{R} = (0;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct. On appelle courbe représentative de f l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x;\ f(x))$ dans $\mathcal{R}$.

Exemples :

(1) courbe représentative de la fonction identité ;

(2) courbe représentative de la fonction racine carré ;

(3) courbe représentative de la fonction inverse ;

(4) fonction dont la courbe représentative est affine par morceaux ;

(5) courbe représentative de la fonction qui vaut 0 partout sauf 1 en 0.

1.5 Symétries de la courbe de représentative

DÉFINITION :

Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est :

1. paire lorsque : $\begin{cases} \text{(i) } \forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{(ii) } \forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x) \end{cases}$;
2. impaire lorsque : $\begin{cases} \text{(i) } \forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{(ii) } \forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

PROPOSITION :

1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine de repère.

illustrations graphiques

1.6 Sens de variation d'une fonction

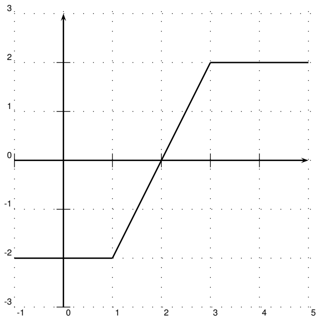
DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D si : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D si : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
3. croissante sur D si : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
4. décroissante sur D si : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
5. strictement monotone sur D si f est strictement décroissante ou strictement croissante sur D ;
6. monotone sur D si f est croissante ou décroissante sur D.

Exemples :

(1) La fonction dont la courbe représentative est :



est croissante mais n'est pas strictement croissante.

(2) La fonction racine carré est ...;

(3) La fonction carrée est ...;

(4) La fonction inverse n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$. Elle est par contre strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$

PROPOSITION :

1. Si f est strictement croissante sur D, alors $\forall (x;\ y) \in D^2$:
   - $f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow x \leq y$;
   - $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$;
   - $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
2. Si f est strictement décroissante sur D, alors $\forall (x;\ y) \in D^2$:
   - $f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow x \geq y$;
   - $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x > y$;
   - $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Exemples :

(1) La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc quels que soinet les réels strictement positifs a et b, $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$;

(2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$, donc pour a et b strictement positifs, $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2 Dérivée d'une fonction

Estimation : 3h
Durée : 2h15

2.1 Tangente d' une courbe représentative en un point

DÉFINITION :

Soient f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et $M_t(t, f(t))$ un point de $\mathcal{C}_f$ différent de $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$. On appelle corde de $\mathcal{C}_f$ passant par M_{x_0} et M le segment de droite $[M_{x_0}M_t]$.

illustrations graphiques

PROPOSITION :

En reprenant les notations précédentes, l'équation réduite de la droite $(M_{x_0}M_t)$ est $y = \tau_{x_0}(t)x + f(x_0)$, avec $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$.

DÉFINITION :

1. Le nombre $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ est appelé taux d'accroissement de f en x_0 ;
2. On appelle tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0, lorsqu'elle existe, la droite T_{x_0} vers laquelle $(M_{x_0}M_t)$ tend quand t tend vers x_0.

Exemples :

(1) $f(x) = x^2$ en 0 ;

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 ;

(3) $f(x) = |x|$ en 0.

La courbe représentative d'une fonction n'admet pas forcément de tangente en un point !!

2.2 Fonction dérivée

La notion de dérivabilité en un point correspond exactement à la notion de tangente **NON VERTICALE** en ce dernier. D'après la sous-section précédente, ceci correspond à l'existence d'une limite pour le taux d'accroissement.

DÉFINITION :

Soit f une fonction réelle.

1. On dit que f est dérivable en $x_0 \in D$ lorsque $\tau_{x_0}(t)$ admet une limite quand t tend vers x_0. On note alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ et on appelle ce réel le nombre dérivé de f en x_0 ;
2. On définit ainsi une fonction, notée f', qui à tout réel x associe le nombre dérivé $f'(x)$.

REMARQUES :

(1) $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 (en effet, $\tau_0(t) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = 1\sqrt{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$). Elle admet par contre une tangente verticale en 0 ;

(2) Si f est dérivable en x_0, alors f admet une tangente en ce point d'équation réduite : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exemples :

(1) Dérivée de la fonction constante égale à 1 ;

(2) Dérivée de la fonction identité.

2.3 Calcul des dérivées

PROPOSITION :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si de plus g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
4. Si de plus φ est dérivable sur D' et telle que $f \circ \varphi$ ait un sens, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur D. De plus : $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi''(x) \times f'(\varphi(x))$.

Exemples :

(1) $f(x) = x^2$. Alors $f'(x) = \ldots$ (on utilise le produit) ;

(2) $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = \ldots$. En particulier $f'(0) = \ldots$.

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $f'(x) = \ldots$ (on utlise le quotient) ;

(4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors $f'(x) = \ldots$ (on utilise le quotient)

(5) $f(x) = x^3 + x + 1$

(6) $f(x) = e^{\varphi(x)}$. Alors $f'(x) = \ldots$ (on utilise la composition) ;

PROPOSITION : (dérivées des monômes et de la fonction racine)

1. Si $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, alors f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f'(x) = nx^{n-1}$;
2. Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors f est dérivable sur $D =]0;\ +\infty[$ et pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.4 Dérivée et sens de variation

PROPOSITION :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$.
2. f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$.
3. $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante.
4. Si $f' > 0$ à l'intérieur de I, alors f est strictement croissante.
5. Si $f' < 0$ à l'intérieur de I, alors f est strictement décroissante.

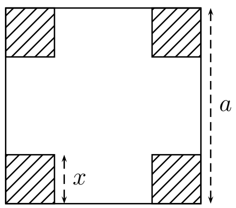
REMARQUES :

(1) Une fonction n'est pas strictement croissante si et seulement $f' > 0$ (nous n'avons donc pas équivalence au 4.) Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$;

(2) Pour les mêmes raisons, nous n'avons pas équivalence au 5.) ;

(3) Les résultats précédents ne s'appppliquent pas si I n'est pas un intervalle. Par exemple, $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle) et $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$. Pourtant, f n'est pas décroissante sur R^*.

2.5 Exemple d'application : le problème de la boîte



Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on dispose d'une feuille carrée (en carton) dont le côté est de longueur a ($a \neq, 0$). À chacun des quatre angles, on découpe un carré de longueur x et on rabat les quatre angles perpendiculairement. On cherche x pour obtenir une boîte de volume maximal.

3 Fonctions usuelles associées à la fonction logarithme

Estimation : 3h
Durée : 3h30+ ?

3.1 Fonction logarithme

DÉFINITION :

On appelle logarithme Népérien, et on note ln, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

REMARQUES :

(1) la fonction ln est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$;

(2) la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$. De même si l'on remplace l'égalité par des inégalités.

PROPOSITION : (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;

REMARQUES :

(1) D'après ci-dessus, $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = 2\ln(a)$. De même, $\ln(a^{-2}) = \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = -\ln(a^2) = -2\ln(a)$. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$;

(2) $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Si $a < 0$ et $b < 0$, $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$.

Exemples :

(1) Expression de $\ln(72)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

(2) Expression de $\ln\left(\frac{4}{27}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

(3) Résolution de $\ln(x+2) = 2\ln(x)$.

PROPOSITION : (Inégalité fondamentale du logarithme)

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

REMARQUES :

(1) L'inégalité précedente se réecrit aussi $\ln(x) \leq x - 1$ pour $x > 0$;

(2) La tangente en $x = 1$ a pour équation réduite $y = x - 1$. Géométriquement, l'inégalité précédente se traduit donc comme ceci : la courbe représentative de la fonction logarithme est située en-dessous de sa tangente en 1.

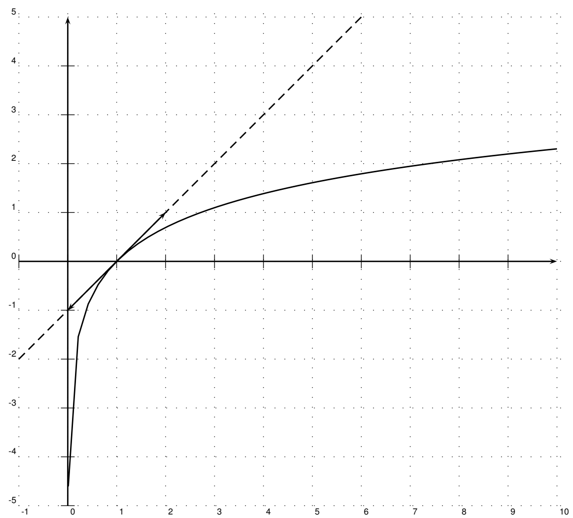


FIG. 1 – courbe représentative de la fonction ln

PROPOSITION : (limites au bords du logarithme)

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

3.2 Fonction exponentielle

DÉFINITION :

1. On appelle nombre d'Euler, noté e, l'unique nombre réel tel que $\ln(e) = 1$;
2. Plus généralement, l'équation de paramètre x : $\ln(u) = x$ admet une unique solution notée e^x (ou encore $\exp(x)$. La fonction, notée exp, qui à tout réel x associe e^x est appelée fonction exponentielle.

REMARQUES :

(1) Une valeur approchée de e est $e \approx 2,7181828$;

(2) Nous avons, avec les notations introduites, $e = e^1$;

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

Exemples :

(1) $\ln(u) = 0$ admet une unique solution : ....

(2) Pour tout réel x, $\ln(e^x) = \ldots$;

(3) Pour tout réel x, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$. Nous avons donc l'égalité : $e^{\ln(x)} = x$.

PROPOSITION : (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;

REMARQUES :

(1) D'après ci-dessus, nous avons $e^{2a} = e^{a+a} = (e^a)^2$;

(2) Nous avons aussi, $e^{-2a} = \dfrac{1}{e^{2a}} = \left(\dfrac{1}{e^a}\right)^2 = (e^a)^{-2}$;

(3) Plus généralement, nous avons pour $n \in Z$, $e^{na} = (e^a)^n$.

PROPOSITION : (dérivée de la fonction exponentielle)

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\exp)'(x) = \exp(x)$;
2. Pour tout réel x, $e^x \leq 1 + x$.

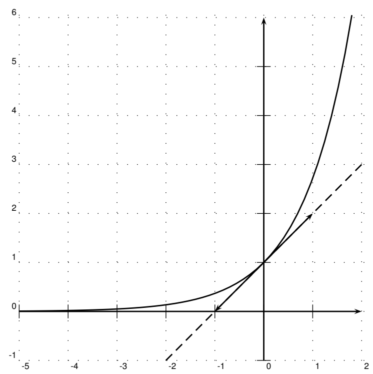


FIG. 2 – courbe représentative de la fonction exp

REMARQUES :

(1) La tangente en 0 a pour équation réduite : $y = x + 1$. L'inégalité précédente se traduit géométriquement comme ceci : la courbe treprésentative de l'exponentielle est située au-dessus de sa tangente en 0.

(2) La courbe représentative de la fonction logarithme et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation réduite $y = x$.

PROPOSITION : (limites au bords de la fonction exponentielle)

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

3.3 Fonctions hyperboliques

⇨ <u>les fonctions cosinus et sinus hyperboliques</u>

<u>DÉFINITION</u> :

On appelle :

1. fonction cosinus hyperbolique, et on note ch, la fonction définie par $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
2. fonction sinus hyperbolique, et on note sh, la fonction définie par $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

REMARQUES :

(1) L'exponentielle étant toujours positive, nous avons pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x) \geq 0$;

(2) $\mathrm{sh}(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies sur $\mathbb{R}$. Étant chacune la somme de deux fonctions dérivables, elles sont dérivables .

Fonction	cosinus hyperbolique ch	sinus hyperbolique sh
Dérivée	$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$	$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
Parité	paire	impaire
Valeurs particulières	$\mathrm{ch}(0) = 1$	$\mathrm{sh}(0) = 0$
Tangente en 0	$y = 0$	$y = x$

Leur tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	1	$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

a)

b)

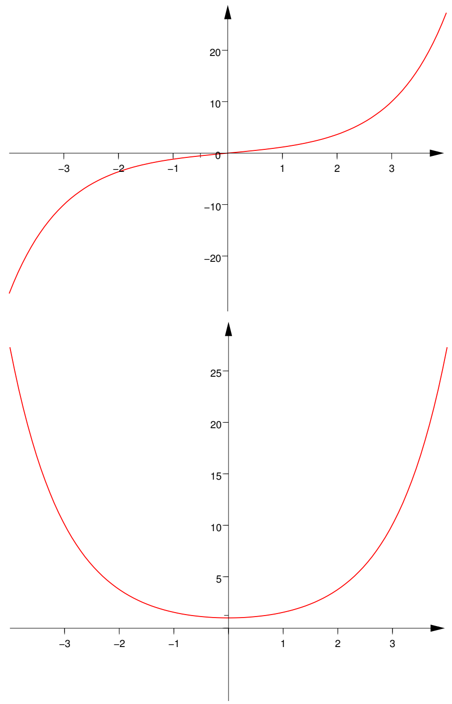


Fig. 3 – a) Courbe représentative de la fonction sh. **b) Courbe représentative de la fonction** ch.

PROPOSITION : (limites au bord)

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x)= +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x)= +\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x)= -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)= +\infty$.

PROPOSITION : (propriétés algébriques)

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) &= e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) &= e^{-x} \\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

⇨ <u>la fonction tangente hyperbolique</u> :

DÉFINITION :

On appelle fonction tangente hyperbolique, et on note th, la fonction définie par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

PROPOSITION :

La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

REMARQUES :

(1) $\forall x > 0$, $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$;

(2) $\forall x > 0$, $1 - \mathrm{th}^2(x) = \mathrm{th}'(x) > 0$, ainsi : $\mathrm{th}^2(x) < 1 \Rightarrow |\mathrm{th}(x) = \sqrt{\mathrm{th}^2(x)} < \sqrt{1} = 1$. Nous avons donc l'encadrement : $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$.

Le tableau de variation de la fonction tangente hyperbolique est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$+$	0	$+$	
$\mathrm{th}(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

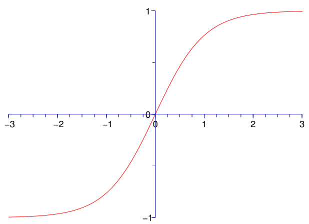


FIG. 4 – Courbe représentative de th.

REMARQUES :

(1) L'équation de la tangente en 0 est $y = x$;

(2) La courbe représentative de la fonction th admet deux asymptotes horizontales : $D : y = 1$ et $D' : y = -1$.

3.4 Fonction exponentielle de base a

DÉFINITION :

Soit a un réel strictement positif. L'application $x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$ est appelée fonction exponentielle en base a .

REMARQUES :

(1) $a^0 = \ldots$;

(2) $a^1 = \ldots$;

(3) $1^x = \ldots$.

L'étude de cette fonction dépend bien sûr du paramètre a :

PROPOSITION :

Soit $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \ln(a)a^x$. Les variations selon les valeurs de a sont donnée par le tableau suivant :

paramètre	$0 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
Variation	strictement décroissante	constante	strictement croissante

démonstration.

- Le réel $a^x = \exp(x \ln(a))$ est défini pour tous les réels x.
- La fonction $x \mapsto a^x$ est la composée de deux fonctions dérivables : $x \mapsto x\ln(a)$ et $x \mapsto \exp(x)$. Elle est donc dérivable.
- La dérivée de cette fonction composée est $(x\ln(a))' \times \exp'(x\ln(a)) = \ln(a)\exp(x\ln(a)) = \ln(a)a^x$.

- Les variations sont obtenues en étudiant le signe de la dérivée ce qui revient à l'étude du signe de $\ln(a)$.

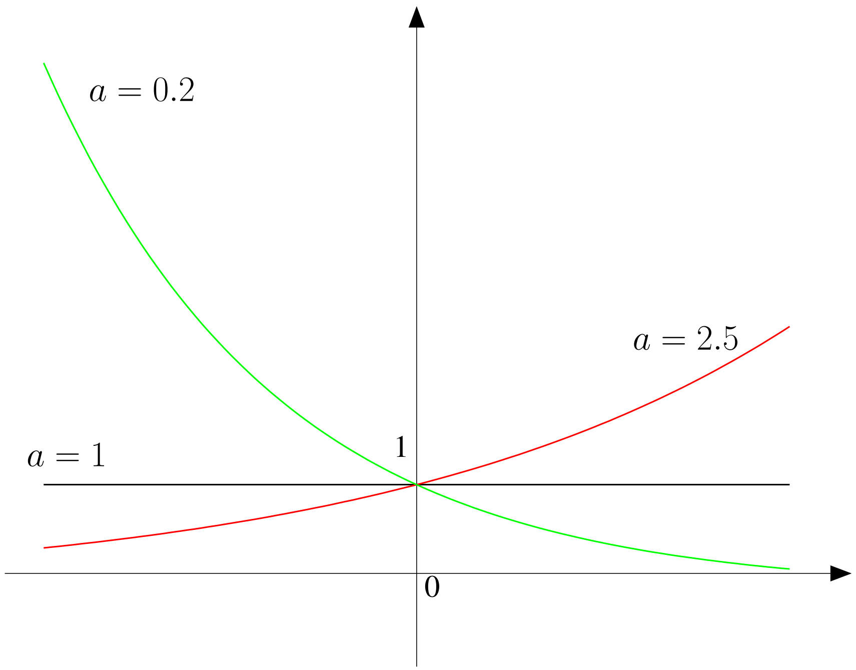


FIG. 5 – Courbes représentatives de $x \mapsto (0,2)^x$, $x \mapsto (2,5)^x$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto (\frac{1}{a})^x$ sont symétriques par rapport à l'axe (Oy).

PROPOSITION : (limites au bord)

1. Si $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$;
2. Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0^+$.

PROPOSITION : (propriétés algébriques)

Soient x et y deux réels quelconques et a et b deux réels strictement. Alors :

1. $a^{x+y} = a^x a^y$;
2. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
4. $\ln(a^x) = x\ln(a)$;
5. $(a^x)^y = a^{xy}$;
6. $(ab)^x = a^x b^x$.

3.5 Fonction puissance

REMARQUE : Si $n \in Z$, nous avons pour $e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n$. Ceci motive la définition suivante :

DÉFINITION :

Soit α un réel. La fonction appelée puissance d'exposant α est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}$$

Exemples :

(1) $1^\alpha = \ldots$;

(2) $x^0 = \ldots$;

(3) $x^1 = \ldots$.

Il ne faut pas penser que x^α est égal à $\underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$, cette dernière quantité ne voulant rien dire lorsque α n'est pas un entier.

PROPOSITION :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, x \mapsto x^{\alpha}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable, de dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$. Les variations selon les valeurs de α sont données par le tableau suivant :

Paramètre	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
Variation	strictement décroissante	constante	strictement croissante

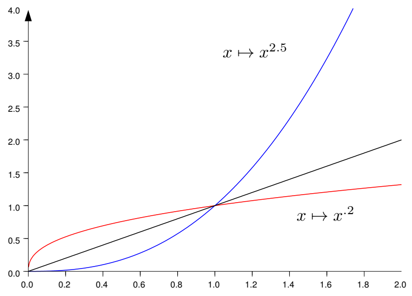


FIG. 6 – Courbes représentatives de $x \mapsto x^{2,5}, x \mapsto x^{0,2}$.

PROPOSITION : (limites au bord)

1. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$;
2. Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

$\star$

$\star \quad \star$

$\star \quad \star \quad \star$

Fonctions réelles

Exercice 1 : Déterminer le domaine de définition, puis calculer les dérivées des fonctions suivantes sous la forme la plus factorisée possible :

(a) $(2x^2 - x - 1)^6$; (b) $(x-2)(x^2-4)^2(x^3-8)^3$; (c) $2x + 1 - \dfrac{3}{(x-2)^3}$;

(d) $\dfrac{x^5 + x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2-1)^2}$; (e) $\sqrt{x^3 - 3x + 2}$; (f) $x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(g) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; (h) $\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$; (i) $\ln(x^2 + 3x)$;

(j) $\sqrt{1 - \ln(x)}$; (k) $\ln\left(\dfrac{e^{1/x}}{e^{1/x} - 1}\right)$; (l) $\text{th}(x^2 - 1)$.

Exercice 2 : Résoudre les équations ou inéquations ci-dessous :

(a) $\ln(2x^2 + 1) - 1 = \ln(2x + 1)$; (b) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$;

(c) $\ln(x) + \ln(x + 3) = 2\ln(2)$; (d) $\ln(x + 1) + \ln(x - 3) = 2\ln(x - 2)$;

(e) $\ln(x) + \ln(x^2 - 5) > \ln 2 + \ln(x^2 - 3)$; (f) $e^x - 4e^{-x} = 1$;

(g) $2e^x = e^{x^2}$; (h) $e^{-2x} \geq \frac{1}{2}$;

(i) $e^x \geq e^{2x} - 1$; (j) $e^x < \frac{1}{4}e^{x^2}$;

(k) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)},\ a > 0$; (l) $\dfrac{\ln(x)}{\ln 3} - \dfrac{\ln(x)}{\ln 2} = 1$;

(m) $\text{sh}(x) = 2$; (n) $\text{sh}(\text{u}) = x, x \in \mathbb{R}$;

(o) $(1 + m)\text{ch}(x) + (1 - m)\text{sh}(x) = -2,\ m \in]-1;\ 1[$.

Exercice 3 : Résoudre les équations ci-dessous :

(a) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$; (b) $2^{x^3} = 3^{x^2}$; (c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

Exercice 4 : Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} a^5b^2 = 2033647 \\ a^3b^3 = 456533 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} e^ae^b = 1 \\ e^{ab} = \frac{1}{e^2} \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 2\dfrac{\ln(y)}{\ln(x)} + 2\dfrac{\ln(x)}{\ln(y)} = -5 \\ xy = e \end{cases}$; (d) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$.

Exercice 5 : Déterminer les tableaux de variations (sans préciser les limites aux bords des fonctions ci-dessous) :

(a) $f(x) = x^3 - x - 6$;

(b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 24x + 2$;

(c) $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-1}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-3}$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{8}{x+1}$;

(f) $f(x) = \ln(x) - \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$;

(g) $f(x) = \ln(1+x^2)$;

(h) $f(x) = x\ln(x+1)$;

(i) $f(x) = x\dfrac{\ln(x)}{x-1}$;

(j) $f(x) = xe^{-x}$;

(k) $f(x) = x^x$;

(l) $f(x) = x^{1/x}$;

(m) $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$;

(n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$, $a \in \mathbb{R}^*$;

(o) $f(x) = x\ln\left(e^{\sqrt{x}} + 1\right)$;

(p) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\text{sh}(x)}{1-\text{sh}(x)}\right)$;

(q) $f(x) = \dfrac{\text{ch}(x)+1}{2\text{ch}(x)+1}$;

(r) $f(x) = x^{\ln(x)}$;

(s) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$;

(t) $f(x) = \ln(\text{ch}(x))$;

(u) $f(x) = \text{th}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Exercice 6 :

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
2. Montrer que : $\forall x < 1,\ e^x < \dfrac{1}{1-x}$.
3. Déduire des questions précédentes : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, puis une valeur approchée de e à 10^{-4} près, sachant que $e \leq 3$.

Exercice 7 : Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. Montrer que :

$$\forall x > 0, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b.$$

(*on pourra étudier la fonction* $f(x) = ae^{-bx} - be^{-ax} - a + b$...)

Exercice 8 :

1. Exprimer $\text{ch}(x+y)$ et $\text{sh}(x+y)$ en fonction de $\text{ch}(x), \text{sh}(x), \text{ch}(y)$ et $\text{sh}(y)$.
2. En déduire $\text{ch}(x-y)$ et $\text{sh}(x-y)$ en fonction de $\text{ch}(x), \text{sh}(x), \text{ch}(y)$ et $\text{sh}(y)$, puis les formules :
$$\text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 2\text{ch}\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\text{ch}\left(\tfrac{x-y}{2}\right);$$
$$\text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 2\text{sh}\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\text{ch}\left(\tfrac{x-y}{2}\right).$$
3. Résoudre le système :
$$\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{ch}(y) = \frac{35}{12} \\ \text{sh}(x) + \text{sh}(y) = \frac{25}{12} \end{cases}.$$

Exercice 9 : Pour $a \in \mathbb{R}$, donner le tableau de variations de la fonction définie par $f(x) = \text{sh}(x) - 2x - a$. Pour quelles valeurs de a la fonction f admet-elle un maximum strictement positif ?

---

3. Nombres complexes et trigonométrie

Table des matières

1 Le corps des nombres complexes **2**
1.1 Présentation 2
1.2 Opérations algébriques 3
1.3 Conjugué d'un nombre complexe 4
1.4 Module d'un nombres complexe 4
1.5 Trinôme du second degré à coefficients complexes 5

2 Trigonométrie **7**
2.1 Le cercle trigonométrique 7
2.2 Fonctions trigonométriques 8
2.3 Formulaire de trigonométrie 13
2.4 Exemples simples d'équations et inéquations trigonométriques . 15

3 L'exponentielle complexe **16**
3.1 Exponentielle d'un nombre complexe 16
3.2 Formules associées 17
3.3 Forme trigonométrique et argument d'un nombre complexe . . . 18
3.4 Applications à la trigonométrie 19

Nombres complexes et trigonométrie

$\leadsto$ 12h

1 Le corps des nombres complexes

Estimation : 2h
Durée : 3h30

1.1 Présentation

(a) aperçu historique
L'histoire des nombres a su mettre en évidence la dualité entre équations algébriques et géométrie :

Équation algébrique	Problème géométrique
Résoudre $3x = 1$	partager un segment de longueur 1 en 3 segments de même longueur
Résoudre $x^2 = 2$	dans un triangle rectangle isocèle de côté 1, calculer la longueur de l'hypoténuse
Résoudre $x^2 = -1$	?

Le gros effort aura donc été d'accepter qu'en absence « apparente »de réalité géométrique, l'équation $x^2 = -1$ admet une solution, que l'on note i, et que l'on appelle nombre imaginaire.

La première apparition formelle d'un tel nombre remonte au 16ème siècle dans le but d'exprimer simplement les solutions de l'équation du troisième degré : $x^3 + px + q = 0$ en fonction de p et q.

Par exemple, il est possible de ramener la résolution de l'équation $x^3 -$

$15x - 4 = 0$ (1) à l'équation du second degré $X^2 - 4X + 125 = 0$ (2). Cependant, 4 est solution de (1) alors que (2) n'a pas de solutions réelles !!!! Pour lever la contradiction, on est obligé de chercher des solutions non réelles de (2)

(b) définitions

DÉFINITION :

1. On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $z = a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i tel que $i^2 = -1$ (c'est à dire i solution de l'équation $x^2 = -1$). On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes ;
2. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle : $\begin{array}{l} a \text{ la partie réelle de } z, \text{ notée } \mathcal{R}e(z) \\ b \text{ la partie imaginaire de } z, \text{ notée } \mathcal{I}m(z) \end{array}$;
3. L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z ;
4. Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles ET imaginaires sont égales.

REMARQUES :

(1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0$;

(2) Les nombres complexes tels que $\mathcal{R}e(z) = 0$ sont appelés nombres imaginaires purs.

1.2 Opérations algébriques

On étend naturellement (associativité, distributivité) les opérations algébriques réelles. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' = ib'$ deux nombres complexes, on définit :

(a) la somme $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;

(b) produit $\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' - ib') \\ &= aa' - aib' + ib'a + (ib) \times (ib') \\ &= aa' + i(ab' - a'b) - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' - a'b) \end{aligned}$;

(c) l'inverse (pour $z \neq 0$) $\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a+ib} \\ &= \frac{1 \times (a - ib)}{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \end{aligned}$.

On vérifie par ailleurs que la somme et le produit sont encore commutatifs : $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION :

Pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on appelle conjugué de z, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe : $\overline{z} = a - ib$.

PROPOSITION : (propriétés de la conjugaison)

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$;
   $z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$
2. $z\overline{z} = a^2 + b^2$ ($z\overline{z}$ est un réel positif) ;
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
   $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$.

REMARQUES :

(1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$;

(2) z imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$;

(3) $\overline{z^2} = \overline{z}^2$ et plus généralement $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;

(4) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ et plus généralement $\overline{\frac{1}{z^n}} = \frac{1}{\overline{z}^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.4 Module d'un nombres complexe

DÉFINITION :

Pour $z = a+ib$, on appelle module de z le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Exemples :

(1) $|i| = \ldots$;

(2) $|-1| = \ldots$.

PROPOSITION : (propriétés du module)

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
2. $|\overline{z}| = |z|$;
3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. $|\mathcal{R}e(z)| \leq |z|$.
   $|\mathcal{I}m(z)| \leq |z|$

1. Nous n'avons pas par contre pour tous nombre complexe z et z', $|z + z'| = |z| + |z'|$;
2. L'équivalence $|z| = |z'| \Leftrightarrow z = z'$ est complètement fausse, cf. exemples précédents.

REMARQUES :

(1) $|z^2| = |z|^2$ et plus généralement $|z^n| = |z|^n$ pour $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et plus généralement $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{1}{|z|^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Le module de $(1+2i)^6$ est égal à ....

1.5 Trinôme du second degré à coefficients complexes

(a) L'équation $z^2 = Z$: on pose $Z = a + ib$ et on cherche tous les $z = x + iy$ tels que $z^2 = Z$. La résolution se fait en trois étapes :

- On identifie les formes algébriques : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. Ainsi : $z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$;
- $z^2 = Z \Rightarrow |z^2| = |Z|$, ce qui donne la relation supplémentaire $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$

PROPOSITION :

Si $Z \neq 0$ L'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions complexes opposées : w et $-w$.

Exemples :

(1) Résoudre $z^2 = 3 - 4i$;

(2) Résoudre $z^2 = 3 + 4i$.

(b) L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$.

➩ Solutions :

PROPOSITION :

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant du trinôme $T = az^2 + bz + c$. Alors

1. Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z = -\frac{b}{2a}$;
2. Si $\Delta \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $z_1 = \dfrac{-b+w}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-w}{2a}$, où w est une solution (quelconque) de $z^2 = \Delta$.

Exemples :

(1) Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$;

(2) Résoudre $z^2 + \sqrt{3}z + i = 0$.

Remarque : Si les coefficients du trinôme sont réels avec $\Delta < 0$, alors les solutions complexes sont conjuguées.

➩ Relations entre coefficients et solutions :

PROPOSITION :

(a) Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation (non necessairement distinctes) $az^2 + bz^2 + c = 0$, alors $\boxed{z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}}$;

(b) Réciproquement, si l'on connaît la somme S et le produit S de deux nombres complexes z_1 et z_2, alors z_1 et z_2 sont solutions de l'équation : $z^2 - Sz + P = 0$.

Exemples :

(1) Déterminer toutes les solutions de $z^2 + (1-4i)z + 3 - i$ sachant que i est solution.

(2) Résolution de $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_1 z_2 = 1 \end{cases}$

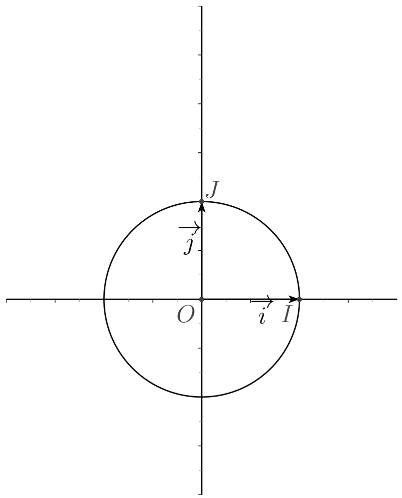
2 Trigonométrie

Estimation : 2h30
Durée : 4h30

2.1 Le cercle trigonométrique

DÉFINITION :

> On se place dans le plan orienté muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans le sens inverse des aiguilles d'un montre. On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.



PROPOSITION : (Enroulement et déroulement de la droite des réels)

1. À tout réel x correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique ;
2. À tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels, mais un unique réel $\theta_0 \in]-\pi;\ \pi]$, appelé mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$. Tous les autres réels associés au même point sont de la forme $\theta_0 + 2k\pi$.

Exemples :
(1) L'image de $\frac{\pi}{2}$ est J ;
(2) L'image de 0 est I ;
(3) L'image de 4π est I ;
(4) Mesure principale de $\frac{77\pi}{3}$.

2.2 Fonctions trigonométriques

(a) La fonction cosinus :

DÉFINITION :

> Soit x un nombre réel et M le point associé à x par le procédé d'enroulement. On appelle cosinus de x, et on note $\cos(x)$ l'abscisse de M. On définit ainsi une fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et que l'on appelle fonction cosinus.

Exemples :
(1) $\cos(0) = \ldots$;
(2) $\cos(\frac{\pi}{2}) = \ldots$;
(3) $\cos(\frac{-\pi}{2}) = \ldots$;
(4) $\cos(3\pi) = \ldots$;

PROPOSITION : (propriétés algébriques)

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ (2π périodicité) ;
3. $\cos(-x) = \cos(x), \cos(\pi - x) = -\cos(x), \cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

(b) La fonction sinus :

DÉFINITION :

> Soit x un nombre réel et M le point associé à x par le procédé d'enroulement. On appelle sinus de x, et on note $\sin(x)$ l'ordonnée de M. On définit ainsi une fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et que l'on appelle fonction sinus.

Exemples :

(1) $\sin(0) = \ldots$;

(2) $\sin(\frac{\pi}{2}) = \ldots$;

(3) $\sin(\frac{-\pi}{2}) = \ldots$;

(4) $\sin(3\pi) = \ldots$;

PROPOSITION :

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ (2π périodicité) ;
3. $\sin(-x) = -\sin(x), \sin(\pi - x) = \sin(x), \sin(\pi + x) = -\sin(x)$;
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

(c) Représentations graphiques de cos et sin.

PROPOSITION : (dérivées de cos et sin)

(a) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$;

(b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$;

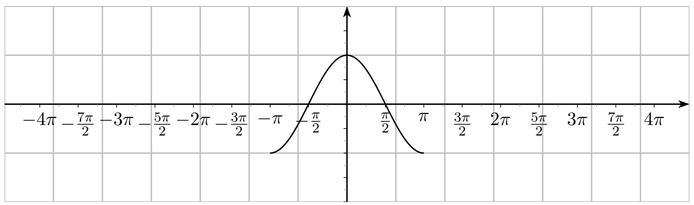


FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction cos.

REMARQUES :

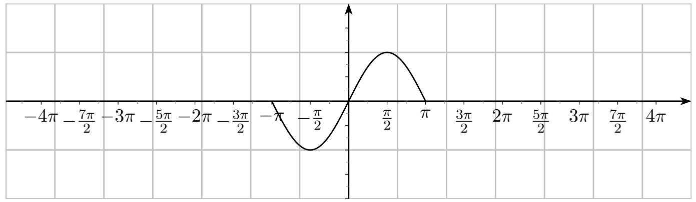


FIG. 2 – Représentation graphique de la fonction sin.

(1) La fontion cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ;

(2) Les courbes représentatives de ces deux fonctions s'obtiennent l'une de l'autre par une translation de $\frac{\pi}{2}$ et sont appelées sinusoïdes ;

(3) L'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représenttaive de
la fonction cosinus est $y = 1$;
la fonction sinus est $y = x$.

(d) Fonction tangente :

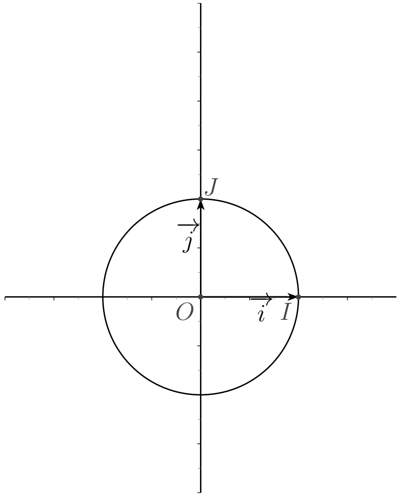
DÉFINITION :

> On appelle fonction tangente, et on note tan, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

REMARQUES :

(1) Le domaine de définition de la fonction tangente est : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

(2) Interprétation géométrique de la tangente :



PROPOSITION : (propriétés algébriques)

> Pour tout réel x, nous avons les relations :
> 1. Pour tout entier relatif k, $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$ (π périodicité) ;
> 2. $\tan(-x) = -\tan(x), \tan(\pi - x) = -\tan(x), \tan(\pi + x) = \tan(x)$;

PROPOSITION : (dérivée de la fonction tangente)

> La fonction tangente est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et $\forall x \in D, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

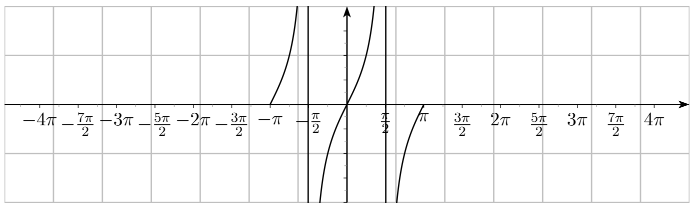


FIG. 3 – Représentation graphique de la fonction tan.

REMARQUES :

(1) La fonction tangente est impaire, sa courbe représentative est donc

symétrique par rapport à l'origine du repère ;

(2) La tangente en 0 a pour équation réduite : $y = x$.

(e) fonctions périodiques :

DÉFINITION :

> Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est T-périodique (ou périodique de période T) sur D lorsque :
> (i) $\forall x \in D, x + T \in D$;
> (ii) $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$.

Exemples :

(1) La fonction $\cos(2t + \pi/3)$ est périodique de période ... ;

(2) La fonction $\cos(wt + \phi)$ est périodique de période $T = \ldots$.

(f) Valeurs remarquables : *à distribuer*

Exemples :

(1) Calcul de $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

(2) Calcul de $\tan\left(\frac{51\pi}{4}\right)$.

2.3 Formulaire de trigonométrie

formulaire à distribuer

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Formulaire de trigonométrie

Les formules encadrées sont à connaître par coeur, les autres doivent se retrouver très rapidement.

Relations fondamentales :

$$\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \quad 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

Formules d'addition :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\cos(2a) & = & \cos^2(a)-\sin^2(a)\\ & = & 2\cos^2(a)-1\\ & = & 1-2\sin^2(a)\\ \sin(2a) & = & 2\sin(a)\cos(a)\end{array}} \qquad \tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules de linéarisation :

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a)\cos(b)=\tfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\cos(a)\sin(b)=\tfrac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

$$\sin(a)\sin(b)=-\tfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

Transformations de sommes en produits :

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \qquad \cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$

Paramétrisation rationnelle du cercle :

Si $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors :

$$\cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(a)=\frac{2t}{1+t^2} \quad \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}$$

Pour s'aider à retenir le formulaire, nous allons donner quelques explications et astuces :

➩ Relations fondamentales :
- La première s'obtient par exemple à l'aide du théorème de Pythagore (faire une figure) ;
- Pour la deuxième, nous avons : $1+\tan^2(x) = 1+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

➩ Formules d'addition :
- La première et la troisième sont dures à retrouver mais toutes les autres formules en découlent ! ;
- La deuxième et la quatrième s'obtiennent en remplaçant b par $-b$ et en utilisant les propriétés usuelles des fonctions trigonométriques ;
- La formule $\tan(a+b)$ de démontre à l'aide de calculs algébriques usuels ;
- La formule $\tan(a-b)$ découle de la précédente en remplaçant b par $-b$.

➩ Formules de duplication :
- $\cos(2a) = \cos(a+a)$ et $\sin^2(a)+\cos^2(a) = 1\ldots$;
- $\sin(2a) = \sin(a+a)\ldots$
- $\tan(2a) = \tan(a+a)\ldots$

➩ Formules de linéarisation :
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1\ldots$;
- $\sin(2a) = 1 - 2\sin^2(a)\ldots$;
- $$\begin{array}{rl} \cos(a+b) & = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) & = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \hline & \text{on somme...} \end{array}$$
- on fait comme ci-dessus pour les formules restantes.

➩ Transformations de sommes en produits :
- On part de $\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$ puis on pose $a-b=p$ et $a+b=q\ldots$
- on fait comme ci-dessus pour les formules restantes.

➩ Paramétrisation rationnelle du cercle : *démonstration à faire en cours*

2.4 Exemples simples d'équations et inéquations trigonométriques

Les fonctions cosinus, sinus et tangentes n'étant pas strictement monotones, nous n'avons pas en toutes généralités les équivalences $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x = y$ etc...

(a) Équations :

On utilisera régulièrement les caractérisations suivantes :

PROPOSITION :

1. $\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow U = V[2\pi]$ ou $U = -V[2\pi]$;
2. $\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow U = V[2\pi]$ ou $U = \pi - V[2\pi]$;
3. $\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V[\pi]$.

Exemples :

(1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$;

(2) $\cos(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(3) $\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

(b) Inéquations :

Exemples :

(1) $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$;

(2) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

3 L'exponentielle complexe

Estimation : 4h30
Durée : 4h

3.1 Exponentielle d'un nombre complexe

DÉFINITION :

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$;
2. Si $z = a+ib$ est la forme algébrique de z, on note $e^z = e^a \times e^{ib}$, où e^a reprèsente l'exponentielle réelle.

Exemples :

(1) $e^{i\pi} = \ldots$;

(2) $e^{\ln(2)+i2\pi} = \ldots$;

(3) $e^{1+i} = \ldots$.

REMARQUES :

(1) L'exponentielle complexe d'un nombre réel coincide avec l'exponentielle réelle d'un nombre réel ;

(2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$;

(3) $|e^z| = e^a = e^{\mathcal{R}e(z)}$;

(4) quel que soit le nombres complexe z, $e^z \neq 0$.

PROPOSITION : (propriétés de l'exponentielle)

1. exponentielle d'un produit
   - Pour θ et θ' deux nombres réels, nous avons : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$;
   - Pour z et z' deux nombres complexes, nous avons $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
2. conjugué de l'exponentielle
   - Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
   - Pour $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
3. inverse de l'exponentielle
   - Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons : $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta}$;
   - Pour $z \in \mathbb{C}$, nous avons $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

3.2 Formules associées

PROPOSITION : (Formules d'Euler)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons : $\boxed{\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array}}$

PROPOSITION : (Formule de De Moivre)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous avons : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, ce qui s'écrit encore : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

3.3 Forme trigonométrique et argument d'un nombre complexe

PROPOSITION :

1. Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
2. De plus, une telle écriture est unique à 2π près, c'est à dire, pour $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, θ_1 et θ_2 deux réels, nous avons :

$$z = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 [2\pi] \end{cases}.$$

REMARQUES :

(1) Nous avons donc unicité de l'écriture en imposant $\theta \in]-\pi;\ \pi]$;

(2) Tout nombre complexe de module 1 s'écrit donc sous la forme $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION :

1. Pour $z \neq 0$, l'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée forme trigonométrique du nombres complexe z ;
2. Le réel θ de l'écriture ci-dessus est appelé argument de z.

Exemples :

(1) Forme trigonométrique de i ;

(2) Forme trigonométrique de -1 ;

(3) Forme trigonométrique de $\sqrt{3} + i$;

(4) Argument de $1 + i$;

(5) Expression simple de $(1 + i)^{42}$.

(6) Résoudre $z^3 = i$;

(7) Résoudre $e^z = i$.

PROPOSITION : (propriétés de l'argument)

Soient z et z' deux nombres complexes (non nuls) d'arguments respectifs θ et θ'. Alors :

1. Un argument de zz' est $\theta + \theta'$.
2. Un argument de z^{-1} est $-\theta$;
3. Un argument de $\overline{z}$ est $-\theta$
4. Un argument de $\frac{z}{z'}$ est $\theta - \theta'$.

conséquence : Pour $n \in \mathbb{Z}$, un argument de z^n est $n\theta$.

On dit **UN** argument, et non pas **L'** argument.

3.4 Applications à la trigonométrie

(a) linéarisation :

Principe : Se débarasser des facteurs dans une expression trigonométrique. On utilise pour ceci les formules d'Euler.

Exemples :

(1) linéarisation de $\sin^3(x)$;

(2) linéarisation de $\cos(x)\sin(x)$.

REMARQUE : Pour le dernier exemple, on aurait pu plus directement utiliser les formules de linéarisation du formulaire.

(b) délinéarisation :

Principe : Dans chaque terme de la somme, on exprime $\cos(px)$ et $\sin(px)$ par des puissances de p. On utilise ici la formule de De Moivre.

Exemples :

(1) Délinéariser $\cos(3x)$;

(2) Délinéariser $\cos(2x)$.

REMARQUE : Pour le dernier exemple, on aurait pu plus directement utiliser les formules de linéarisation du formulaire.

(c) équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$:

On suppose a et b non nuls simultanément, et on pose $z = a + ib$.

PROPOSITION :

Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(\theta)$.

démonstration. On écrit z sous forme trigonométrique : $z = re^{i\phi}(= a+ib)$. Par identifications, nous en déduisons : $a = r\cos(\phi)$ et $b = r\sin(\phi)$. L'expression s'écrit donc également : $r(\cos(x)\cos(\phi)+\sin(x)\sin(\phi)) = r\cos(\underbrace{x-\phi}_{\theta})$.

REMARQUES :

(1) $r = |z|$ ne dépend pas de x ;

(2) Par contre θ dépend de x.

Exemple : Résolution de $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$

Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 1 : Donner l'expression algébrique des nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } \overline{(1+2i)(3-5i)}\,; \quad \text{(b) } \frac{1}{-3-4i}\,; \quad \text{(c) } \frac{i+5}{(i+3)^2}\,; \quad \text{(d) } \left(\frac{2-3i}{1+7i}\right)^2; \quad \text{(e) } \left(\frac{(2+4i)^2}{1-i}\right)^{-1}.$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

(a) $z^2+1=0$; (b) $4z^2=10z+4$; (c) $z^2+z-(1+3i)=0$;

(d) $z^2+4z+1-4i=0$; (e) $z^2-(8+6i)z-38=0$; (f) $3z^2-(13-7i)z-17i=0$;

(g) $z^4+z^2-6=0$; (h) $(z^2+3z)^2+(3z+5)^2=0$; (i) $z^2-2\sin(\theta)z+1=0,\ \theta\in[0;\ \pi[$.

Exercice 3 : Comment faut-il choisir $m\in\mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2-(2+im)z-(1+im)=0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Exercice 4 : Déterminer une solution réelle puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\sin(2x)=\sin(x)$; (b) $\cos(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\sin(x)=\cos(x)$; (d) $-\cos(x)=\sin(3x)$;

(e) $\tan(3x-\pi/5)=\tan(x+4\pi/5)$; (f) $\sin(2x)(\sqrt{3}+2\sin(2x))=0$;

(g) $\cos^2(x)-\frac{3}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}=0$; (h) $\cos(2x)+\cos(x)=0$;

(i) $\cos(2x)-3\cos(x)+2=0$; (j) $\cos(2x)-\sin(x)=1$;

(k) $1+\sqrt{3}\sin(2x)-\cos(4x)=0$; (l) $\sqrt{3}\tan(x)+4\sin^2(x)=0$;

(m) $\sin(2x)+\sin(6x)=\sin(4x)$; (n) $6\cos(2x)-1=6\tan^2(x)$;

(o) $\sin(x)+\sin(2x)<\sin(3x)$; (p) $\sqrt{3-4\cos^2(x)}>1+3\sin(x)$.

Exercice 6 : Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } -\sqrt{3}+i\,; \quad \text{(b) } -1-i\,; \quad \text{(c) } 1-i\sqrt{3}\,; \quad \text{(d) } -3e^{7i\pi/8}\,; \quad \text{(e) } 2ie^{i\pi/3}\,; \quad \text{(f) } \frac{(1-i)^2}{1+i}.$$

Exercice 7 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } 2e^{\frac{-5i\pi}{6}}\ ; \quad \text{(b) } -3e^{3i\pi/4}\ ; \quad \text{(c) } e^{\frac{2002i\pi}{12}}\ ; \quad \text{(d) } -e^{\frac{50i\pi}{4}}\ ; \text{(e) } \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\ ; \quad \text{(f) } \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\ ;$$

2. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } (1+i)^{22}(1-\sqrt{3}i)^{18}\ ; \quad \text{(b) } \frac{(1+i)^{45}}{(1-i)^{31}}\ ; \quad \text{(c) } \frac{(\sqrt{3}-i)^{17}}{(-1+i\sqrt{3})^{31}}\ ; \quad \text{(d) } (i+1)^{45}+(i-1)^{45}.$$

Exercice 8 : Pour $a \in \mathbb{R}$, donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } z_1 = \cos(a) + i\sin(a); \quad \text{(b) } z_2 = \cos(a) - i\sin(a); \quad \text{(c) } z_3 = -\sin(a) + i\cos(a);$$

$$\text{(d) } z_4 = \sin(a) + i\cos(a); \quad \text{(e) } z_5 = -\sin(a) - i\cos(a); \quad \text{(f) } z_6 = -\cos(a) - i\sin(a).$$

Exercice 9 : On pose $z_1 = -(\sqrt{3}+i)$ et $z_2 = 1+i$. Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique, et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 10 :

1. **(factorisation par l'angle moitié)** Compléter les pointillés : $1+e^{i\theta} = \ldots e^{i\theta/2}$; $1-e^{i\theta} = \ldots e^{i\theta/2}$.
2. **(applications)**
   (i) Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{(a) } \frac{1-\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)}; \quad \text{(b) } \frac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta}-1}; \quad \text{(c) } (i+1)^n + (i-1)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

   (ii) Déterminer les nombres complexes de module 1 tels que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$\text{(a) } z^4+1=0; \qquad \text{(b) } z^4 - i = 0\ ; \qquad \text{(c) } e^z = i; \quad \text{(d) } e^{2z}+e^z+1=0;$$

$$\text{(e) } z^3 = -(2+i)^3; \quad \text{(f) } \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^3 = 1; \quad \text{(g) } z^2 = \overline{z}; \quad \text{(h) } 16z^3 = \overline{z}^7.$$

Exercice 12 : Déterminer les nombres complexes z et z' tels que :

$$\begin{cases} z+z' = 3+i \\ zz' = 2+6i \end{cases}; \begin{cases} z+z' = 4 \\ zz' = 4+2i \end{cases}; \begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}.$$

Exercice 13 : Linéariser les expressions suivantes :

$$\text{(a) } \cos^5(x); \text{ (b) } \sin^3(x)\cos^3(x); \text{ (c) } \sin^4(2x)\cos^2(x).$$

Exercice 14 :

1. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. En déduire $\cos(\pi/10)$.
2. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 15 : Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$$\text{(a) } 3\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = \sqrt{6}; \quad \text{(b) } \sqrt{2}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}; \quad \text{(c) } \tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos(x) + \sin(x) = -\tfrac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\text{(d) } 2\sin(x)+1 = \cos(x); \qquad \text{(e) } \cos(3x)+\sin(3x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{(f) } \sqrt{3}\cos(x)+\cos(3x) = \cos(x)+\sqrt{3}\sin(3x);$$

$$\text{(g) } \sqrt{3}\cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3}\sin^2(x) = \sqrt{2}.$$

---

4. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 Dérivation des fonctions à valeurs complexes 2
1.2 Vocabulaire 3
1.3 Équation complète et équation homogène 4
1.4 Principe de superposition 5

2 Cas de l'équation homogène **5**
2.1 Premier ordre 5
2.2 Second ordre 5

3 Équations avec second membre **8**
3.1 Équations avec seconds membres particuliers 8
3.2 Synthèse 8
3.3 Problème de Cauchy 9

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Année 2010-2011
Mathématiques TSI-1

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

$\rightsquigarrow$ 7h15

Sauf mentions contraires, toutes les fonctions considérées dans ce chapitre seront définies sur un ensemble que l'on notera D.

1 Généralités

Estimation : 2h
Durée : 2h30

1.1 Dérivation des fonctions à valeurs complexes

DÉFINITION :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on écrit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles.

1. On dit que f est dérivable sur D lorsque f_1 et f_2 sont dérivables sur D ;
2. On appelle fonction dérivée la fonction, notée f', telle que $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$ pour $x \in D$.

REMARQUES :

(1) Notant $f_1 = \mathcal{R}e(f)$, nous pouvons donc écrire $(\mathcal{R}e(f))'(x) = \mathcal{R}e(f'(x))$;

(2) De même,$(\mathcal{I}m(f))'(x) = \mathcal{I}m(f'(x))$.

Exemples :

(1) $f(x) = 1 + ix$. $f'(x) = \dots$;

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+ix}$. $f'(x) = \dots$.

PROPOSITION :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si de plus g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;
4. $\overline{f}$ est dérivable sur D et pour $x \in D$, $\overline{f(x)}' = \overline{f'(x)}$.
5. La fonction définie sur D par $h(x) = e^{f(x)}$ est dérivable sur D et $h'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

Exemples :

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+ix}$. $f'(x) = \ldots$ (cette fois-ci en utilisant le quotient) ;

(2) $f(x) = e^{ix}$, $f'(x) = \ldots$, $f''(x) = \ldots$;

(3) $f(x) = e^{ix^2}$, $f'(x) = \ldots$, $f''(x) = \ldots$;

(4) $f(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$. $f'(x) = \ldots$, $f''(x) = \ldots$.

1.2 Vocabulaire

DÉFINITION :

On appelle équation différentielle linéaire :

1. du premier ordre à coefficients constants toute équation de la forme : $ay'(x) + by(x) = g(x)$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ et g une fonction définie sur D ;
2. du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et g une fonction définie sur D.

REMARQUES :

(1) Les coefficients a, b, c sont appelés coefficients de l'équation différentielle ;

(2) g est appelé second membre de l'équation différentielle ;

(3) Si les coefficients et le second membre sont à valeurs réelles, on dit que l'équation différentielle linéaire est réelle (sinon on dit qu'elle est complexe) ;

(4) Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer exactement les fonctions quivérifient une telle relation.

Exemples :

(1) $f(x) = e^x$ est solution de l'équation différentielle différentielle linéaire d'ordre 1 (réelle) : … ;

(2) $f(x) = 2e^x$ est solution de la même équation différentielle, et plus généralement : λe^x pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque ;

(3) $f(x) = e^{ix}$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 (complexe) : … ;

(4) $f(x) = e^{ix}$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 (réelle) : ….

1.3 Équation complète et équation homogène

DÉFINITION :

On appelle équation différentielle homogène associée à :

1. $ay'(x) + by(x) = g(x)$ l'équation différentielle : $(\mathrm{E_H}) \;:\; ay'(x) + by(x) = 0$;
2. $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ l'équation différentielle : $(\mathrm{E_H}) \;:\; ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

REMARQUES :

(1) L'équation homogène est aussi appelée équation sans second membre ;

(2) L'équation avec second membre est appelée équation complète.

PROPOSITION :

1. Si y et y_P sont solutions de l'équation complète, alors $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène ;
2. Réciproquement, si y_P et y_H sont respectivement solutions de l'équation complète et de l'équation homogène, alors $y = y_H + y_P$ est solution de l'équation complète.

REMARQUES :

(1) Autrement dit, si S et S_H sont respectivement l'ensemble des solutions de l'équation complète et de l'équation homogène et y_P est une solution de l'équation complète, alors $S = S_H + y_P$.

1.4 Principe de superposition

PROPOSITION :

Soit (E) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_1(x) + g_2(x)$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions des équations différentielles $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_1(x)$ et $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_2(x)$, alors $y = y_1 + y_2$ est solution de (E).

REMARQUE : Un tel principe se généralise aisément au cas d'un second membre de la forme : $g_1 + g_2 + \ldots + g_n = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$.

2 Cas de l'équation homogène

Estimation : 2h
Durée : 2h30

2.1 Premier ordre

PROPOSITION :

Soit ($\mathrm{E_H}$) l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle $ay'(x) + by(x) = g(x)$ avec $a \neq 0$. Alors :

1. Si les coefficients et le second membre sont réels, l'ensemble des solutions (réelles) de ($\mathrm{E_H}$), noté S_H est :
$$S_H = \left\{ Ce^{-bx/a}, C \in \mathbb{R} \right\};$$
2. Si les coefficients et le second membre sont complexes, l'ensemble des solutions (complexes) de ($\mathrm{E_H}$), toujours noté S_H est :
$$S_H = \left\{ Ce^{-bx/a}, C \in \mathbb{C} \right\}.$$

Exemples :

(1) $y' - y = 0$. $S_H = \ldots$;

(2) $y' + iy = 0$. $S_H = \ldots$;

(3) $2y' + 3y = 0$. $S_H = \ldots$.

2.2 Second ordre

➩ Équation caractéristique :

DÉFINITION :

Soit $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, $a \neq 0$. On appelle équation caractéristique associée l'équation du second degré : $ar^2 + br + c = 0$.

PROPOSITION :

La fonction définie par $f(x) = e^{rx}$ est solution de $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0$, si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique associée.

REMARQUES :

(1) On aurait pu de même définir l'équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants : $ar + b = 0$;

(2) La proposition précédente est donc également vraie dans le cas de l'ordre 1 : en effet : $e^{-bx/a}$ est solution de l'équation différentielle et $r = -b/a$ est solution de l'équation caractéristique associée.

➩ structure de S_H :

PROPOSITION :

Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle ($\mathrm{E_H}$) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, alors quels que soient les nombres complexes λ et μ , $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de ($\mathrm{E_H}$).

➩ résolution : On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à ($\mathrm{E_H}$) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

PROPOSITION : (solutions complexes de l'équation différentielle)

Soit (E_H) l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ avec $a \neq 0$. Alors, l'ensemble des solutions de (E_H), noté S_H est :

1. si $\Delta \neq 0$,
$$S_H = \left\{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}\right\},$$
avec r_1 et r_2 solutions distinctes de l'équation caractéristique associée ; ;
2. si $\Delta = 0$,
$$S_H = \left\{(\lambda + \mu x)e^{rx}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}\right\},$$
avec r solution double de l'équation caractéristique associée.

THÉORÈME : (cas des équations différentielles réelles)

Soit (E_H) l'équation différentielle **réelle** homogène associée à l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ avec $a \neq 0$. Alors, l'ensemble des solutions (réelles) de (E_H), noté S_H est :

1. si $\Delta > 0$,
$$S_H = \left\{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
avec r_1 et r_2 solutions distinctes de l'équation caractéristique associée ; ;
2. si $\Delta = 0$,
$$S_H = \left\{(\lambda + \mu x)e^{rx} +, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
avec r solution double de l'équation caractéristique associée ;
3. si $\Delta < 0$,
$$S_H = \left\{(\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx))e^{ax}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
avec $r = a + ib$ une des deux solutions de l'équation caractéristique associée.

Exemples :

(1) Résolution de $y'' - 2y' + 5y = 0$;

(2) Résolution de $y'' + iy = 0$.

3 Équations avec second membre

Estimation : 2h
Durée : 2h15

3.1 Équations avec seconds membres particuliers

PROPOSITION :

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants (d'ordre 1 ou 2) de second membre noté g. Alors ;

1. Si g est polynômiale de degré n, l'équation différentielle admet une solution particulière y_P de la forme :
$$y_P(x) = Q(x),$$
où Q est une fonction polynômiale de degré n ;
2. Si $g(x) = P(x)e^{mx}$, avec P polynômiale de degré n et $m \in C$, alors l'équation différentielle admet une solution particulière y_P de la forme :
$$y_P(x) = \begin{cases} Q(x)e^{mx} \text{ si } m \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ xQ(x)e^{mx} \text{ si } m \text{ est solution simple de l'équation caractéristique} \\ x^2Q(x)e^{mx} \text{ si } m \text{ est solution double de l'équation caractéristique} \end{cases},$$
où Q est une fonction polynômiale de degré n.

Exemples :

(1) Solution particulière de $y' + 2y = x^2$;

(2) Solution particulière de $y'' + y = e^{ix}$;

(3) Solution particulière de $y'' + y = \cos(x)$

3.2 Synthèse

Pour résoudre une équation différentielle complète, on procède comme suit :

- on résout l'équation différentielle homogène associée ;
- on détermine une solution particulière de l'équation différentielle complète (seconds membres particuliers+principe de superposition) ;

• Les solutions de l'équation différentielle complète sont alors les fonctions qui s'écrivent comme somme de la fonction particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Exemples :

(1) Résolution de $y' + y = x^2$;

(2) Résolution de $y'' + y = \cos(x)$;

(3) Résolution de $y'' + y = x^2 + \cos(x)$.

3.3 Problème de Cauchy

En cinématique, la trajectoire d'un mobile est uniquement déterminée par la position et la vitesse initiale de ce dernier. La question de sa généralisation mathématique s'inscrit dans la notion de problème de Cauchy.

DÉFINITION :

On appelle problème de Cauchy :

1. associé à l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $ay' + by = g(x)$, avec $a \neq 0$ le système :

$$\begin{cases} ay' + by = g(x) \\ y(x_0) = m_0 \end{cases} ;$$

2. associé à l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = g(x)$, avec $a \neq 0$ le système :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(x) \\ y(x_0) = m_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases} ,$$

où x_0,m_0 et v_0 sont donnés. Un problème de Cauchy est donc un système constitué d'une équation différentielle et de conditions appelées conditions initiales.

Exemples :

(1) Solutions du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + 2y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

(2) Solutions du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' + y = \cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

PROPOSITION : (unicité du problème de Cauchy)

Quelles que soient les conditions initiales, les problèmes de Cauchy associés aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 admettent une unique solution.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' + 3y = (t+2)e^{3t}$; (b) $y' + 3y = (t+2)e^{-3t}$; (c) $y' + 3y = \cos(t)$;

(d) $y' - 4y = (t^2+1)\cos(t)$; (e) $y' + y = \cos(t) + 2\sin(t)$; (f) $y' - iy = (t^2+1)\cos(t)$.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + y' - 2y = 2x + 1$; (b) $y'' + 4y' - 5y = 2e^x$; (c) $y'' + y' - 2y = x^2 e^x$;

(d) $y'' - 3y' + 2y = xe^{-2x}$; (e) $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$; (f) $y'' + 4y' + 4y = (x^2 - x)e^{-2x}$;

(g) $y'' + 6y' - y = \sin(x)$; (h) $y'' + 4y = \cos(2x)$; (i) $y'' + y = \cos^3(x)$;

(j) $y'' - y' - 2y = (2x+3)\cos(x)$; (k) $y'' - 2y' + 5y = 2x\cos(x)$; (l) $y'' + 2y = x^2\cos(x)$

(m) $y'' + y = \cos(x) + \sin(x)$; (n) $y'' + y = \cos(x) + \sin(2x)$; (o) $y'' + iy = \cos(x) + 2\sin(2x)$;

(p) $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{sh}(x)$; (q) $y'' - 2y' + y = e^x\sin(x)$; (r) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$;

(s) $y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x}\cos(2x)$; (t) $y'' - 4y' + 4y = 8x\mathrm{sh}(x)$; (u) $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{ch}^3(x)$;

(v) $y'' - 2y' - 3y = x\mathrm{ch}^3(x)$; (w) $y'' - (1+2i)y' - (1-i)y = e^x\cos(x)$; (x) $3y'' - (2+9i)y' + 6iy = x$;

(y) $y'' - 4y' + 4y = e^x + (3x-1)e^{2x} + x - 2$.

Exercice 3 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

(a) $\begin{cases} y'' + 9y = x^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = xe^x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = e^{-x/2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} y'' + iy' + y = xe^{(1+i)x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} y'' + (1-2m)y' - 2my = e^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes de paramètre complexe m :

(a) $y'' - 2y' + my = \cos(x)$ (b) $y'' + 4y = \sin(mx)$; (c) $my'' - (1+m^2)y' + my = xe^x$.

Exercice 5 : On considère le système différentiel suivant :

$$\text{(E)} \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}.$$

1. Si x et y sont solutions de (E), montrer que : $z(t) = x(t) - 2y(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire ($\tilde{\text{E}}$) du premier ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. Résoudre ($\tilde{\text{E}}$) puis en déduire les solutions S de (E).

Exercice 6 : On considère le système différentiel suivant :

$$\text{(E)} \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + \sin(t). \end{cases}$$

1. Si x et y sont solutions de (E), montrer que : $z(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire ($\tilde{\text{E}}$) du premier ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. Résoudre ($\tilde{\text{E}}$) puis en déduire les solutions S de (E).

Exercice 7 : Trouver toutes les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = xe^x.$$

Exercice 8 : (une équation d'Euler) On s'intéresse aux fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + y = 0$.

1. On fait le changement de variable $x = e^t$, et on considère $g(t) = f(e^t)$, où f est solution du problème initial. Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire ($\tilde{\text{E}}$) à coefficients constants.
2. Résoudre ($\tilde{\text{E}}$). En déduire g puis une expression simple de f.
3. Conclure.
4. Déterminer toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 9 : (une équation de Ricatti) Soit f une fonction définie sur un intervalle I,ne s'annulant pas sur I, et vérifiant : (E) $y' + 3y + y^2 = 0$.

1. Montrer que $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
2. En déduire une expression simple de f.
3. Peut-on trouver des solutions de (E) ne s'annulant jamais et définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10 : Déterminer les fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle : $f^{(3)}(x) - f(x) = 0$ (*on pourra poser $g(x) = f'(x) - x$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants*).

---

5. Géométrie plane

Table des matières

1 Vecteurs du plan **2**
- 1.1 Généralités sur les vecteurs . . . 2
- 1.2 Bases du plan . . . 3
- 1.3 Nombres complexes et vecteurs . . . 5
- 1.4 Produit scalaire . . . 6
- 1.5 Déterminant de deux vecteurs . . . 7

2 Points du plan **9**
- 2.1 Coordonnées cartésiennes et affixe d'un point . . . 9
- 2.2 Inégalités triangulaires . . . 10
- 2.3 Formules de changement de repère . . . 11
- 2.4 Coordonnées polaires . . . 11
- 2.5 Barycentres . . . 12

3 Droites et cercles du plan **14**
- 3.1 Droites . . . 14
- 3.2 Cercles . . . 17
- 3.3 Intersections . . . 18

4 Lignes de niveaux **19**

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Année 2010-2011
Mathématiques TSI-1

Géométrie dans le plan

$\rightsquigarrow$ 13h30

On note $\mathcal{P}$ le plan usuel muni d'une orientation.

1 Vecteurs du plan

Estimation : 3h30
Durée : 4h15

1.1 Généralités sur les vecteurs

➩ égalité : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si :
- ils ont même direction ;
- ils ont même sens ;
- ils ont même norme. La norme de $\overrightarrow{u}$ est notée $||\overrightarrow{u}||$.

➩ somme : (faire une figure)

➩ multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$: si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur, alors,
- pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda\overrightarrow{u}$ est le vecteur ayant :
  - même direction que $\overrightarrow{u}$;
  - de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $\lambda \geq 0$ et de sens contraire si $\lambda < 0$;
  - de norme $|\lambda|||\overrightarrow{u}||$.
- Si $\lambda = 0$, on pose $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

➩ colinéarité de deux vecteurs :

DÉFINITION :

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il 'existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

REMARQUES :

(1) Le vecteur est colinéaire à n'importe quel vecteur ;

(2) Deux vecteurs non nuls sont donc colinéaires si et seulement s'ils ont même direction.

➩ angles orientés de vecteurs :

Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on note $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ l'angle orienté des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
dessin illustratif

On rappelle au passage les propriétés vérifiées par les angles orientés :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors :

1. $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = -(\widehat{\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}})$ $[2\pi]$;
2. $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}})$ $[2\pi]$ (relation de Chasles) ;
3. $(\widehat{\lambda\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ $[2\pi]$.

Le 3. de la proposition précédente est faux si λ est négatif (faire un dessin illustratif).

➩ vecteurs et points du plan :

- Soient A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur, on note $A+\overrightarrow{u}$ l'unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On écrit : $B = A + \overrightarrow{AB}$.
- Réciproquement, étant donné deux points A et B de $\mathcal{P}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
- Étant donnés deux points A et B, on appelle distance de A à B le nombre réel, noté $d(A,B)$, tel que $d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

PROPOSITION : (relation de Chasles)

Quels que soient les points A, B, C du plan, nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

1.2 Bases du plan

DÉFINITION :

1. On appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de la forme : $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, avec α et β deux nombres réels ;
2. On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base de $\mathcal{P}$ si tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$;
3. Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, on appelle le couple $(\alpha;\ \beta)$ les composantes de $\overrightarrow{w}$ dans $\mathcal{B}$. On note également : $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

REMARQUES :

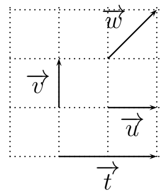
(1) Lorsque les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont orthogonaux (resp. $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$), on dit que $\mathcal{B}$ est orthogonale (resp. orthogonale directe) ;

(2) si de plus $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$, on dit que $\mathcal{B}$ est orthonormale ;

(3) si de plus $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = 1$, on dit que $\mathcal{B}$ est orthonormée ;

(4) Si $\mathcal{B}$ n'est pas directe, on dit que $\mathcal{B}$ est indirecte.

Exemples : Considérons la figure suivante :



Alors :

(1) Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;

(2) Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}$;

(3) Le vecteur $\overrightarrow{w}$ ne peut pas être combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{t}$;

(4) Le vecteur $\overrightarrow{t}$ ne peut pas être non plus combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{0}$;

(5) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base de $\mathcal{P}$; les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette base sont : $(1;\ 1)$

(6) $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ forme une base de $\mathcal{P}$; les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans cette base sont : $(1;\ -1)$;

(7) $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathcal{P}$; les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans cette base sont : $(\ldots;\ \ldots)$;

(8) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{t})$ ne forme pas une base de $\mathcal{P}$.

PROPOSITION :

1. **(caractérisation des bases du plan)** Deux vecteurs de $\mathcal{P}$ forment une base de $\mathcal{P}$ si et seulement s'ils sont non nuls et non colinéaires ;
2. **(composantes et opérations)** Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$. Alors :
   - $\overrightarrow{t_1}+\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\end{pmatrix}$;
   - $\lambda\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\beta_1\end{pmatrix}$.

Exemples :

(1)

1.3 Nombres complexes et vecteurs

On note $\mathcal{B}=(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ une base **orthonormée directe**. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(a;\ b)$: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. À tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on associe le nombre complexe, noté $z_{\overrightarrow{u}}$, tel que $z_{\overrightarrow{u}}=a+ib$. Ce dernier nombre complexe est appelé **affixe** de $\overrightarrow{u}$.

Exemples :

(1) affixe de $\overrightarrow{i}$: ...;

(2) affixe de $\overrightarrow{j}$: ...;

(3) affixe de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$;

(4) vecteur associé à $1+i$: ....

PROPOSITION : (propriétés de l'affixe)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$ dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Alors :

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{u}}+z_{\overrightarrow{v}}$;
2. Pour tout nombre réel λ, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour affixe $\lambda z_{\overrightarrow{u}}$.

REMARQUES :

(1) $|z_{\overrightarrow{u}}|=||\overrightarrow{u}||$;

(2) $\arg(z_{\overrightarrow{u}})=(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}})$.

1.4 Produit scalaire

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le nombre réel tel que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$. Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$.

REMARQUES :

(1) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=||\overrightarrow{u}||^2$;

(2) Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$.

➩ Interprétation géométrique : soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A,B,C tels que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$. On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\times\overline{AH},$$

où $\overline{AH}$ est tel que $\overrightarrow{AH}=\overline{AH}\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$.

➩ Expression en affixes complexes :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$. Alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\mathcal{R}e\left(\overline{z_{\overrightarrow{u}}}\times z_{\overrightarrow{v}}\right)$.

➩ Propriétés vérifiées par le produit scalaire :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$: le produit scalaire est symétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}\\ \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{array}\right\}\text{linéaire à gauche}\\ \left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}\\ (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{array}\right\}\text{linéaire à droite}\end{array}\right\}\text{bilinéaire}$$

➩ Expression en base orthonormale :

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb'.$$

REMARQUES :

(1) En particulier, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2+b^2}$;

(2) Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

1.5 Déterminant de deux vecteurs

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le nombre réel tel que : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.
Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

REMARQUE : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$: on dit que le déterminant est alterné.

➩ Déterminant et bases :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

1. $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$;
2. $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base directe du plan si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) > 0$.

➩ Interprétation géométrique : soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Alors :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{B}) = ||\overrightarrow{u}|| \times \overline{BH}.$$

➩ Expression en affixes complexes :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$. Alors :
$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathcal{I}m\left(\overline{z_{\overrightarrow{u}}} \times z_{\overrightarrow{v}}\right)$.

➩ Propriétés vérifiées par le déterminant :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$: le déterminant est antisymétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})\\ \det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\end{array}\right\}\text{linéaire à gauche}\\ \left.\begin{array}{l}\det(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\\ \det(\lambda\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\end{array}\right\}\text{linéaire à droite}\end{array}\right\}$$
   bilinéaire

REMARQUE : L'antisymétrie entraîne le caractère alterné. En effet, si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, alors en particulier : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$, donc $2\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ donc $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$.

➩ Expression en base orthonormale **directe** :

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directe et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ab' - ba'.$$

Notation : en gardant les notations de la proposition, on notera également : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$.

➩ Application au calcul d'aires :

PROPOSITION :

1. Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|.$$
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|.$$

mettre un exemple ici

2 Points du plan

Estimation : 3h30
Durée : 4h45

2.1 Coordonnées cartésiennes et affixe d'un point

DÉFINITION :

1. Soit O un point du plan. On dit que $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère cartésien de $\mathcal{P}$ lorsque $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan ;
2. Si de plus, $\mathcal{B}$ est orthogonale, directe, orthonormale, ou orthonormée, on dira que $\mathcal{R}$ est respectivement orthogonal, direct, orthonormal, orthonormé.

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{R}$ un repère cartésien et $M \in \mathcal{P}$. Alors il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, appelé coordonnées de M dans $\mathcal{R}$, tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. On note $M(\alpha, \beta)$.

conséquence : Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct et $M(a, b)$ dans $\mathcal{R}$. A tout point M, on fait correspondre le nombre complexe, noté z_M, tel que $z_M = a+ib$. Ce nombre complexe est appelé affixe de M.

PROPOSITION :

Le tableau ci-dessous résume les expressions des différentes grandeurs géométriques en fonction des repères et affixes des points dans le plan :

grandeur géométrique	expression réelle	expression complexe
$\overrightarrow{AB}$	$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$	$z_B - z_A$
$d(A, B)$	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	$\|z_B - z_A\|$
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$	$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\|\overrightarrow{AB}\|\|.\|\|\overrightarrow{AC}\|\|}$ $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\|\|\overrightarrow{AB}\|\|.\|\|\overrightarrow{AC}\|\|}$	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

2.2 Inégalités triangulaires

RAPPEL : Soients A, B, C trois points du plan. Alors $d(A, B) < d(A, C) + d(B, C)$ avec égalité si et seulement si $C \in [AB]$.

dessin illustratif

Cette propriété géométrique a l'analogue suivant chez les nombres complexes :

PROPOSITION : (inégalités triangulaires)

Soient z et z' deux nombres complexes, alors :

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
2. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

- *interprétation géométrique*
- *démonstration*
- *remarque : cas d'égalité*
- *exemple simple d'application*

2.3 Formules de changement de repère

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ deux repères orthonormaux et M un point du plan tels que : $\Omega(x_\Omega;\ y_\Omega)$, $M(x;\ y)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$. Alors, notant $M(X;\ Y)$ les coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{l} X = (x - x_\Omega)\alpha + (y - y_\Omega)\beta \\ Y = (x - x_\Omega)\alpha' + (y - y_\Omega)\beta' \end{array}}$$

Exemple : On considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Coordonnées de $M(1;\ 1)$ dans $\mathcal{R}' = (0;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2.4 Coordonnées polaires

On se place dans un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on appelle dans cette sous-section : $\overrightarrow{u}(\theta)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}(\theta)\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$

PROPOSITION :

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est une base orthonormée directe, appelée base polaire.

conséquence : $\mathcal{R}' = (0;\ \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est un repère orthonormé direct appelé repère polaire d'angle θ et de pôle O.

REMARQUES :

(1) L'affixe de $\overrightarrow{u}(\theta)$ est $z_{\overrightarrow{u}} = e^{i\theta}$;

(2) L'affixe de $\overrightarrow{v}(\theta)$ est $z_{\overrightarrow{v}} = ie^{i\theta}$;

PROPOSITION :

On considère $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ un repère orthonormé direct.

1. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur tel que $||\overrightarrow{n}|| = 1$ (un tel vecteur est dit unitaire). Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$;
2. (coordonnées polaires) Il existe un couple (ρ, θ) de réels tel que : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$. Un tel couple est appelé coordonnées polaires de M.

REMARQUES :

(1) On n'a pas unicité en général, sauf si l'on impose $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$;

(2) en reprenant les notations de l'énoncé, nous avons $z_M = \rho e^{i\theta}$.

lien polaire/cartésien : si $(x;\ y)$ et $(\rho;\ \theta)$ représentent respectivement les coordonnées cartésiennes et polaires d'un point M du plan, alors nous avons les relations :

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}}$$

2.5 Barycentres

DÉFINITION :

1. On appelle point pondéré la donnée d'un couple (A, α) où A est un point du plan et α un nombre réel ;
2. Lorsque $\alpha_1 + ... + \alpha_n \neq 0$, on appelle barycentre d'une famille de n points pondérés (A_k, α_k), avec $1 \leq k \leq n$ l'unique point G tel que : $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$;
3. Si les pondérations sont de plus égales à 1, on dit que G est l'isobarycentre de la famille de points.

Le barycentre n'existe que si la somme des pondérations est non nulle!!!

Exemples :

(1) Pour A et B distincts, il n'existe pas de points G tel que : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

(2) isobarycentre de deux points distints A et B ;

(3) barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$;

(4) barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$.

PROPOSITION :

1. Le barycentre de deux points est le situé sur la droite passant par ces deux points ;
2. (invariance par multiplication par une constante non nulle) Le barycentre de la famille des n points (A, α_k) est le même que celui des n points $(A, \lambda\alpha_k)$, avec $\lambda \neq 0$
3. (associativité du barycentre) On considère les n points $A_1, A_2, ..., A_r, A_{r+1}, ..., A_n$ du plan de pondérations respectives $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_n$. On note (et on suppose l'existence) du barycentre G des n points $A_1, ..., A_n$ et du barycentre G' de $A_1, ..., A_r$ munis des pondérations précédentes. Alors G est la barycentre de $(G', \alpha_1 + ... + \alpha_r), (A_{r+1}, \alpha_{r+1}), ..., (A_n, \alpha_n)$.

Exemples :

(1) Construction de l'isobarycentre de 3 points ;

(2) Construction de l'isobarycentre d'un carré.

PROPOSITION :

Soit G le barycentre des n points pondérés $(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)$ et $\mathcal{R}$ un repère cartésien. Alors, si les points $A_1, ..., A_n$:

1. ont pour coordonnées respectives $(x_1;\ y_1), ..., (x_n;\ y_n)$ dans $\mathcal{R}$, alors les coordonnées $(x_G;\ y_G)$ du barycentre sont données par les formules :
$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n};\quad y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n};$$
2. ont pour affixes respectives $z_1, ..., z_n$, l'affixe du barycentre est donné par la formule :
$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}.$$

Exemples :

(1) Coordonnées du milieu de deux points $A(1;\ 2)$ et $B(-4;\ 6)$;

(2) coordonnées de l'isobarycentre de $A(1)$, $B(i)$ et $C(1+i)$.

3 Droites et cercles du plan

Estimation : 3h30

Durée : 4h

Sauf mentions contraires, on notera dans la suite $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct associé.

3.1 Droites

(a) caractérisations équivalentes : Une droite $\mathcal{D}$ est donnée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B. On note alors $\mathcal{D} = (AB)$;
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur non nul. O note alors $D = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{M \in \mathcal{P}/M = A + t\overrightarrow{u}\}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et la direction de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$;
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\overrightarrow{v}$. La droite $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux : $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P}/\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}\}$.

(b) équation cartésienne d'une droite :

PROPOSITION :

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $M(x;\ y)$ dans $\mathcal{R}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe a, b, c tels que $ax+by+c = 0$ avec a et b non nuls simultanément ;
2. Réciproquement, l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;\ y)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $ax + by + c = 0$ avec a, b, c réels et a et b non nuls simultanément est une droite.

<u>DÉFINITION</u> :

1. On appelle équation cartésienne de $\mathcal{D}$ toute équation associée à $\mathcal{D}$ de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b, c réels et a, b non nuls simultanément ;
2. Si de plus $a^2 + b^2 = 1$, on dit que l'équation cartésienne est normale.

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, on n'écrira donc JAMAIS « <u>L</u>'équation cartésienne », mais plutôt « <u>UNE</u> équation cartésienne »

Exemples :

(1) équation cartésienne de la droite (AB), avec $A(1;\ 0)$ et $B(0;\ 1)$;

(2) équation cartésienne normale de la droite (AB) ;

(3) équation cartésienne de la perpendiculaire à (AB) passant par A.

REMARQUES :

(1) Deux équations cartésiennes d'une même droite ont leurs coefficients qui sont proportionnels ;

(2) Si $ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ passe par l'origine si et seulement si $c = 0$;

(3) Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors :

- $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à la droite ;
- $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;
- une équation est normale si et seulement si le vecteur directeur associé est de norme 1. Une droite admet donc deux équations normales.

(c) équation polaire d'une droite : On cherche une équation vérifiée par les coordonnées polaires (ρ, θ) des points différents de l'origine.

Exemples :

(1) équation polaire de la droite d'équation cartésienne : $x + y = 0$;

(2) équation polaire de la droite d'équation cartésienne : $x + y - 1 = 0$;

(3) équation cartésienne de la droite d'équation polaire : $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;

(4) équation cartésienne de la droite d'équation polaire : $\rho = \dfrac{2}{\cos(\theta)}$.

PROPOSITION :

Toute droite $\mathcal{D}$:

1. passant par l'origine admet une équation polaire de la forme : $\theta =$constante $[\pi]$;
2. ne passant pas par l'origine admet une équation polaire de la forme $\rho = \dfrac{a}{r\cos(\theta - \varphi)}$, avec $c \neq 0, r \neq 0, \varphi \in \mathbb{R}$.

(d) paramétrisation d'une droite :

PROPOSITION :

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(a;\ b)$ admet une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}$

Exemples :

(1) représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(0;\ 1)$ et $B(1;\ 0)$

(2) équation cartésienne de la droite d'équation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

REMARQUES :

(1) Une droite admet plusieurs représentations paramétriques : on peut changer de vecteur directeur ou de point A ;

(2) Si $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}$ est une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$, alors :

- $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$.

(e) distance d'un point à une droite :

DÉFINITION :

Soient M un point et $\mathcal{D}$ une droite. On appelle distance de M à $\mathcal{D}$, et on note $d(M, \mathcal{D})$ la plus petite distance MN où N décrit $\mathcal{D}$.

REMARQUES :

(1) $d(M, \mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

PROPOSITION :

Soients $M(x_0;\ y_0)$ un point du plan et $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite $ax + by + c = 0$. Alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemples :

(1) Distance de l'origine à $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x+y-1{=}0$;

3.2 Cercles

(a) caractérisations équivalentes : Un cercle $\mathcal{C}$ est donné :

- soit par son centre Ω et son rayon R : $\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{P}/\Omega M=R\}$;
- soit par son diamètre $[AB]$: $\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{P}/\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\}$.

(b) équation cartésienne d'un cercle :

PROPOSITION :

(a) Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon R admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

(b) Réciproquement, si $(a;\ b)\in\mathbb{R}^2$ et $c>0$, l'ensemble des points $M(x;\ y)$ du plan tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(a,;\ b)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

REMARQUE : Si $c>0$ l'ensemble des points $M(x;\ y)$ tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ est l'ensemble vide (Si $c=0$, l'ensemble est réduit à $\Omega(a;\ b)$).

Exemples :

(1) équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(1;\ 2)$ et de rayon 4 ;

(2) équation cartésienne du cercle de diamètre AB, avec $A(-1;\ 0)$ et $B(1;\ 1)$;

(3) Identifier l'ensemble des points du plan d'équation : $x^2-4x+y^2+6y-23=0$, puis déterminer les éléments caractéristiques.

(c) équation polaire d'un cercle d'un cercle passant par l'origine : le principe est le même que pour les droites.

Exemples :

(1) équation polaire du cercle unité ;

(2) équation polaire du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(1;\ 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$;

(3) équation cartésienne du cercle d'équation polaire $\rho=2\cos(\theta)$.

PROPOSITION :

Tout cercle $\mathcal{C}$ passant pas par l'origine admet une équation polaire de la forme $\rho=r\cos(\theta-\varphi)$, avec $r>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$.

(d) représentation paramétrique d'un cercle :

PROPOSITION :

Un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon R admet une <u>représentation paramétrique</u> de la forme : $\left\{\begin{array}{l} x=a+R\cos(\theta)\\ y=b+R\sin(\theta)\end{array}\right.$, $\theta\in\mathbb{R}$.

3.3 Intersections

(a) de deux droites :

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives : $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. Alors :

(a) si $\begin{vmatrix} a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=0$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues ;

(b) si $\begin{vmatrix} a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}\neq 0$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un unique point dont les coordonnées $(x;\ y)$ sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{l} ax+by=-c\\ a'x+b'y=-c'\end{array}\right.$

Exemples :

(1) nature de l'intersection de $\mathcal{D}$: $y=x$ et $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne $x+y-1=0$;

(2) coordonnées du point d'intersection dans l'exemple d'avant.

(b) d'un cercle et d'une droite :

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite. Alors :

(a) si $d(\Omega;\ \mathcal{D})<R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en deux points ;

(b) si $d(\Omega;\ \mathcal{D})=R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{D}$ est tangente au cercle en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires ;

(c) si $d(\Omega;\ \mathcal{D})>R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas ;

illustrations graphiques

Exemples :

(1) nature de l'intersection du cercle unité $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$;

(2) coordonnées du point d'intersection de l'exemple d'avant.

4 Lignes de niveaux

Estimation : 1h

Durée : 30min

La version vue en cours est simplifiée et plus courte

(a) présentation :

DÉFINITION :

> Si f est une application de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle ligne de niveau l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M du plan tels que $f(M) = \lambda$.

Exemples :

(1) $f(M) = OM$, où O est l'origine ;

(b) quelques exemples

➩ $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ avec A, B, C non alignés.

➩ $f(M) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}$, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et A un point. On distingue deux cas :

– si $\lambda = 0$, alors S est la droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et passant par A ;

– si $\lambda \neq 0$, alors on appelle H le point de la droite tel que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AH} = \lambda$ (un tel point H existe et est déterminé par la relation : $\overrightarrow{AH} = \lambda \dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}$).

Alors :
$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = \lambda \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AH} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AH} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{HM} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par H.

REMARQUES :

(1) En faisant varier λ, on obtient toutes les droites orthogonales à $\mathcal{D}$

➩ $f(M) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et A un point. On distingue deux cas :

– si $\lambda = 0$, alors S est exactement $\mathcal{D}$;

– si $\lambda \neq 0$, alors on appelle $\mathcal{D}'$ la droite passant par A et orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et H le point de $\mathcal{D}'$ tel que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AH}) = \lambda$ (un tel point H existe et est déterminé par la relation : $\overrightarrow{AH} = \lambda \dfrac{\overrightarrow{v}}{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$. Alors :

$$\begin{aligned}
& \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \lambda \\
\Leftrightarrow\ & \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AH}) \\
\Leftrightarrow\ & \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) - \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AH}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{HM}) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par H.

REMARQUES :

(1) En faisant varier λ, on obtient toutes les droites parallèles à $\mathcal{D}$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Géométrie dans le plan

Dans tous les exercices, sauf spécifications contraires, le plan est muni du repère orthonormal direct $(0;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ *et les coordonnées des points sont données dans ce repère*

Exercice 1 : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Montrer que :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$;
2. Montrer que : $\det(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v})^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 = ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2$.

Exercice 2 : Calculer l'aire du triangle défini par $A(1;\ 2)$; $B(3;\ 5)$ et $C(-1;\ 4)$.

Exercice 3 : Soient $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ et $\Omega(2;\ 3)$. Calculer $||\overrightarrow{U}||$ puis trouver une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ telle que $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{U}}{||\overrightarrow{U}||}$ et expliciter les formules de changement de repères entre $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(\Omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 4 : Soient $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ -2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ de (AB).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d perpendiculaire à (AB) passant par le point $C(1;\ 1)$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la parallèle à (AB) passant par C, notée d'.
5. Déterminer les coordonnées du point D d'intersection de d avec Δ.
6. Calculer la distance de B à d.

Exercice 5 : Soient $A(-2;\ 0)$ et $B(1;\ 1)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre AB.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB et p son demi-périmètre.

1. Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. (*formule d'Al Kashi*)
2. Montrer que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 = b^2c^2$.
3. On note S l'aire du triangle ABC. Déduire des deux questions précédentes la formule : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. (*formule de Héron*)

Exercice 7 : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives : $3x - 4y + 4 = 0$ et $12x + 5y - 5 = 0$. Déterminer une équation cartésienne, puis une équation polaire de chacune de leurs bissectrices.

Exercice 8 : On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle, et D la droite d'équation réduite : $y = 2x - 3$.

1. Montrer qu'il 'existe un point $M(x_0;\ y_0)$ de C tel que la distance de M à D soit minimale, puis déterminer cette distance.
2. Que peut-on dire de la tangente à C en x_0 par rapport à D ?

Exercice 9 : Soient $\mathcal{D}_m$ la droite passant par $A(-2;\ 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_m \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle et déterminer son centre et son rayon.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_m$.
3. En déduire les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.

Exercice 10 : Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x+y+1=0$ et $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe d'équation $x^2+y^2-2\lambda x+2y+2=0$. Discuter, suivant λ la nature de $\mathcal{C}_\lambda$ puis l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_\lambda$.

Exercice 11 : Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que :

(a) $P(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ forment un triangle rectangle ; (b) $M(z)$, $N(\frac{1}{z})$ et $P(-i)$ soient alignés.

Exercice 12 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le nombre $u = \frac{1+z}{1-z}$ soit :

(a) réel ; (b) imaginaire pur ; (c) de module 1.

Exercice 13 : Résoudre $|z-2i| = |z+2|$ algébriquement puis géométriquement.

Exercice 14 : Pour quels nombres complexes non nuls z, le nombre complexe $z + \dfrac{1}{z}$ est-il réel ?

Exercice 15 : Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $\Omega(2;3)$ et $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{i} + \sqrt{3}\overrightarrow{j})$.

1. Montrer que $(\Omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme un repère orthonormé direct.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x+1$ dans $(O;\bar{i},\bar{j})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ dans le repère $(\Omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $X^2+Y^2-2=0$ dans $(\Omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Déterminer une équation cartésienne du cercle dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
4. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 16 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés et λ un réel.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2 = \lambda$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 + 3MB^2 - 5MC^2 = \lambda$.

Exercice 17 : Reconnaître les courbes d'équations polaires :

$$\text{(a) } \rho = \frac{1}{\cos(\theta) + 3\sin(\theta)}; \quad \text{(b) } \rho = 3\cos(\theta) - 4\sin(\theta).$$

Exercice 18 : Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_t$ la droite d'équation : $(1-t^2)x + 2ty = -(1+t)^2$.

1. Pour $t \neq t'$, Déterminer une condition sur t et t' pour que $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ soient parallèles.
2. Soient t et t' $(t \neq t')$ tels que $\mathcal{D}_t$ soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_{t'}$ et $M(x;\ y)$ les coordonnées du point d'intersection.
   (a) Montrer que t et t' sont les racines du trinôme : $T(X) = (1-x)X^2 + 2yX + x + 1$, puis en déduire une expression de $\sigma_1 = t + t'$ et $\sigma_2 = tt'$ en fonction de x et y.
   (b) Exprimer $t^2 + t'^2$ en fonction de σ_1 et σ_2, puis en déduire une équation vérifiée par x et y.
3. Déduire de la question précédente l'ensemble des points M par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

---

6. Limites de fonctions et asymptotes

Table des matières

1 Opérations élémentaires sur les limites **2**
- 1.1 Somme, produit, multiplication par un réel 3
- 1.2 Composition 5

2 Formes indéterminées classiques **5**
- 2.1 Croissances comparées 5
- 2.2 Utilisation de la dérivabilité en un point 6
- 2.3 Expressions avec radicaux 6
- 2.4 Expressions rationnelles 7

3 Application : la notion d'asymptote **7**
- 3.1 Asymptotes horizontales 7
- 3.2 Asymptotes verticales 7
- 3.3 Asymptotes obliques 8

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Année 2010-2011
Mathématiques TSI-1

Limites de fonctions et asymptotes

$\rightsquigarrow$ 4h30h

Notations : On note, sauf mentions contraires :

- f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I un intervalle (non vide) inclus dans D ;
- x_0 un point de I ou une borne finie de I (exemple : $I =]0; +\infty[$ et $x_0 = 0$).

1 Opérations élémentaires sur les limites

Estimation : 1h
Durée : 1h30

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Année 2010-2011
Mathématiques TSI-1

Opérations usuelles sur les limites de fonctions

Notations : f et g sont deux fonctions réelles de la variable réelle définies sur D. En l'absence de précision, La lettre a représente x_0, $+\infty$ ou $-\infty$.

1 Somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$						

Forme indéterminée :

$f(x)=x;\ g(x)=-2x$	$f(x)=x;\ g(x)=-x$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))=$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))=$

2 Multiplication par $\lambda\in\mathbb{R}^*$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x)$			

3 Produit :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	∞	3∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$				

Forme indéterminée :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x};\ g(x)=x \\ f(x)=\frac{1}{x};\ g(x)=\dots \end{cases}$$

4 Quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$							

Formes indéterminées :

(a) $\begin{cases} f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \\ f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \\ f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \\ f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \\ f(x)=\dots;\ g(x)=\dots \end{cases}$

5 Exemples d'applications :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)$: ....

....

....

....

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x)$: ....

....

....

....

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)$: ....

....

....

....

....

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x)$: ....

....

....

1.2 Composition

PROPOSITION :

Soient f définie sur D et g définie sur D' telles que $g \circ f$ ait un sens. Alors, pour a et b quelconques (infinis, bords d'intervalles des domaines de définitions ou appartenant aux domaines de définitions correspondants) :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\\ \lim\limits_{x\to} g(x) = L\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to} g\circ f(x) = \cdots$$

Exemples :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

2 Formes indéterminées classiques

Estimation : 1h30

Durée : 2h15

2.1 Croissances comparées

PROPOSITION : (croissances comparées)

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$;
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha\,|\ln(x)|^\beta = 0$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{(e^x)^\beta} = 0$;
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha\,(e^x)^\beta = 0$.

Exemples :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{-x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

2.2 Utilisation de la dérivabilité en un point

RAPPEL : $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Exemples :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

2.3 Expressions avec radicaux

Méthode : pour lever des formes indéterminées, on peut utiliser l'expression conjuguée.

Exemples :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$.

2.4 Expressions rationnelles

Méthode : On factorise le numérateur et le dénominateur.

Exemples :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$.

3 Application : la notion d'asymptote

Estimation : 1h30
Durée : 45min

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

3.1 Asymptotes horizontales

DÉFINITION :

> On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = b$ comme asymptote horizontale lorsque f admet b pour limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples :

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$;

(2) $f(x) = 1 - e^{-x}$;

3.2 Asymptotes verticales

DÉFINITION :

> On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $x = a$ comme asymptote horizontale lorsque f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite à droite ou à gauche de a.

Exemples :

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$;

(2) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-5}$.

3.3 Asymptotes obliques

DÉFINITION :

> On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = ax+b$ comme asymptote oblique lorsque : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.

Exemple : $f(x) = x + \frac{1}{x-5}$.

REMARQUE : En pratique, pour déterminer a et b, on procède comme-suit :

- On calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. On note a sa valaur ;
- On calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax)$. On note b sa valeur ;
- Alors $D :\ y = ax + b$ est asymptote oblique.

Exemples :

(1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

(2) $f(x) = x\mathrm{th}(x)$.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Limites de fonctions et asymptotes

Exercice 1 : Déterminer les limites des fonctions suivantes au point x_0 :

(a) $\dfrac{\tan(x)}{x}$, $x_0 = 0$; (b) $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, $x_0 = 0$; (c) $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$, $x_0 = 0$;

(d) $\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$, $x_0 = 0$; (e) $\dfrac{x}{e^x - 1}$, $x_0 = 0$; (f) $\dfrac{x-1}{\ln(x)}$, $x_0 = 1$;

(g) $\dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$ $x_0 = 0$; (h) $\sqrt{x}\ln(x)$, $x_0 = 0^+$; (i) $e^x - 3x^2 - 1$ $x_0 = +\infty$;

(j) $e^x - x$, $x_0 = +\infty$; (k) $\dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2}e^{\frac{1}{x}}$ $x_0 = 0^+$, puis $x_0 = 0^-$; (l) $\ln(x) - x^2$; $x_0 = +\infty$;

(m) $\dfrac{\ln(x)}{e^x}$, $x_0 = +\infty$; (n) $x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3$, $x_0 = +\infty$; (o) xe^{x^2}, $x_0 = -\infty$;

(p) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^3}$ $x_0 = +\infty$; (q) $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = +\infty$; (r) $x\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = +\infty$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes aux points proposés :

(a) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ en 1 ; (b) $\dfrac{x^3+x^2+x-14}{x^2-4}$ en 2 ; (c) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ en 0 ;

(d) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ en 1 et -2 ; (e) $\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ en 4 ; (f) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ en 0^+ ;

(g) $\sqrt{x^4+x^2+1} - x(x+1)$ en $+\infty$; (h) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{\sqrt{x^2+3}-4x}$ en $+\infty$ puis $-\infty$; (i) $\sqrt[3]{x^3+2} - x$ en $+\infty$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes aux points proposés :

(a) $f(x) = (\ln(x))^{1/x}$, en $+\infty$; (b) $f(x) = x^{x+1} - x^x$ en 0^+ puis $+\infty$; (c) $f(x) = (\mathrm{ch}(x))^{\ln(x)}$ en 0^+ puis $+\infty$.

Exercice 4 : Déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = (x+2)(1+e^{-x/2})$; (b) $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x))$; (c) $f(x) = \dfrac{x\ln(1+e^x)}{x-1}$.

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique dont on déterminera l'équation réduite.
   (b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2. (a) Pour $x > 0$, on pose : $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Étudier les variations de g.
   (b) En déduire le tableau de variations de f.
   (c) Tracer la courbe représentative de f le plus précisément possible.

---

7. Courbes paramétrées

Table des matières

1 Fonctions vectorielles **2**
1.1 présentation . . . 2
1.2 limite d'une fonction vectorielle . . . 2
1.3 dérivation . . . 3
1.4 utilisation en physique . . . 4

2 Courbes planes paramétrées : présentation **5**
2.1 interprétation cinématique . . . 5
2.2 définitions . . . 7
2.3 symétries et réduction du domaine d'étude . . . 7

3 Éléments remarquables d'une courbe paramétrée **9**
3.1 tangente à une courbe paramétrée . . . 9
3.2 points remarquables . . . 10
3.3 Branches infinies et asymptotes . . . 11

4 Synthèse : étude d'un exemple concret **12**
4.1 plan d'étude . . . 13
4.2 exemple . . . 13

Courbes planes paramétrées

$\rightsquigarrow$ 8h

On note $\mathcal{P}$ le plan usuel orienté dans le sens trigonométrique et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

1 Fonctions vectorielles

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

1.1 présentation

DÉFINITION :

On appelle fonction vectorielle toute fonction $\overrightarrow{u} : \mathbb{R} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Exemples :

(1) si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors $\overrightarrow{u}$ telle que $\overrightarrow{u}(t) = \cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j}$ est une fonction vectorielle (*illustration graphique*) ;

(2) De même, toujours dans $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{v}$ telle que $\overrightarrow{v}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ est une fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}$;

(3) $\overrightarrow{w}$ définie par $\overrightarrow{w}(t) = t\overrightarrow{u}(t)$ est une fonction vectorielle ;

(4) Avec les notations précédentes, la fonction $\overrightarrow{z}$ telle que $\overrightarrow{z}(t) = 2\overrightarrow{u}(t) + 3\overrightarrow{w}(t)$ est une fonction vectorielle.

1.2 limite d'une fonction vectorielle

On note, $a = t_0 \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ une fonction vectorielle et $\overrightarrow{u_0} \in \mathcal{P}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ tend vers $\overrightarrow{u_0}$ lorsque t tend vers a lorsque : $\lim\limits_{t \to a} ||\overrightarrow{u}(t) - \overrightarrow{u_0}|| = 0$.

PROPOSITION : (caractérisation en base orthonormée)

Notant $\mathcal{B}$ une base orthonormée, $\overrightarrow{u}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{u_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, nous avons équivalence entre :

(i) $\overrightarrow{u}$ tend vers $\overrightarrow{u}_0$ lorsque t tend vers a ;

(ii) $\lim\limits_{t\to a} x(t) = x_0$ ET $\lim\limits_{t\to a} y(t) = y_0$.

Exemple : $\overrightarrow{u}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\overrightarrow{u}(t)\begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ admet $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour limite en $+\infty$.

En effet : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$ ET $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 = 1$ (*faire un dessin*).

1.3 dérivation

On se place dorénavant dans la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on note : $\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

DÉFINITION :

On dit que $\overrightarrow{u}$ est dérivable sur D lorsque x et y sont dérivables sur D. On note $\overrightarrow{u}'$ telle que $\overrightarrow{u}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle dérivée.

Exemples :

(1) fonction vectorielle dérivée de $\overrightarrow{u}$ définie par : $\overrightarrow{u}(t) = \cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j}$.

(2) fonction vectorielle dérivée de $\overrightarrow{u}$ définie par : $\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.

PROPOSITION : (Règles de dérivation)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux fonctions vectorielles dérivables sur D et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur D. Alors :

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est dérivable sur D et $\forall t \in D, (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})'(t) = \overrightarrow{u}'(t) + \overrightarrow{v}'(t)$;
2. La fonction vectorielle $\overrightarrow{w}$ telle que $\overrightarrow{w}(t) = \varphi(t)\overrightarrow{u}(t)$ est dérivable sur D et $\forall t \in D, \overrightarrow{w}'(t) = \varphi'(t)\overrightarrow{u}(t) + \varphi(t)\overrightarrow{u}'(t)$;
3. La fonction réelle f telle que : $f(t) = \overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{v}(t)$ est dérivable sur D et $\forall t \in D, f'(t) = \overrightarrow{u}'(t).\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{u}(t).\overrightarrow{v}'(t)$;
4. La fonction réelle g telle que : $g(t) = \det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{g}(t))$ est dérivable sur D et $\forall t \in D, g'(t) = \det(\overrightarrow{u}'(t), \overrightarrow{v}(t)) + \det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}'(t))$.

Exemples :

(1) Si $\overrightarrow{u}$ est une fonction vectorielle dérivable sur D, alors $f(t) = ||\overrightarrow{u}(t)||^2$ est dérivable sur D et pour tout $t \in D, f'(t) = 2\overrightarrow{u}'(t).\overrightarrow{u}(t)$;

(2) En particulier, si $\overrightarrow{u}$ est une fonction vectorielle de norme constante, alors sa fontion vectorielle dérivée est orthogonale à $\overrightarrow{u}$;

(3) Si $\overrightarrow{u}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, alors sa fonction dérivée est orthogonale à $\overrightarrow{u}$. Elle est en fait égale à $\overrightarrow{v}(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1.4 utilisation en physique

On se sert très souvent de ces notions en physique, notamment en mécanique. En particulier :

- si M est un mobile se déplaçant dans le plan, $\overrightarrow{OM}(t)$ (où t est le temps) est une fonction vectorielle. Sa fonction vectorielle dérivée est appelée le vecteur vitesse, et noté : $\overrightarrow{v}(t) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \overrightarrow{OM}'(t)$;
- Le vecteur accélération est noté : $\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{v}'(t)$;
- Les régles de dérivation des fonctions vectorielles permettent notamment de retrouver le théorème de l'énergie cinétique à partir du principe de Newton. En effet, considérant un mobile que se déplace d'un point A à un point B, nous avons sur cet intervalle de temps, d'après le principe de newton :

$m\overrightarrow{a} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$. La dérivation de l'énergie cinétique donne alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m||\overrightarrow{v}||^2\right)\\
&= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(||\overrightarrow{v}||^2\right)\\
&= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(2\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}\right) \quad \text{(d'après ci-dessus)}\\
&= m\overrightarrow{v}.\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\\
&= m\overrightarrow{v}.\overrightarrow{a}\\
&= \overrightarrow{v}.(m\overrightarrow{a})\\
&= \overrightarrow{v}.\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F}_k\\
&= \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}.\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F}_k\\
&= \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}.\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F}_k\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OM}.F_k\right)
\end{aligned}$$

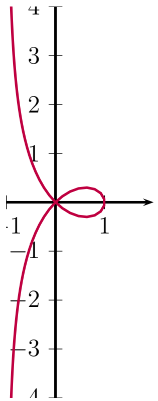
Par conséquent, nous obtenons par intégration : $E(B)-E(A) = \sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) = \sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).\overrightarrow{F}_k = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{F}_k$.

2 Courbes planes paramétrées : présentation

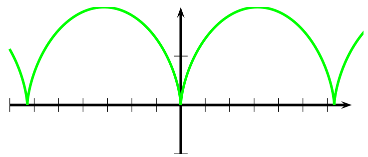
Estimation : 1h30
Durée : 2h

2.1 interprétation cinématique

La notion de courbe plane paramétrée a pour origine le mouvement d'un point M mobile dans le plan. Par exemples :



Strophoïde droite



cycloïde

REMARQUES :

(1) Si l'on note $x(t)$ l'abscisse de M au temps t et $y(t)$ l'ordonnée de M au temps t, le tableau de variation de la strophoïde droite est de la forme suivante :

t	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x	1	↗		↗	1	↘		↘	1
$y'(t)$		$+$		$-$	0	$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	0	↘		↗	$+\infty$

(2) Nous pouvons parcourir la même courbe mais dans l'autre sens : deux mouvements différents peuvent décrire la même courbe du plan ;

(3) Les dessins des trajectoires ont mis en évidence des éléments remarquables de la courbe paramétrée :

- points de rencontre de la trajectoire (points multiples) / points où la vitesse s'annule (points singuliers) } points remarquables ;
- asymptotes à la courbe paramétrée.

2.2 définitions

DÉFINITION :

1. On appelle courbe plane paramétrée toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, c'est à dire telle que : $f(t) = (x(t);\ y(t))$;
2. On appelle domaine de définition de la courbe paramétrée, et on note $\mathcal{D}_f$, le plus grand sous-ensemble des réels t tels que $f(t)$ existe ;
3. On appelle support de la courbe paramétrée, et on note Γ, l'image de $\mathcal{D}_f$ par $f : \Gamma = f(\mathcal{D}_f) \subset \mathbb{R}^2$.

REMARQUES :

(1) Deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support ;

(2) Une courbe paramétrée peut être vue comme une fonction vectorielle : on peut en effet écrire : $f(t) = \overrightarrow{OM}(t)$, avec $M(t)(x(t);\ y(t))$;

(3) Une fonction de la variable réelle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, peut être vue comme une courbe paramétrée en posant : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$.

2.3 symétries et réduction du domaine d'étude

On considère $f(t) = (x(t);\ y(t))$ une courbe plane paramétrée définie sur un ensemble D. Il est possible de restreindre l'étude, en vue d'obtenir le tracé complet du support Γ, dans les situations suivantes :

➩ D est invariant par translation de $T > 0 (t \in D \Leftrightarrow x + T \in D)$: et $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$

On restreint l'étude à un intervalle de longueur T : on fait donc l'étude sur $D \cap \left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right]$. Puisque $f(t+T) = f(t)$ nous avons déjà décrit le support.

➩ D est symétrique par rapport à l'origine :

relation mathématique	réduction du domaine d'étude
Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	On restreint l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$. Le tracé du support sur $D \cap \mathbb{R}^-$ coincide alors avec le support obtenu sur $D \cap \mathbb{R}^+$.
Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	On restreint l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$ et on complète par symétrie de centre O.
Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	On restreint l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$ et on complète par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	On restreint l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$ et on complète par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
Si $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$	On restreint l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$ et on complète par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

➩ si $D = [a;\ b]$, pour $t \in \left[a;\ \frac{a+b}{2}\right]$, on pose : $t' = a + b - t \in \left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$ (t' est le symétrique de t par rapport à $\frac{a+b}{2}$). Alors, de la même façon :

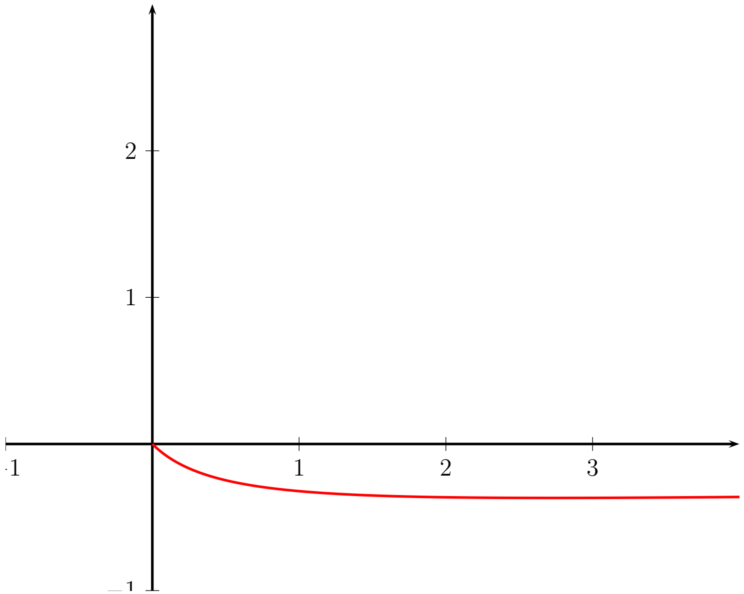
- Si $\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases}$, le tracé du support sur $\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$ coincide avec le support obtenu sur $\left[a;\ \frac{a+b}{2}\right]$;
- Si $\begin{cases} x(t') = -x(t) \\ y(t') = -y(t) \end{cases}$, on restreint l'étude sur $\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$ et on complète par symétrie de centre 0 ;
- Si $\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = -y(t) \end{cases}$, on restreint l'étude sur $\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
- Si $\begin{cases} x(t') = -x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases}$, on restreint l'étude sur $\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
- Si $\begin{cases} x(t') = y(t) \\ y(t') = x(t) \end{cases}$, on restreint l'étude sur $\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$ et on complète par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$;

Exemple : courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$.

➩ extensions : étude d'un exemple.

Considérons la courbe paramétrée : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -\frac{\ln(t)}{t} \\ y(t) = t\ln(t) \end{array}\right.$. Cette courbe est définie sur $D =]0;\ +\infty[$. On pose $I =]0;\ 1]$ et $J = [1;\ +\infty[$. Nous vérifions les points suivants :

- pour $t \in D$, $\frac{1}{t}$ existe et $\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t) \\ y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t) \end{array}\right.$;
- $t \in I \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in J$.



on obtient alors le support sur D par symétrie par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

3 Éléments remarquables d'une courbe paramétrée

Estimation : 2h
Durée : 3h15

3.1 tangente à une courbe paramétrée

DÉFINITION :

Soient f une courbe paramétrée définie sur un ensemble D par $f(t) = (x(t);\ y(t))$, $M(t)(x(t);\ y(t))$ et $M(t_0)(x(t_0);\ y(t_0))$. On dit que f admet une tangente en $M(t_0)$ lorsqu'il existe $\overrightarrow{u}_0 \neq \overrightarrow{0}$ et des vecteurs $\overrightarrow{u}(t)$ colinéaires à $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ tels que : $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u}_0$. La tangente est alors la droite passant par $M(T_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_0$.

illustration graphique

Exemple : Tangente en $M(0;\ 0)$ à la courbe paramétrée : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{array}\right.$

3.2 points remarquables

(a) points multiples

DÉFINITION :

Soit f une courbe paramétrée définie sur un ensemble D par $f(t) = (x(t);\ y(t))$.

1. Pour $t_0 \in D$, on dit que le point de coordonnées $(x(t_0);\ y(t_0))$ est multiple lorsqu'il existe (au moins) $t_1 \neq t_0$ tel que : $\left\{\begin{array}{l} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{array}\right.$;
2. si nous avons exactement k éléments de D pour lesquels : $\left\{\begin{array}{l} x(t_0) = x(t_1) = \ldots = x(t_k) \\ y(t_0) = y(t_1) = \ldots = y(t_k) \end{array}\right.$, on dit que $M(x(t_0);\ y(t_0))$ est de multiplicité k ;
3. Un point de multiplicité 2 est appelé point double.

Exemple : étude des points multiples de la courbe paramétrée $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = t^2 - t \end{array}\right.$

(b) points singuliers

DÉFINITION :

Soient f une courbe paramétrée définie sur un ensemble D par $f(t) = (x(t);\ y(t))$, et dérivable en $t_0 \in D$.

1. On dit que $M(t_0)(x(t_0);\ y(t_0))$ est singulier lorsque $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$;
2. Un point non singulier est dit régulier.

PROPOSITION :

Soient f une courbe paramétrée définie sur un ensemble D par $f(t) = (x(t);\ y(t))$, et dérivable en $t_0 \in D$.

1. Si $M(t_0)(x(t_0);\ t(t_0))$ est régulier, alors f admet une tangente en $M(t_0)$ de vecteur directeur : $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$;
2. Si $M(t_0)$ est singulier ET :
   - $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m \in \mathbb{R}$, alors f admet une tangente en M de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$;
   - $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \pm\infty$, alors f admet une tangente verticale en M.

Exemples :

(1) Tangente en $M(0;\ 0)$ à la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = t^2 - t \end{cases}$;

(2) Tangente en $M(0;\ 0)$ à la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$.

3.3 Branches infinies et asymptotes

DÉFINITION :

Soit $f(t) = (x(t);\ y(t))$ une courbe paramétrée. On dit que f admet une branche infinie quand t tend vers a ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$) lorsque : $\lim\limits_{t \to a} x(t) = \pm\infty$ **ou** $\lim\limits_{t \to a} x(t) = \pm\infty$.

La courbe paramétrée $f(t) = (x(t);\ y(t))$ admet une branche infinie en t_0 si et seulement si nous sommes dans l'une des situations ci-dessous :

(1) L'une des deux limites est finie :

(a) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to a} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t \to a} y(t) = y_0 \end{cases}$: nous avons une asymptote horizontale en a d'équation : $y = y_0$;

(b) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to a} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t \to a} y(t) = \pm\infty \end{cases}$: nous avons une asymptote verticale en a d'équation : $x = x_0$;

(2) les deux limites sont infinies : pour conclure, nous devons estimer $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

(a) Si cette limite est infinie, on dit que nous avons une branche parabolique de direction **l'axe des ordonnées** ;

(b) Si cette limite est nulle, on dit que nous avons une branche parabolique de direction **l'axe des abscisses** ;

(c) Si cette est limite est finie, on note alors $a = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. On distingue deux cas :
- **CAS 1 :** $\lim\limits_{t \to a}(y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$. Nous avons une asymptote oblique en a d'équation : $y = ax + b$;
- **CAS 2 :** $\lim\limits_{t \to a}(y(t) - ax(t)) = \pm\infty$. Nous avons une branche parabolique en a de direction : $y = ax$.

Exemples :

(1) étude des branches infinies de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$;

(2) étude des branches infinies de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$;

(3) étude de la branche infinie en $+\infty$ de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t + 2} \\ y(t) = t \end{cases}$.

4 Synthèse : étude d'un exemple concret

Estimation : 1h
Durée : 1h15

4.1 plan d'étude

Pour étudier une courbe paramétrée, on adoptera la démarche suivante :

(1) étude du domaine de définition puis réduction du domaine d'étude ;
(2) tableau de variation associé à la courbe paramétrée sur le domaine d'étude ;
(3) étude des branches infinies ;
(4) détermination des points remarquables et des tangentes associées ;
(5) tracé du support en faisant figurer les éléments remarquables étudiés.

4.2 exemple

Nous faisons ici l'étude complète de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{3}{t} \\ y(t) = \dfrac{3}{t^2 - 2t} \end{cases}$

(1) étude du domaine de définition puis réduction du domaine d'étude :

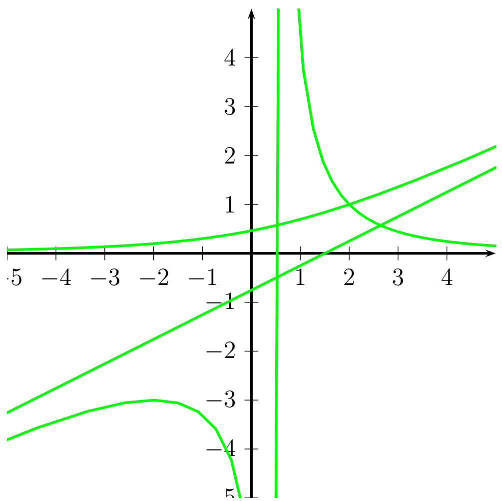
- domaine de définition : $I = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 2\} =]-\infty; 0[\cup]0;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.

(2) tableau de variation associé à la courbe paramétrée sur le domaine d'étude ;

(3) étude des branches infinies :

(4) détermination des points remarquables et des tangentes associées :

(5) tracé du support :



⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Lycée Pierre-Paul RIQUET — **Année 2010-2011**
Feuille d'exercices 6 — Mathématiques TSI-1

Courbes planes paramétrées

Dans tous les exercices, sauf spécifications contraires, on se place dans un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$.

Exercice 1 : On considère une courbe paramétrée f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f(t) = (x(t);\ y(t))$. On donne le tableau de variations associé sur $\mathbb{R}_+$:

t	0		1		2		4		10		$+\infty$
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1		
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1^-

On sait par ailleurs que pour réel positif t, $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$. Tracer le plus précisément possible le support de la courbe paramétrée.

Exercice 2 : On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = t^2 - t. \end{cases}$

1. Déterminer le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ associé à la courbe paramétrée.
2. Étudier les branches infinies et les éventuels points doubles.
3. Tracer le support Γ de la courbe paramétrée.
4. Montrer que Γ est inclus dans la courbe d' équation cartésienne : $y^3 = (y - x)(2y - x)$.

Exercice 3 : On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t\ln(t) \\ y(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}. \end{cases}$

1. Simplifier les expressions : $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$ puis proposer un domaine d'étude D de la courbe paramétrée.
2. Dresser le tableau de variations sur D, étudier les branches infinies, puis tracer le plus précisément possible le support de la courbe paramétrée.

Exercice 4 : On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t - 1}. \end{cases}$ On note Γ son support.

1. Montrer que Γ admet une asymptote oblique en $t = 1$ que l'on précisera. Étudier la position de Γ par rapport à l'asymptote.
2. Déterminer le point double A.
3. Déterminer le tableau de variations, puis tracer Γ.
4. Montrer que les tangentes à Γ en A sont orthogonales.

Exercice 5 : On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)} \\ y(t) = \dfrac{t^2-2t}{t-1} \end{cases}$. On note Γ son support.

1. Montrer que pour $t \notin \{-2;\ 0;\ 1\}$, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = 1 - \dfrac{4}{t^2}$.
2. Montrer que la courbe paramétrée admet une asymptote en $t = 1$ que l'on précisera, ainsi que la position de Γ par rapport à l'asymptote en $t = 1$.
3. Déterminer le point double.
4. Déterminer le tableau de variations, puis tracer le support de la courbe paramétrée.
5. Montrer que Γ a pour équation cartésienne : $x^3 + y^3 = xy$ (*on pourra poser $y = tx$*).

Exercice 6 : (Folium de Descartes) On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

1. Pour $t \notin \{0;\ -1\}$, simplifier les expressions : $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$ puis proposer un domaine d'étude de la courbe paramétrée.
2. Déterminer le tableau de variations associé sur $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1[$.
3. Montrer que la courbe paramétrée admet une asymptote en -1 dont on donnera une équation réduite, puis étudier la position de la courbe par rapport à cette dernière.
4. Tracer le support Γ de la courbe paramétrée.

Exercice 7 : (Astroïde) On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t). \end{cases}$

1. Déterminer les 4 points stationnaires de la courbe.
2. Tracer le support Γ de la courbe.

Exercice 8 : Préciser les points stationnaires puis faire l'étude de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t(1-e^t) \\ y(t) = \ln(\text{ch}(t)). \end{cases}$$

Exercice 9 : Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_t$ la droite d'équation $y = tx$ et C d'équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

1. Identifier C et déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et $\mathcal{D}_t$ que l'on notera $M(t)$. Faire une figure.
2. On note D la droite d'équation $x = 1$, $P(t)$ le point d'intersection de D avec $\mathcal{D}_t$, et $N(t)$ le point de $\mathcal{D}_t$ déterminé par la relation : $\overrightarrow{ON(t)} = \overrightarrow{M(t)P(t)}$. Montrer que les coordonnées $(x(t);\ y(t))$ de $N(t)$ sont tels que : $x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$; $y(t) = t\frac{t^2-1}{t^2+1}$, puis tracer le lieu des points $N(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$.
3. Pour $t \neq 0$, on note $H(t)$ l'orthocentre de $OAM(t)$, avec $A(1;\ 0)$. Montrer que $H(t)$ a pour coordonnées : $x(t) = \frac{2}{1+t^2}$; $y(t) = \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}$. Tracer le lieu de $H(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 10 : Existe-t-il une droite à la fois tangente et normale à la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$?

---

8. Primitives et équations différentielles linéaires

Table des matières

1 Primitives et intégrale **2**
1.1 Ensemble des primitives d'une fonction continue 2
1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment 3

2 Calcul pratique de primitives et d'intégrales **4**
2.1 Primitives usuelles 5
2.2 Opérations usuelles 7
2.3 Intégration par parties 8

3 Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 **9**
3.1 Vocabulaire 9
3.2 Équation complète et équation homogène 9
3.3 Principe de superposition 10

4 Résolution pratique **10**
4.1 Cas de l'équation homogène 10
4.2 Méthode de variation de la constante 11
4.3 Synthèse 11
4.4 Équations de la forme $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$ 12
4.5 Problème de Cauchy 12

Primitives et équations différentielles linéaires d'ordre 1

$\rightsquigarrow$ 5h

1 Primitives et intégrale

Estimation : 1h30
Durée : 30min

1.1 Ensemble des primitives d'une fonction continue

DÉFINITION :

On appelle primitive de f sur un ensemble D, et on note $\int f(x)\,dx$, toute fonction F dérivable sur D et telle que pour tout $x \in D, F'(x) = f(x)$.

Exemples :

(1) Une primitive de 0 sur $\mathbb{R}$ est ...;

(2) Une autre primitive de 0 sur $\mathbb{R}$ est par exemple ...;

(3) Une primitive de 1 sur $\mathbb{R}$ est ...;

(4) Une primitive de x sur $\mathbb{R}$ est ...;

THÉORÈME : (existence de primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive.

Exemples :

(1) Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est ...;

(2) Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est ....

PROPOSITION :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors :

1. Pour tout réel c, $G(x) = F(x) + c$ est une primitive de f sur I ;
2. Réciproquement, si G est une primitive de f, il existe un réel c tel que : $\forall x \in I, G(x) = F(x) + c$ (c'est à dire « deux primitives diffèrent d'une constante ») ;
3. Pour x_0 et m fixés, il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = m$.

Si I n'est pas un intervalle, deux primitives ne diffèrent pas forcément d'une constante : par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle) et telle que $\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x > 0 \\ f(x) = -1 \text{ sinon} \end{cases}$ est une primitive de la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$. La fonction 0 également, mais pourtant f et 0 ne diffèrent pas d'une constante ($f - 0 = f$ n'est pas constante !).

Exemples :

(1) Les primitives de id sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme : ... ;

(2) Les primitives de exp sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme : ... ;

(3) L'unique primitive de id valant 1 en 0 est ... ;

(4) L'unique primitive de exp valant 1 en 0 est ....

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

PROPOSITION :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;\ b]$. On note F_1 et F_2 deux primitives de f sur $[a;\ b]$. Alors : $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$.

DÉFINITION :

On appelle intégrale de f entre a et b, et on note : $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre réel : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur $[a;\ b]$.

REMARQUES :

(1) La proposition ci-dessus montre que la définition a un sens, c'est à dire que ce nombre est toujours le même quelle que soit la primitive F de f sur $[a;\ b]$;

(2) On utilise la notation suivante : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Exemples :

(1) Calculer $\int_0^1 x^3\,dx$;

(2) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

2 Calcul pratique de primitives et d'intégrales

Estimation : 1h30

Durée : 1h30

2.1 Primitives usuelles

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Domaine de validité
$x^n,\ \ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n},\ \ n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^\alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$]1, +\infty[$

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Domaine de validité
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Exemples : primitives de $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^3}$, 2^x.

2.2 Opérations usuelles

PROPOSITION : (linéarité de la primitivation)

Soient F_1 (resp. F_2) une primitive de f_1 (rep. f_2) sur un intervalle I. Alors :

1. $F_1 + F_2$ est une primitive de $f_1 + f_2$;
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λF_1 est une primitive de λf_1.

Exemples :

(1) La dérivée de $x^{\alpha+1}$ est $(\alpha+1)x^\alpha$. Ainsi une primitive de $f(x) = (\alpha+1)x^\alpha$ est $x^{\alpha+1}$. Par linéarité, pour $\alpha \neq -1$, $x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} \times f(x)$ donc une primitive de x^α est $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$;

(2) Une primitive de $x^2 - x + 1$ est . . . ;

(3) Une primitive de $2e^x$ est . . ..

On n'obtient pas la primitive d'un produit (ou d'un quotient) en faisant le produit (ou le quotient) des primitives de chaque fonction ! ! Par exemple une primitive de $\frac{1}{x^2}$ n'est pas $\dfrac{x}{\frac{x^3}{3}} = \dfrac{3}{x^2}$.

PROPOSITION :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de primitive F,et u une fonction dérivable et telle que $F \circ u$ ait un sens. Alors une primitive de $u' \times f(u)$ est $F(u)$.

On en déduit le tableau (non exhaustif) ci-dessous :

Exemples :

(1) Primitive de $\tan(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$;

(2) Primitive de $\dfrac{1}{x+1}$ sur $I =]-1;\ +\infty[$;

(3) Primitive de $\frac{1}{(1+x)^2}$ sur $I =]-1;\ +\infty[$;

(4) Primitive de e^{2x} sur $\mathbb{R}$;

(5) Primitive de $\sin(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$;

(6) primitive de $e^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction u est dérivable sur un **intervalle** I.

Fonction f	**Une primitive sur I**
$f = \dfrac{u'}{u}$, la fonction u ne s'annule pas sur I	$F = \ln\ u$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, la fonction u est strictement positive sur I	$F = 2\sqrt{u}$
$f = u'u^\alpha$, avec $\alpha \neq -1$	$F = \dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$f = u'\cos(u)$	$\sin(u)$

Tab. 1 – Primitives de formes usuelles

2.3 Intégration par parties

DÉFINITION :

On dit qu'une fonction f définie sur D est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D lorsque f est dérivable sur D et f' continue.

PROPOSITION : (intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions. Alors :

1. Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, alors :
$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx;$$
2. Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;\ b]$, alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemples :

(1) Primitive de $f(x) = \ln(x)$ sur $I =]0;\ +\infty[$;

(2) Calcul de $\int_1^e \ln(x)\,dx$;

(3) Primitive de xe^x sur $\mathbb{R}$;

(4) Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$.

3 Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Estimation : 1h
Durée : 1h

3.1 Vocabulaire

DÉFINITION :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme : $\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x)$, avec α,β,γ continues sur un ensemble D.

REMARQUES :

(1) Les fonctions α,β sont appelés coefficients de l'équation différentielle ;

(2) γ est appelé second membre de l'équation différentielle.

Exemples :

(1) $f(x)=e^x$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 (qui plus est à coefficients constants) : $y'-y=0$

(2) $f(x)=\ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $xy'=1$;

(3) $y'=f$ avec f fixé et continue sur un intervalle I est un exemple d'équation différentielle linéaire du premier ordre. L'ensemble des primitives est donc un ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ;

(4) $y'=1+y^2$ est un exemple d'équation différentielle non linéaire. $\tan(x)$ est une solution sur $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

3.2 Équation complète et équation homogène

DÉFINITION :

On appelle équation homogène associée à l'équation différentielle (E) $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ l'équation $(\mathrm{E_H})$ $y'(x)+a(x)y(x)=0$.

REMARQUES :

(1) L'équation homogène est aussi appelée équation sans second membre ;

(2) L'équation avec second membre est appelée équation complète.

PROPOSITION :

1. Si y et y_P sont solutions de l'équation complète, alors $y_H=y-y_P$ est solution de l'équation homogène ;
2. Réciproquement, si y_P et y_H sont respectivement solutions de l'équation complète et de l'équation homogène, alors $y=y_H+y_P$ est solution de l'équation complète.

REMARQUES :

(1) Autrement dit, si S et S_H sont respectivement l'ensemble des solutions de l'équation complète et de l'équation homogène et y_P est une solution de l'équation complète, alors $S=S_H+y_P$.

3.3 Principe de superposition

PROPOSITION :

Soit (E) $\alpha(x)y'(x)+\beta y(x)=g_1(x)+g_2(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions des équations différentielles $\alpha(x)y'(x)+\beta y(x)=g_1(x)$ et $\alpha y'(x)+\beta y(x)=g_2(x)$, alors $y=y_1+y_2$ est solution de (E).

4 Résolution pratique

Estimation : 2h
Durée : 2h

4.1 Cas de l'équation homogène

THÉORÈME :

Soit $(\mathrm{E_H})$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y'(x)+a(x)y(x)=0$, avec a continue sur un intervalle I. Alors, notant A une primitive (quelconque) de a sur I, l'ensemble des solutions (réelles) de $(\mathrm{E_H})$, noté S_H est :

$$S_H=\left\{Ce^{-A(x)},C\in\mathbb{R}\right\}.$$

explications.

Nous avons : $y' + ay = 0 \Leftrightarrow y' = -ay$
$\frac{y'}{y} = -a$
$(\ln y)' = -A(x) + c$
$y = e^{\ln(y)} = e^{-A(x)+c}$
$y = Ce^{-A(x)}$ avec $C = e^{-c}$

Exemples :
(1) $y' - xy = 0 : S_H = \ldots;$
(2) $y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0 : S_H = \ldots.$

4.2 Méthode de variation de la constante

Elle permet de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = g(x)$. On rappelle que : $S_H = \left\{Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\right\}$, où A est une primitive de a sur I.

Le principe est le suivant : on cherche une solution particulière de la forme : $y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$ (c'est à dire de forme similaire aux solutions de l'équation homogène mais avec C que l'on ne suppose plus constant, d'où le nom de la méthode).

Nous avons :
y_P solution de (E) $\Leftrightarrow y'_P(x) + a(x)y_P(x) = b(x)$
$\Leftrightarrow C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} = b(x)$
$\Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{A(x)}.$
Exemple : Solution particulière de $y' - \frac{x}{1+x^2}y = x$.

4.3 Synthèse

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$, on procède comme suit :

- on résout l'équation différentielle homogène associée ;
- on détermine une solution particulière de l'équation différentielle complète (variation de la constante+principe de superposition) ;
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle complète sont alors les fonctions qui s'écrivent comme somme de la fonction particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Exempple : Résolution de $y' - \frac{y}{x} = 1$.

4.4 Équations de la forme $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$

On se ramène à la résolution de'une équation de la forme $y'(x)+a(x)y(x) = g(x)$ sur chaque intervalle où α ne s'annule pas :

$$\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x) \Leftrightarrow y'(x) + \underbrace{\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}}_{a(x)} y(x) = \underbrace{\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}}_{b(x)} \text{ pour } \alpha(x) \neq 0.$$

Exemples :
(1) Résolution de $xy' - y = x$;
(2) Résolution de $xy' + y = x$.

4.5 Problème de Cauchy

En cinématique, la trajectoire d'un mobile est uniquement déterminée par la position et la vitesse initiale de ce-dernier. La question de sa généralisation mathématique s'inscrit dans la notion de problème de Cauchy.

DÉFINITION :

> On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $\alpha(t)y' + \beta(t)y = g(t)$, avec α et β continues sur un ensemble D, le système :
> $$\begin{cases} \alpha(t)y' + \beta(t)y = g(t) \\ y(x_0) = m_0 \end{cases};$$
> où x_0 et m_0 sont donnés. Un problème de Cauchy est donc un système constitué d'une équation différentielle et de conditions appelées conditions initiales.

Exemples :

(1) Solutions du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - xy = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}.$

PROPOSITION : (unicité du problème de Cauchy)

> Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme : $\alpha y'(x)+\beta y(x) = \gamma$, avec α, β et γ continues sur un ensemble D. Alors, quelles que soient les conditions initiales, les problèmes de Cauchy associés admettent une unique solution **sur chaque intervalle où α ne s'annule pas**.

REMARQUES :

(1) On appelle souvent courbe intégrale l'unique solution d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ;

(2) La proposition précédente s'énonce alors comme-suit : « deux courbes intégrales distinctes associées à une même équation différentielle ne se coupent pas »ou encore « Si deux courbes intégrales associées à une même équation différentielle se coupent, alors elles sont confondues ».

Exemple : Résolution du problème de Cauchy sur $]0;\ +\infty[$: $\left\{\begin{array}{l} xy' - y = 0 \\ y(1) = m \end{array}\right.$, avec $m \in \mathbb{R}$ et dessin des courbes intégrales.

$\star$

$\star \quad \star$

$\star \quad \star \quad \star$

Primitives et équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé :

(a) $\dfrac{2x+1}{x},\ I=\mathbb{R}_-^*$; (b) $\dfrac{x}{2x+1},\ I=\mathbb{R}_+^*$; (c) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}},\ I=\mathbb{R}_+^*$;

(d) $\dfrac{2x+1}{x^2+x},\ I=\mathbb{R}_+^*$; (e) $\dfrac{2x+3}{x^2+x},\ I=\mathbb{R}_+^*$; (f) $\sqrt{2x+1},\ I=\left]-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right[$;

(g) $\mathrm{sh}(4x),\ I=\mathbb{R}$; (h) $\dfrac{e^x}{e^x+1},\ I=\mathbb{R}_+$; (i) $\dfrac{1}{e^x+1},\ I=\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 : Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous sur l'intervalle proposé :

(a) $xe^{2x^2},\ I=\mathbb{R}$;

(b) $\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}},\ I=\mathbb{R}_+^*$;

(c) $\sin(x)e^{-\cos(x)},\ I=\mathbb{R}$;

(d) $\dfrac{-4x}{1+x^2},\ I=\mathbb{R}$;

(e) $\dfrac{1}{1-x},\ I_1=]-\infty;\ 1[$ puis $I_2=]1;\ +\infty[$;

(f) $\dfrac{1}{x(x-1)},\ I_1=]-\infty;\ 0[$ puis $I_2=]0;\ 1[$ puis $I_3=]1;\ +\infty[$;

(g) $\dfrac{1}{1+x},\ I=]-1;\ +\infty[$;

(h) $\dfrac{1}{x^2-1},\ I_1=]-\infty;\ -1[$ puis $I_2=]-1;\ 1[$ puis $I_3=]1;\ +\infty[$;

(i) $\dfrac{1}{x\left(\ln(x)\right)^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R},\ I=\mathbb{R}_+^*$;

(j) $\sin^3(x),\ I=\mathbb{R}$.

Indications : pour (f), chercher deux réels a et b tels que : $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}$. *Procéder de même pour (h).*

Exercice 3 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé à l'aide d'une intégration par parties.

(a) $f(x)=x\ln(x),\ I=\mathbb{R}_+^*$; (b) $f(x)=\ln(1-x),\ I=]-\infty;\ 1[$; (c) $f(x)=x^2e^x,\ I=\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)e^{3x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\ln(x)\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n}dx,\quad n\in\mathbb{N}$; (e) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)^2\,dt$; (f) $\displaystyle\int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 (x+1)\cos(x)e^{-x}\,dx$; (h) $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\cos^3(x)\,dx$; (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x)\sin^2(x)\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos(x)\,dx$; (k) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sin^4(x)\,dx$; (l) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$;

(m) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x)\,dx$; (n) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}^3(x)\,dx$; (o) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^3(x)\,dx$.

Exercice 5 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' + xy = 0$; (b) $y' + 4xy = x$;

(c) $y' + \frac{1}{x^2}y = e^{1/x}$; (d) $y' + \dfrac{2x-1}{x^2}y = \dfrac{1}{x^4}$;

(e) $y' + \sin(x)y = \sin(x)$; (f) $y' + \tan(x)y = \cos(x)$ $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$;

(g) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$; (h) $y' + \tan(x)y = \sin(x)\cos(x), I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$;

(i) $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$; (j) $(1+x)y' + y = 1 + x$;

(k) $x(x^2-1)y' + xy = 0$; (l) $xy' + \ln(x)y = \ln(x)$;

(m) $(1-x^2)y' + 2xy + 2x = 0$; (n) $xy' - 2y = x^4$;

(o) $y' + \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}(x)$; (p) $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$;

(q) $xy' + y = x^2e^x,\ I = \mathbb{R}_+^*$; (r) $xy' - y = x\ln(x),\ I = \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $ty' + y = -1$ telle que : $y(1) = a - 1$.

1. Montrer que $f_a'(1) = -a$ puis déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}_a$ à la courbe représentative de f_a au point d'abscisse 1.
2. Montrer que les droites $\mathcal{D}_a$ sont concourantes en un point que l'on déterminera.

Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $2yy' = (1+y^2)x$; (*méthode de séparation des variables*)
(b) $yy' = y^2 + 1$. (*se ramener à l'étude d'une autre fonction*).

Exercice 8 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ en posant $z = y' - y$.

Exercice 9 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(1+e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x+1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y$.

Exercice 10 : Déterminer les solutions de l'équation différentielle : $x^2y' = x^2 + 3xy + y^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annulant pas (*Poser :* $t(x) = \frac{y(x)}{x}$ *et montrer que* t *est solution d'une équation de Ricatti*).

---

9. Coniques

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 présentation 2
1.2 équation cartésienne dans le repère focal 2
1.3 symétries 4

2 Parabole **4**
2.1 définition 4
2.2 équation réduite d'une parabole 4
2.3 synthèse 5
2.4 représentation paramétrique 5
2.5 équations des tangentes 6

3 Ellipse **6**
3.1 définition 6
3.2 équation réduite d'une ellipse 6
3.3 synthèse 7
3.4 représentation paramétrique 8
3.5 équations des tangentes 8
3.6 caractérisation bifocale 8

4 Hyperbole **8**
4.1 définition 8
4.2 équation réduite d'une hyperbole 9
4.3 synthèse 9
4.4 représentation paramétrique 10
4.5 équations des tangentes 10
4.6 caractérisation bifocale 11

Coniques

⇝ 5h45

On note $\mathcal{P}$ le plan usuel et $\mathcal{R} = (0;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

1 Généralités

Estimation : 1h30
Durée : 50min

1.1 présentation

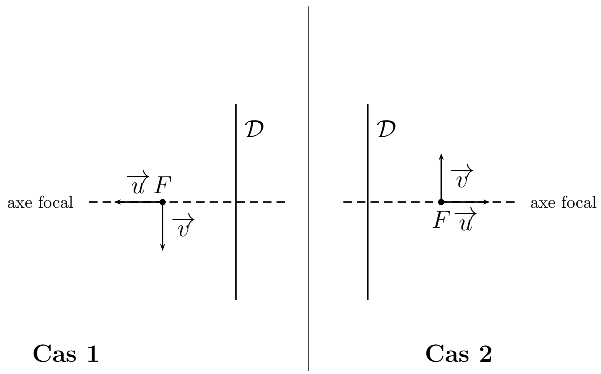
DÉFINITION :

1. Soient $\mathcal{D}$ une droite, F un point n'appartenant pas à D et $e > 0$. On appelle conique de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, l'ensemble des points M du plan tels que : $MF = ed(M;\ \mathcal{D})$;
2. On appelle axe focal d'une conique la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F.

1.2 équation cartésienne dans le repère focal

Soient :

- $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur unitaire de la directrice ;
- $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de l'axe focal ;
- On suppose $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orientés de plus dans le sens direct :



<u>DÉFINITION</u> :

Le repère $\mathcal{R}' = (F;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé <u>repère focal</u>.

REMARQUE : Dans $\mathcal{R}'$:

(1) l'axe focal a pour équation : $y = 0$;

(2) la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation : $x = -q$ avec $q > 0$;

(3) Si $M(x;\ y)$, alors $H(-q;\ y)$.

PROPOSITION : (équation réduite)

Si l'on appelle $p = eq > 0$ le paramètre de la conique C, alors C a pour équation cartésienne dans $\mathcal{R}'$:

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2.$$

REMARQUES :

(1) $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ex + p = 0$. Plus généralement une équation dans un repère orthonormée direct de la forme : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = (ax+by+c)^2$ est l'équation d'une conique de directrice d'équation cartésienne : $ax + b + y = 0$ et de foyer $F(x_0;\ y_0)$;

(2) Si nous avions autorisé $e = 0$, nous aurions obtenu l'équation d'un cercle.

1.3 symétries

PROPOSITION :

L'axe focal est axe de symétrie de la conique.

2 Parabole

Estimation : 1h
Durée : 1h

2.1 définition

<u>DÉFINITION</u> :

On appelle parabole une conique d'excentricité $e = 1$.

2.2 équation réduite d'une parabole

PROPOSITION :

Il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_0$ dans lequel une parabole C a pour équation : $Y^2 = 2pX$.

REMARQUES :

(1) Le repère $\mathcal{R}_0$ est obtenu en translatant le repère focal.

<u>DÉFINITION</u> :

1. L'équation : $Y^2 = 2pX$ est appelée équation réduite de la parabole ;
2. Le point $S\left(\frac{-p}{2};\ 0\right)$ dans le repère focal est appelé sommet de la parabole.

2.3 synthèse

PROPOSITION : (éléments caractéristiques de la parabole dans $\mathcal{R}_0$)

Le tableau ci-dessous donne les expressions des différents éléments associés à la parabole dans le repère $\mathcal{R}_0$:

Parabole		
sommet	foyer	directrice
$S(0;0)$	$F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$	$X = -\frac{p}{2}$

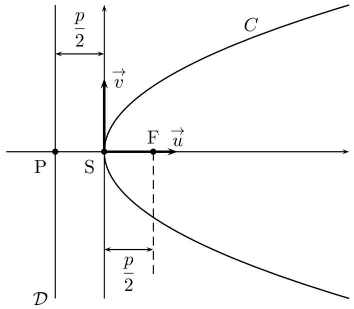


FIG. 1 – Parabole de paramètre p

Exemples :

(1) équation réduite, éléments caractéristiques et tracé de C d'équation : $y^2 = x$.

(2) équation réduite, éléments caractéristiques et tracé de C d'équation : $y = x^2$.

2.4 représentation paramétrique

PROPOSITION :

Soit C une parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$. Alors C admet une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$.

2.5 équations des tangentes

PROPOSITION :

Soient C une parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$ et $M(x_0;\ y_0)$ un point de la parabole. Alors C admet une tangente en M d'équation : $yy_0 = p(x+x_0)$.

Exemples :

(1) équation de la tangente en $(1;\ 1)$ à la parabole d'équation : $y^2 = x$.

(2) équation de la tangente en $(1;\ 1)$ à la parabole d'équation : $y = x^2$.

3 Ellipse

Estimation : 2h

Durée : 2h10

3.1 définition

DÉFINITION :

On appelle ellipse une conique d'excentricité $e < 1$.

3.2 équation réduite d'une ellipse

PROPOSITION :

1. Il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_0$ dans lequel une ellipse C a pour équation : $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, avec $a > b > 0$;
2. L'origine Ω de $\mathcal{R}_0$ est centre de symétrie de l'ellipse.

DÉFINITION :

1. F et son symétrique F' par rapport à Ω sont appelés foyers de l'ellipse ;
2. $\mathcal{D}$ et son symétrique $\mathcal{D}'$ sont appelées directrices de l'ellipse ;
3. $S_1(a;\ 0)$ et $S_1'(-a;\ 0)$ (dans $\mathcal{R}_0$) sont appelés sommets principaux de l'ellipse ;
4. $S_2(0;\ b)$ et $S_2'(0;\ -b)$ (dans $\mathcal{R}_0$) sont appelés sommets secondaires de l'ellipse ;
5. le cercle de centre Ω et de rayon a est appelé cercle principal de l'ellipse.

3.3 synthèse

PROPOSITION : (éléments caractéristiques de l'ellipse dans $\mathcal{R}_0$)

Le tableau ci-dessous donne les expressions des différents éléments associés à l'ellipse dans le repère $\mathcal{R}_0$:

Ellipse d'équation : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$				
excentricité	sommets	foyers	directrices	centre
$e=\frac{c}{a}$	principaux $(\pm a;\ 0)$ secondaires $(0;\ \pm b)$	$F\ (c;\ 0)$ $F'\ (-c;\ 0)$	$X=\pm\frac{a^2}{c}$	$\Omega(0;\ 0)$
$c^2=a^2-b^2, c>0$				

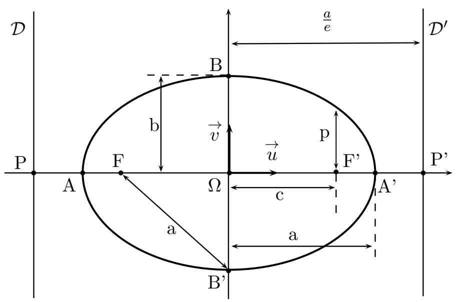


Fig. 2 – Ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Exemples :

(1) nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$;

3.4 représentation paramétrique

PROPOSITION :

Soit C une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Alors C admet une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases} x(t)=a\cos(t) \\ y(t)=b\sin(t) \end{cases}$.

3.5 équations des tangentes

PROPOSITION :

Soient C une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $M(x_0;\ y_0)$ un point de l'ellipse. Alors C admet une tangente en M d'équation : $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Exemples :

(1) équation de la tangente en $M(5;/1)$ à l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

3.6 caractérisation bifocale

PROPOSITION :

1. Si C est une ellipse de foyers F et F', alors : $MF+MF'=2a$;
2. Réciproquement, pour F et F' distincts, l'ensemble des points M tels que $MF+MF'$ est constante est une ellipse de foyers F et F'.

4 Hyperbole

Estimation : 1h30
Durée : 1h45

4.1 définition

DÉFINITION :

On appelle hyperbole une conique d'excentricité $e>1$.

4.2 équation réduite d'une hyperbole

PROPOSITION :

1. Il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_0$ dans lequel une hyperbole C a pour équation : $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, avec $a > 0$ et $b > 0$;
2. L'origine Ω de $\mathcal{R}_0$ est centre de symétrie de l'hyperbole.

DÉFINITION :

1. F et son symétrique F' par rapport à Ω sont appelés foyers de l'hyperbole ;
2. $\mathcal{D}$ et son symétrique $\mathcal{D}'$ sont appelées directrices de l'hyperbole ;
3. $S(a;\ 0)$ et $S'(-a;\ 0)$ (dans $\mathcal{R}_0$) sont appelés sommets de l'hyperbole.

4.3 synthèse

PROPOSITION : (éléments caractéristiques de l'hyperbole dans $\mathcal{R}_0$)

Le tableau ci-dessous donne les expressions des différents éléments associés à l'hyperbole dans le repère $\mathcal{R}_0$:

Hyperbole d'équation : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$					
excentricité	sommets	foyers	directrices	centre	asymptotes
$e = \frac{c}{a}$	$S\,(a;\ 0)$ $S'\,(-a;\ 0)$	$F\,(c;\ 0)$ $F'\,(-c;\ 0)$	$X = \pm\frac{a^2}{c}$	$\Omega(0;\ 0)$	$Y = \pm\frac{b}{a}X$
$c^2 = a^2 + b^2, c > 0$					

Exemples :

(1) nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $x^2 - y^2 = 1$;

(2) nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $y^2 - x^2 = 1$.

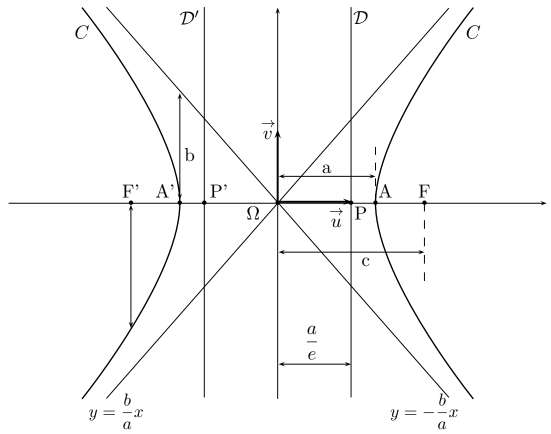


FIG. 3 – Hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4.4 représentation paramétrique

PROPOSITION :

Soit C une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Alors :

1. La branche positive ($x > 0$) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = a\text{ch}(t) \\ y(t) = b\text{sh}(t) \end{cases}$;
2. La branche négative ($x < 0$) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = -a\text{ch}(t) \\ y(t) = b\text{sh}(t) \end{cases}$;

4.5 équations des tangentes

PROPOSITION :

Soient C une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $M(x_0;\ y_0)$ un point de l'hyperbole. Alors C admet une tangente en M d'équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemples :

(1) équation de la tangente en $M(1; /0)$ à l'ellipse d'équation : $x^2 - y^2 = 1$;

4.6 caractérisation bifocale

PROPOSITION :

1. Si C est une hyperbole de foyers F et F', alors : $|MF - MF'| = 2a$;
2. Réciproquement, pour F et F' distincts, l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'|$ est constante est une hyperbole de foyers F et F'.

$\star$

$\star \quad \star$

$\star \quad \star \quad \star$

Coniques

Dans tous les exercices, sauf spécifications contraires, on se place dans un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$.

Exercice 1 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des courbes d'équations :

(a) $9y^2 - 4x^2 = 4$;

(b) $4x^2 + y^2 = 1$

(c) $x^2 - y^2 - 2x = 0$;

(d) $y^2 - 3x + 4 = 0$

(e) $3x^2 + 4y^2 - 4y - 4 = 0$;

(f) $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$

(g) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 32 = 0$;

(h) $6x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$;

(i) $x^2 + 4y + 2 = 0$;

(j) $4y^2 = |9x^2 - 36x|$;

(k) $(x - \lambda)^2 + \lambda y^2 = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$;

(l) $(1 + \lambda)x^2 - (1 + \lambda)y^2 + 2x + 2y + \lambda - 1 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Déterminer ci-dessous la nature des coniques C ainsi que la tangente T au point M proposé, puis construire C et T.

(a) $C : y^2 - 6y - 2x + 11 = 0,\ M(3;\ 1)$;

(b) $C : 3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0,\ M(0;\ -\frac{3}{2})$;

(c) $C : y^2 + 4y - 3x^2 + 6x = 0,\ M(2;\ 0)$.

Exercice 3 : Déterminer une équation cartésienne des courbes suivantes :

(a) la parabole de foyer $F(\frac{1}{2};\ 2)$ et de directrice d'équation : $x = 3$;

(b) la conique d'excentricité 5, de foyer $F(3;\ 2)$ et de directrice d'équation : $y = 1$;

(c) l'ellipse tangente à l'axe des abscisses et de sommets principaux : $S'(1;\ 1)$ et $S(5;\ 1)$.

Exercice 4 : Montrer que les ensembles des points de coordonnées polaires : $(r;\ \theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\ \pi]$ sont inclus (ou égaux) dans des coniques dont on déterminera une équation cartésienne, puis la nature :

$$\text{(a) } r = \frac{4}{3 + \cos(\theta)};\quad \text{(b) } r = \frac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/3)};\quad \text{(c) } r = \frac{3}{1 + 2\sin(\theta)}.$$

Exercice 5 :

1. On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > 0$ et $b > 0$.
   (a) On dit qu'une hyperbole est **équilatère** lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires. Démontrer que'une hyperbole est équilatère si et seulement si $e = \sqrt{2}$.

(b) Déterminer une équation cartésienne de l'hyperbole $\mathcal{H}$ dans le repère $(0; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ où $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ sont des vecteurs directeurs des asymptotes de l'hyperbole.

2. On considère la courbe $\mathcal{H}'$ d'équation cartésienne : $xy = k$ avec $k > 0$. Démontrer que $\mathcal{H}'$ est une hyperbole dont on précisera les foyers et les directrices.

Exercice 6 :

Déterminer l'ensemble E des points M du plan d'affixe z tels que les points A, M, M' d'affixes respectives $1, z$ et z^4 soient alignés. (on pourra poser $z = x + iy$ et exprimer le complexe $1 + z + z^2 + z^3$ en fonction de x et y). Construire l'ensemble E.

Exercice 7 : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On note $M(z)$ et $M'(z')$ les points du plan associés. Montrer que lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 2, M' décrit une conique dont on précisera la nature, ainsi que les éléménts caractéristiques.

Exercice 8 : Soit C la conique d'équation : $3(x + 1)^2 + 4y^2 = 12$.

1. Déterminer la nature de cette conique et la construire.
2. Montrer qu' une représentation polaire de cette conique est : $r = \dfrac{3}{2 + \cos(\theta)}$.
3. Soient M et M' deux points de C d'affixes respectives z et z' d'arguments respectifes θ et $\theta + \pi$. Calculer $||\overrightarrow{MM'}||$ en fonction de θ puis déterminer les valeurs de θ pour lesquelles cette longueur est minimale, puis maximale.

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tels que :

(a) $|z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\overline{z} - 8(1 + i)|$;

(b) $\left|\dfrac{z - 1 - i}{z + \overline{z} + 4}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 10 :

1. On s'intéresse à la courbe C dont une équation cartésienne est : $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 4$. On note $\mathcal{R}'$ le nouveau repère d'origine O et de base l'image de la base de départ par la rotation d'angle θ.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de C dans $\mathcal{R}'$ en fonction de θ.
   (b) Déterminer une valeur de θ pour laquelle une équation cartésienne de C dans $\mathcal{R}'$ est : $X^2 + 4Y^2 = 1$.
   (c) Construire C et préciser ses éléments caractéristiques.
2. En procédant de même, reconnaître l'ensemble des points $M(x;\ y)$ tels que : $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$.

Exercice 11 : Montrer que les solutions de l'équation : $z^2 + 2z - it = 0$, avec $t \in \mathbb{R}$ sont situés sur une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques, puis que l'on tracera.

Exercice 12 : On considère une ellipse C de centre O, A un point de C et A' le symétrique de A, D La droite perpendiculaire à la tangente en A et M l'intersection de M avec (OA). Quel est l'ensemble des points M lorsque A décrit C ?

Exercice 13 : Soient $a \geq 0$, $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, C le cercle de diamètre AB, P un point de C, D la tangente en A à C, Q le point d'intersection de D et de la tangente en P à C, M le point d'intersection de (BQ) et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par P. Déterminer le lieu de M lorsque P décrit C.

Exercice 14 : On considère une ellipse C de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Soit M_0 un point de C différent des sommets situés sur l'axe focal. La tangente à C en M_0 coupe $\mathcal{D}$ en H. Montrer que le triangle M_0FH est rectangle en H.

---

10. Bijections et fonctions reciproques

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 application, image, antécédents . . . 2
1.2 image directe et image réciproque . . . 2
1.3 applications bijectives . . . 3
1.4 applications réciproques . . . 3

2 Cas des fonctions réelles **4**
2.1 courbes représentatives d'une fonction et de sa réciproque . . . 4
2.2 théorème de la bijection . . . 5
2.3 deux exemples basiques d'utilisation du théorème de la bijection 5
2.4 dérivée d'une fonction réciproque . . . 6

3 Fonctions trigonométriques réciproques **6**
3.1 fonction arcos . . . 6
3.2 fonction arcsin . . . 7
3.3 fonction arctan . . . 9

4 Fonctions hyperboliques réciproques **11**
4.1 fonction argsh . . . 11
4.2 fonction argch . . . 12
4.3 fonction argth . . . 15
4.4 compléments . . . 15

Bijections et fonctions réciproques

$\rightsquigarrow$ 5h30

1 Généralités

Estimation : 1h30
Durée : 1h10

1.1 application, image, antécédents

DÉFINITION :

Une application f de E vers F (on note $f : E \to F$) est un procédé qui a tout élément x associe un **unique** élément y de f. On note alors $y = f(x)$ et :
– y est appelé l'image de x par f ;
– x est un antécédent de y ;
– E est l'ensemble de départ et F l'ensembe d'arrivée.

REMARQUES :

(1) Une fonction est une application sur son domaine de définition ;

(2) Un élément de l'espace d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents. Considérons par exemple l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tous réel x associe $f(x) = x^2$. Alors 1 a exactement deux antécédents par f : 1 et -1.

notation : On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

1.2 image directe et image réciproque

DÉFINITION :

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Pour $A \subset E$, l'image directe de A par f, noté $f(A)$ est le sous-ensemble de F : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$;
2. Pour $B \subset F$, l'image réciproque de B par f, noté $f^{-1}(B)$, est le sous-ensemble de E : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

Exemples :

(1) $f(x) = x^2$: $f(\mathbb{R}) = \ldots$, $f^{-1}(\{1\}) = \ldots$, $f^{-1}(]0;\ 1]) = \ldots$, $f^{-1}(]-1;\ 1]) = \ldots$;

(2) $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in [0;\ 4\pi]$: $f([0;\ 2\pi]) = \ldots$, $f^{-1}([0;\ 1]) = \ldots$;

(3) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$: $f(\mathbb{R}) = \ldots$

1.3 applications bijectives

DÉFINITION :

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est :

1. injective lorsque : $\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (tout élément de F admet au plus un antécédent) ;
2. surjective lorsque : $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$ (tout élément de F admet au moins un antécédent) ;
3. bijective lorsque f est sutjective et injective (tout élément de F admet exactement un antécédent).

Exemples :

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par$f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ n'est ni injective, ni surjective ;

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par$f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ n'est pas injective, mais surjective ; $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par$f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ est injective et surjective, donc bijective.

REMARQUES :

(1) f bijective si et seulement si $\forall y \in F, \exists \underbrace{!}_{\text{unique}} x \in E / y = f(x)$;

(2) f injective si et seulement si $\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$;

(3) f surjective si et seulement si $f(E) = F$.

1.4 applications réciproques

DÉFINITION :

Soit $f : E \to F$. On appelle application réciproque de f, lorqu'elle existe, et on note f^{-1}, l'application de F vers E et telle que :

$$\forall x \in \ldots, f \circ f^{-1}(x) = x$$
$$\forall x \in \ldots, f^{-1} \circ f(x) = x$$

REMARQUES :

(1) Il existe au plus une seule application vérifiant les conditions précédentes, ce qui justifie la légitimité de la définition ;

(2) Il est possible de prouver que si f admet une application réciproque, forcément f et f^{-1} sont bijectives ;

(3) Si f admet une application réciproque, alors pour $x \in F$ fixé,
$f(u) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(u)) = f^{-1}(x)$ car f^{-1} est injective .
$\Leftrightarrow u = f^{-1}(x)$ car $f^{-1} \circ f = id$.
L'équation $f(u) = x$ admet donc une unique solution et la résolution permet de déterminer f^{-1}. C'est ce que l'on utilisera en pratique.

THÉORÈME :

Une application $f : E \to F$ admet une application réciproque si et seulmeent si elle est bijective.

Exemples :

(1) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$. Pour déterminer f^{-1}, on résout $f(u) = x$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. On obtient : $u = \sqrt{x}$: l'application réciproque est donc la fonction racine (faire les courbes représentatives) ;

(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z + 3$ est bijective et $f^{-1}(z) = \ldots$.

2 Cas des fonctions réelles

Estimation : 1h30
Durée : 1h50

2.1 courbes représentatives d'une fonction et de sa réciproque

PROPOSITION : (courbe représentative de f^{-1})

Soit f une application admettant une application réciproque f^{-1}. Alors, la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$

REMARQUES :

(1) Si f n'est pas strictement monotone, on remarque que le symétrique de la courbe représentative ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction. Considérer par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

2.2 théorème de la bijection

THÉORÈME : (de la bijection)

Soient I intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue** ET **strictement monotone**. Alors f induit une bijection de I sur $f(I)$. On détermine de plus I à l'aide du tableau suivant :

intervalle I	**monotonie de f sur I**	**f(I)**
$[a;\ b]$, a réel, b réel	strictement croissante	$[f(a);\ f(b)]$
	strictement décroissante	$[f(b);\ f(a)]$
$]a;\ b]$, a réel ou $-\infty$, b réel	strictement croissante	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\ f(b)]$
	strictement décroissante	$[f(b);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;\ b[$, a réel, b réel ou $+\infty$	strictement croissante	$[f(a);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$
	strictement décroissante	$[\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\ f(a)[$
$]a;\ b[$, a réel ou $-\infty$, b réel ou $+\infty$	strictement croissante	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(b)[$
	strictement décroissante	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$

Exemples :

(1) La fonction ln vérifie : $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$. Ainsi, f est strictement croissante, donc d'après le théorème de la bijection, induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Son application réciproque n'est autre que la fonction exponentielle (en effet nous avions défini exp à partir de l'équation $\ln(u) = x$) ! !

(2) Fonction exponentielle de base a.

2.3 deux exemples basiques d'utilisation du théorème de la bijection

Exercice : Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ admet une application réciproque.

REMARQUE : Il est possible d'expliciter cette dernière. Nous résolvons pour ceci l'équation $\sqrt{u+1} = x$ pour $x \geq 0$. Nous obtenons : $f^{-1}(x) = \ldots$.

Exercice : Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $\ln(x) = \frac{x}{4}$.

2.4 dérivée d'une fonction réciproque

PROPOSITION : (régularité de la fonction réciproque)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et strictement monotone sur I. Alors :

1. Si f est continue sur I, son application réciproque est continue sur I et de même monotonie que f sur $J = f(I)$;
2. Si f est dérivable sur I (resp. de classe C^1) et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable (resp. de classe C^1)sur $J = f(I)$ et $\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$;

REMARQUES :

(1) Les points pour lesquels $f'(x) = 0$ correspondent à des points où nous avons une tangente verticale, donc des points où f^{-1} n'est effectivement pas dérivable ;

(2) Pour retrouver l'expression de $(f^{-1})'$, on part de l'égalité $f \circ f^{-1}(x) = x$ que l'on dérive...

3 Fonctions trigonométriques réciproques

Estimation : 1h30

Durée : 1h30

3.1 fonction arcos

DÉFINITION :

La fonction cos : $[0;\ \pi] \mapsto [-1;\ 1]$ est strictement décroissante et est bijective de $[0;\ \pi]$ vers $[-1;\ 1]$. On appelle « arc cosinus », et on note arcos, sa fonction sréciproque associée, définie sur $[-1;\ 1]$.

Exemples :

(1) $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$;

(2) $\arccos(1) = \ldots$, $\arccos(-1) = \ldots$;

(3) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

$\arccos(\cos(-\pi)) = +\pi, \arccos(\cos(2\pi)) = 0$.

PROPOSITION :

1. (propriétés algébriques) $\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(y)) = y$, $\forall y \in [-1,1] \cos(\arccos(y)) = y$
2. La fonction arcos est continue sur $[-1;_1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1;\ 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. La fonction arcos est strictement décroissante.

arcos n'est ni paire ni impaire. Par exemple, $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(1) = 0$.

On résume ces informations dans le tableau de variations suivant :

x	-1		0		1
$\arccos'$		$-$	-1	$-$	
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

3.2 fonction arcsin

DÉFINITION :

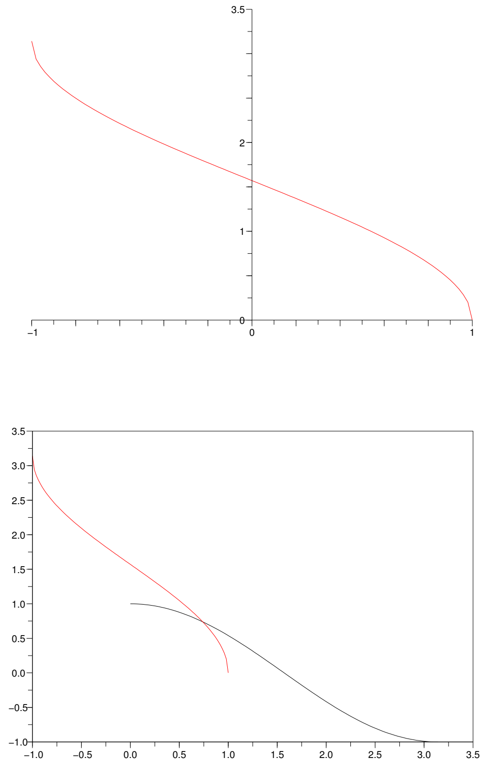
La fonction $\sin : [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \mapsto [-1,1]$ est strictement croissante et est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1;\ 1]$. On appelle « arc cosinus », et on note arcsin, sa fonction réciproque associée, définie sur $[-1,1]$.

Exemples :

(1) $\arcsin(0) = 0$;

(2) $\arcsin(-1) = \ldots$, $\arcsin(1) = \ldots$;

(3) $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.



(a)

(b)

FIG. 1 – **(a)** Courbe représentative de la fonction arcos. **(b)** Courbe représentative des fonctions arcos (rouge) et cos (noire).

PROPOSITION :

1. (propriétés algébriques) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(y)) = y$, $\forall y \in [-1,1] \sin(\arcsin(y)) = y$
2. La fonction arcsin est continue sur $[-1;\ 1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1;\ 1[, \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. La fonction arcsin est strictement croissante.

On a $\arcsin(\sin(y)) = y$ seulement sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par exemple, $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$.

Le tableau de variation résume les informations précédentes :

x	-1	0	1
$\arcsin'$	$+$	1	$+$
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

REMARQUES :

(1) La fonction arcsin est impaire.

3.3 fonction arctan

DÉFINITION :

La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et est bijective de $]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$. On appelle « arc tangente »et on note arctan sa fonction réciproque associée.

Exemples :

(1) $\arctan(0) = 0$;

(2) $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

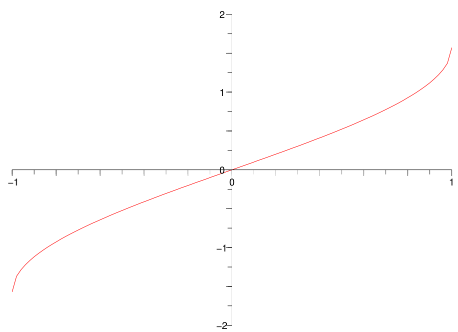
PROPOSITION :

1. $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\lim_{\pm\infty} \arctan = \pm\frac{\pi}{2}$.
2.] arctan est continue et strictement croissante.
3. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{1+x^2}$.
4. arctan est une fonction impaire.

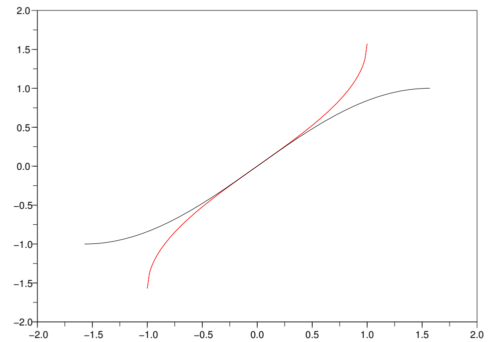
REMARQUES :

(1) LOa fonction arctan est impaire ;

(2) La courbe représentative de arctan admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$.



(a)



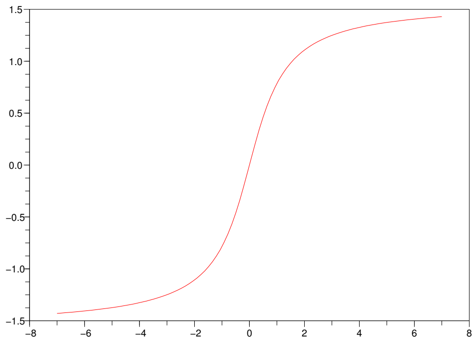
(b)

FIG. 2 – **(a)** Courbe représentative de la fonction arcsin. **(b)** Courbe représentative des fonctions arcsin (rouge) et sin (noire).

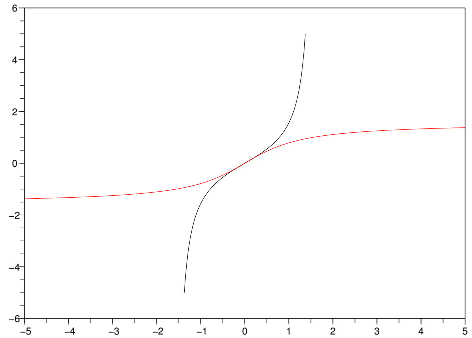
PROPOSITION : (limites au bord)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.



(a)



(b)

FIG. 3 – **(a)** Courbe représentative de la fonction arctan. **(b)** Courbe représentative des fonctions arctan (noire) et tan (bleu).

4 Fonctions hyperboliques réciproques

Estimation : 1h30
Durée : 1h00

4.1 fonction argsh

sh est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone telle que $\lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$.

Elle admet une fonction réciproque appelée “**argument sinus hyperbolique**” notée argsh qui est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(\mathrm{argsh})(x) = x,\quad \mathrm{argsh}(\mathrm{sh})(y) = y$
- argsh est strictement croissante.
- $\lim\limits_{y \to \pm\infty} \mathrm{argsh}(y) = \pm\infty$.
- sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale :

$$\mathrm{argsh}'(y) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh})(y)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh})}.$$

Puisque les fonctions ch et sh vérifient la relation remarquable $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, on peut tenter d'obtenir une expression plus explicite de ch(argsh).

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(y)) = 1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(y)) = 1 + y^2.$$

Puisque $\mathrm{ch} > 0$, on obtient la relation suivante : $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh})(y) = \sqrt{1+y^2}$. D'où

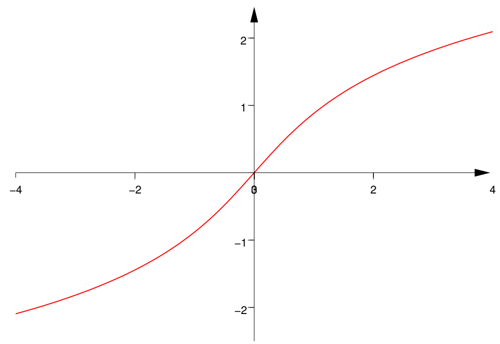
$$\boxed{\mathrm{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
argsh′	+	1	+
argsh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

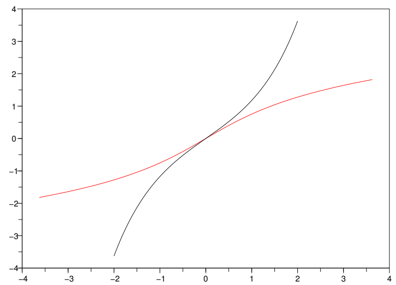
4.2 fonction argch

ch est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue et strictement monotone et telle que $\lim\limits_{0} \mathrm{ch} = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$.

Elle admet une fonction réciproque définie sur $[1, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$. On l'appelle “**argument cosinus hyperbolique**” et on la note argch. :



(a)



(b)

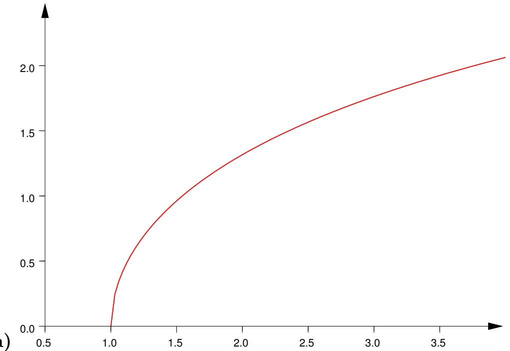
FIG. 4 – **a)** Courbe représentative de la fonction argsh. **b)** Courbe représentative des fonctions argsh (rouge) et sh (noire).

- $\forall x \geq 1, \operatorname{ch}(\operatorname{argch})(x) = x$ et $\forall y \geq 0, \operatorname{argch}(\operatorname{ch})(y) = y$.
- argsh est strictement croissante.
- $\lim_{y \to +\infty} \operatorname{argch}(y) = +\infty$
- ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ mais s'annule en 0. Par conséquent, argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et non pas sur $[1, +\infty[$. Sa dérivée est

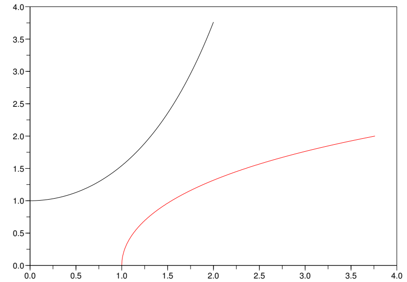
$$\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch})(y)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch})(y)}.$$

On utilise la même technique que précédemment pour obtenir une expression plus explicite de sh(argch). On sait que

$$\operatorname{sh}^2(\operatorname{argch}(y) = \operatorname{ch}^2(\operatorname{argch}(y)) - 1 = y^2 - 1.$$



(a)



(b)

FIG. 5 – **(a)** Courbe représentative de la fonction argch. **(b)** Courbe représentative des fonctions argch (rouge) et ch (noire).

Comme sh > 0 sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\operatorname{sh}(\operatorname{argch})(y) = \sqrt{y^2 - 1}$ et

$$\boxed{\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}}$$

x	1	$+\infty$
argch'	$\Vert$	$+$
argch	0	$\nearrow$ $+\infty$

4.3 fonction argth

th est une fonction continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$.

Elle admet une fonction réciproque, appelée “**argument tangente hyperbolique**” notée argth, définie sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De même, elle est strictement croissante, $\lim_{y\to\pm1}\operatorname{argth}(y)=\pm\infty$. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est strictement positive. Ainsi, argth est dérivable sur $]-1,1[$. Comme,

$$\operatorname{argth}'(y)=\frac{1}{\mathrm{th}'(\operatorname{argth}(y))}=\frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\operatorname{argth}(y))}=\frac{1}{1-y^2}.$$

$$\boxed{\operatorname{argth}'(y)=\frac{1}{1-y^2}}$$

x	-1		0		1
argth'		$+$		$+$	
argth	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. On peut également définir la fonction réciproque de coth.

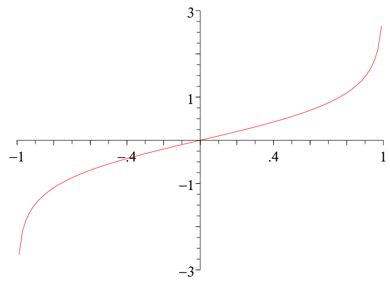
4.4 compléments

Il existe une expression explicite de ces trois fonctions hyperboliques réciproques :

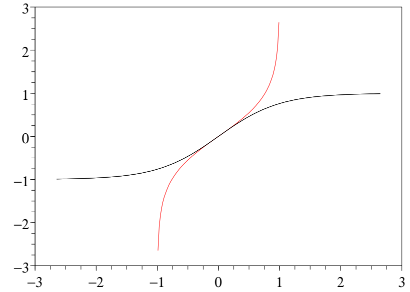
PROPOSITION :

1. $\forall x\in\mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
2. $\forall x\in]1,+\infty[, \operatorname{argch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
3. $\forall x\in]-1,1[, \operatorname{argth}(x)=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{x+1}{1-x})$

démonstration.
On peut remarquer que en dérivant ces nouvelles expressions on obtient bien les dérivées précédentes.



(a)



(b)

Fig. 6 – **(a)** Courbe représentative de argth. **(b)** Courbe représentative des fonctions argth (rouge) et th (noire).

Seul le cas de la fonction argsh est réalisé. C'est un très bon exercice de traiter les autres cas. On part de la relation suivante :

$$y=\operatorname{argsh}(x)\iff \mathrm{sh}(y)=x\iff e^y-e^{-y}=2x$$

Le but étant donc de trouver une relation plus explicite de y en fonction de x. On a l'équation suivante :

$$e^{2y}-2xe^y-1=0$$

On est donc ramené à étudier les zéros du polynôme $Y^2-2xY-1$ avec $Y=e^y$. Le discriminant est : $\Delta=4x^2+4>0$. On a deux racines distinctes :

$$x-\sqrt{x^2+1},\ x+\sqrt{x^2+1}$$

Rappelons que $Y=e^y>0$. Ainsi, $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$ et

$$\operatorname{argsh}(x)=y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Bijections et fonctions réciproques

Exercice 1 : Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer les propositions suivantes :

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
3. Si f admet une application réciproque, alors f est bijective.

Exercice 2 :

1. Soit E un ensemble et soit f une application de E dans E vérifiant $f \circ f = Id_E$ (on dit alors que f est une involution). Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
2. En utilisant la question précédente, montrer que : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que : $f(z) = \overline{z}$ est bijective. Quelle est la transformation géométrique correspondant à la fonction f ?

Exercice 3 : Montrer que la fonction : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que : $f(z) = z + 2\overline{z}$ est bijective et expliciter son application réciproque.

Exercice 4 : les applications suivantes sont-elle injectives ? surjectives ? bijectives ?

(a) $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \right.$; (b) $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \right.$; (c) $f : \left\{ \begin{array}{c} [0,1] \times [0,2\pi] \to [-1,1]^2 \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$;

(d) $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto e^z \end{array} \right.$; (e) $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z|z| \end{array} \right.$; (f) $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z \mapsto \frac{z-i}{1-zi} \end{array} \right.$.

Exercice 5 : Déterminer le nombre de solutions réelles des équations suivantes :

(a)$x^3 - x + 1 = 0$; (b) $xe^{-x} = \frac{1}{2}$ (c) $x^x = 4$

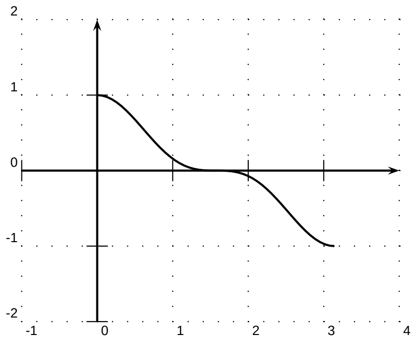
(d) $x^3 - x = m,\ m \in \mathbb{R}$; (e)$\frac{\ln(x)}{x} = m,\ m \in \mathbb{R}$; (f) $xe^m = me^x,\ m \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1. Montrer que f est bijective de $\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ vers un ensemble que l'on précisera. Donner une expression simple de l'application réciproque associée.
2. Montrer que f est bijective de $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[$ vers un ensemble que l'on précisera. En reprenant les calculs de la question précédente, proposer une expression simple de l'application réciproque associée.

Exercice 7 : On considère la fonction définie sur $[0;\ \pi]$ par $f(x) = \cos^3(x)$.

1. Montrer que f est bijective sur un ensemble que l'on précisera et donner une expression simple de son application réciproque f^{-1}.
2. On donne le tracé de la courbe représentative de f :



Tracer, en justifiant, la courbe représentative de f^{-1}.

Exercice 8 :

1. Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right)$, puis montrer que : $\forall x \in [-1;\ 1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Retrouver le résultat précédent en étudiant la dérivée de la fonction : $x \to \arccos(x) + \arcsin(x)$.

Exercice 9 :

1. Montrer que pour tout $x \in [-1;\ 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Donner une expression simple de $\cos(\arcsin(x))$.
3. En utilisant les questions précédentes, résoudre l'équation : $\arccos(x) = \arcsin(\frac{1}{3}) + \mathrm{Arcos}(\frac{1}{4})$.

Exercice 10 :

1. Donner une expression simple de : $\arccos(\cos(x))$ pour $x \in [\pi;\ 2\pi]$, puis $x \in [2\pi;\ 3\pi]$.
2. Donner une expression simple de $\arcsin(\sin(x))$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Exercice 11 :

1. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer, $\cos\left(\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})\right)$. En déduire une expression simple de $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.
2. Retrouver le résultat précédent en étudiant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12 : Donner une expression simple de $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$. En déduire une expression simple de $\cos(3\arccos(x))$.

Exercice 13 : Montrer de deux façons différentes que : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$.

Exercice 14 : Montrer que pour tout réel x, $\frac{1}{2}\mathrm{argsh}(x\sqrt{x^2+1}) = \mathrm{argsh}(x)$.

Exercice 15 :

1. Pour $u \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation d'inconnue u : $\mathrm{sh}(u) = x$. En déduire $\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
2. Pour $u \in \mathbb{R}^+$ et $x \geq 1$, résoudre l'équation d'inconnue u : $\mathrm{ch}(u) = x$. En déduire $\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1;\ 1[,\ \mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

---

11. Géométrie dans l'espace

Table des matières

1 Vecteurs de l'espace **2**
- 1.1 rappels . . . 2
- 1.2 bases de l'espace . . . 2
- 1.3 Produit scalaire . . . 4
- 1.4 Produit vectoriel de deux vecteurs . . . 5
- 1.5 déterminant de trois vecteurs . . . 6

2 Repérage dans l'espace **8**
- 2.1 Coordonnées cartésiennes . . . 8
- 2.2 coordonnées cylindriques . . . 9
- 2.3 coordonnées sphériques . . . 9

3 Plans et spheres de l'espace **9**
- 3.1 plans . . . 9
- 3.2 spheres de l'espace . . . 10
- 3.3 intersection de deux plans . . . 11
- 3.4 intersection d'un plan et d'une sphère . . . 12

4 Droites de l'espace **12**
- 4.1 généralités . . . 12
- 4.2 représentation cartésienne . . . 13
- 4.3 représentation paramétrique . . . 13
- 4.4 distance d'un point à une droite . . . 14
- 4.5 intersection d'une sphère et d'une droite . . . 14
- 4.6 positions relatives de deux droites et perpendiculaire commune . 14

Géométrie dans l'espace

⇝ 8h30

On note $\mathcal{E}$ l'espace usuel et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1 Vecteurs de l'espace

Estimation : 3h
Durée :

1.1 rappels

➩ La notion de vecteurs, ainsi que les opérations associées, est la même que dans le plan.

➩ angles de vecteurs :

La notion d'angles orientés de vecteurs dans l'espace n'existe pas à priori : elle change selon le « côté »d'où on regarde l'angle.

On notera $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) \in [0;\ \pi]$ l'angle **non orienté** des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace.

➩ vecteurs coplanaires :

DÉFINITION :

On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsqu'il existe α, β et γ non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

Exemple : Si $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires. Plus généralement si $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de deux vecteurs, alors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

1.2 bases de l'espace

DÉFINITION :

1. On appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tout vecteur $\overrightarrow{t}$ de la forme : $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{t}$, avec α, β et γ trois nombres réels ;
2. On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathcal{E}$ si tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$;
3. Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, on appelle le triplet $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ les composantes de $\overrightarrow{t}$ dans $\mathcal{E}$. On note également : $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

REMARQUES :

(1) Lorsque les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont deux à deux orthogonaux, on dit que la base est orthogonale ;

(2) si de plus $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = 1$, on dit que $\mathcal{B}$ est orthonormale :

(3) On dit que trois vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forment une base directe s'ils suivent de plus la règle du « tire bouchon ».

PROPOSITION :

1. **(caractérisation des bases de l'espace)** Trois vecteurs de $\mathcal{E}$ forment une base de $\mathcal{E}$ si et seulement s'ils sont non coplanaires ;
2. **(composantes et opérations)** Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$. Alors :
   - $\overrightarrow{t_1} + \overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2\end{pmatrix}$;
   - $\lambda\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\beta_1\\ \lambda\gamma_1\end{pmatrix}$.

Exercice : S oient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de l'espace et exprimer les composantes de $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

1.3 Produit scalaire

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le nombre réel tel que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

REMARQUES :

(1) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$;

(2) Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

➾ Propriétés vérifiées par le produit scalaire :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$: le produit scalaire est symétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}\\ \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{array}\right\}\text{linéaire à gauche}\\ \left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}\\ (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{array}\right\}\text{linéaire à droite}\end{array}\right\}\text{bilinéaire}$$

➾ Expression en base orthonormale :

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc'.$$

REMARQUES :

(1) En particulier, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Exemple : Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et $||\overrightarrow{u}||$.

1.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, de norme : $||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$, orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et tel que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est directe. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on pose : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = 0$.

faire deux dessins

REMARQUE : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1, alors $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est orthonorme directe.

➩ Produit vectoriel et colinéarité :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = 0$;

➩ Propriétés vérifiées par le produit vectoriel :

PROPOSITION :

Soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
2. $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}$: le produit vectoriel est antisymétrique ;
3. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) \\ (\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

➩ Expression en base orthonormale **directe** :

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ une base orthonormale directe et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} bc'-cb' \\ -(ac'-ca') \\ ab'-ba' \end{pmatrix}.$$

Exemple : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

➩ Application au calcul d'aires :

PROPOSITION :

1. Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|\right|.$$
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \left|\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|\right|.$$

1.5 déterminant de trois vecteurs

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs. On appelle déterminant de $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on note $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ le réel : $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Exemple : $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}) = \ldots$.

➩ Déterminant et bases :

PROPOSITION :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors :

1. $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base du plan si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$;
2. $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe du plan si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$.

➩ Propriétés vérifiées par le déterminant :

PROPOSITION :

1. Pour tous réels λ et μ nous avons :

$$\left.\begin{array}{l}\det(\vec{u}, \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}) \\ \det(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w_1} + \mu\vec{w_2}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_1}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_2}) \\ \det(\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w})\end{array}\right\} \text{ tri-}$$

linéaire

2. $\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Plus généralement, le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs (antisymétrie).
3. $\det(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$ (alterné).

➩ Expression en base orthonormale **directe** :

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe et $\vec{u}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

REMARQUE : Nous avons le moyen mnémotechnique suivant, appelé également « règle de Sarrus » :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. Alors : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \ldots$.

➩ Application au calcul d'aires :

PROPOSITION :

Soit V le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Alors : $V = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.

2 Repérage dans l'espace

Estimation : 1h30
Durée :

2.1 Coordonnées cartésiennes

DÉFINITION :

1. Soit O un point du plan. On dit que $\mathcal{R} = (0; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ lorsque $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{E}$;
2. Si de plus, $\mathcal{B}$ est orthogonale, directe, orthonormale, on dira que $\mathcal{R}$ est respectivement orthogonal, direct, orthonormé.

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{R}$ un repère cartésien et $M \in \mathcal{P}$. Alors il existe un unique couple $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, appelé coordonnées de M dans $\mathcal{R}$, tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. On note $M(\alpha, \beta, \gamma)$.

Exercice : Dans le repère orthonormé direct usuel $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :

$M(m;\ 0;\ 1)$, $A(2;\ -2;\ -3)$ et $B(1;\ 1;\ 2)$ où m est un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeurs(s) de m les points O, A, B, M sont-ils coplanaires ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'aire du triangle MAB est-elle minimale ?

2.2 coordonnées cylindriques

2.3 coordonnées sphériques

3 Plans et spheres de l'espace

Estimation : 2h
Durée :

3.1 plans

(a) caractérisations équivalentes : Un plan P est donné :

- soit par la donnée de trois points non alignés A, B et C. Alors $P = \{M \in \mathcal{E} / \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0\}$;
- soit par la donnée d'un point A et de deux vecteurs non nuls. Alors $P = \{M \in \mathcal{E} / \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0\}$.
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P. P est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux : $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}\}$.

(b) équation cartésienne d'un plan :

PROPOSITION :

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M(x;\ y;\ z)$ dans $\mathcal{R}$. Alors $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si il existe des réels a, b, c, d tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d non nuls simultanément ;
2. Réciproquement, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x;\ y;\ z)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c, d réels non nuls simultanément est un plan.

DÉFINITION :

On appelle équation cartésienne d'un plan P toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c, d non nuls simultanément.

Exemples :

(1) équation cartésienne du plan P passant par $A(1;\ 0;\ 0)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$ et $c(0;\ 0;\ 1)$.

(2) équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1;\ 1;\ 1)$ et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

REMARQUES :

(1) Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes.

(2) Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$.

(c) distance d'un point à un plan :

DÉFINITION :

Soient M un point et P un plan. On appelle distance de M à P, et on note $d(M, P)$ la plus petite distance MN où N décrit P.

REMARQUES :

(1) $d(M, P) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur P.

PROPOSITION :

Soient $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un point du plan et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors :

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemples :

(1) Distance de l'origine au plan d'équation cartésienne $x + y + z - 1$=0.

3.2 spheres de l'espace

DÉFINITION :

On appelle sphère S de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\Omega M = R$.

PROPOSITION :

1. La sphère S de centre $\Omega(a;\ b;\ c)$ et de rayon R admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$;
2. Réciproquement, si $(a;\ b;\ c) \in \mathbb{R}^3$ et $d > 0$, l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ du plan tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = d$ est l'équation d'une sphère de centre $\Omega(a;\ b;\ c)$ et de rayon $\sqrt{d}$.

REMARQUE : Si $c < 0$ l'ensemble des points $M(x;\ y)$ tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2 = c$ est l'ensemble vide (Si $c = 0$, l'ensemble est réduit à $\Omega(a;\ b)$).

Exemples :

(1) équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $(1;\ 2;\ 1)$ et de rayon 4 ;

(2) Identifier l'ensemble des points du plan d'équation : $x^2-4x+y^2+6y+z^2-2y-23 = 0$, puis déterminer les éléments caractéristiques.

3.3 intersection de deux plans

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives : $ax+by+cz+d = 0$ et $a'x+b'y+c'z+d' = 0$. Alors :

1. si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondues ;
2. si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite dont une représentation cartésienne est : $\begin{cases} ax+by+cz+d = 0 \\ a'x+b'y+cz'+d' = 0 \end{cases}$

Exemple : Intersection de $\mathcal{P} : x+y+z = 0$ et $\mathcal{P}' : x-y+z = 1$.

3.4 intersection d'un plan et d'une sphère

PROPOSITION :

Soient S la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. Alors :

1. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) < R$, l'intersection de S et $\mathcal{P}$ est un cercle de centre $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega;\ \mathcal{P})^2}$;
2. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{P}$ est tangente à la sphère en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas ;

illustrations graphiques

Exercice :

1. Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2. Déterminer le plan tangent à la sphère en $A(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 0)$.

4 Droites de l'espace

Estimation : 2h
Durée :

4.1 généralités

Une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ est caractérisée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B. On note alors $\mathcal{D} = (AB)$ et $(AB) = \{M \in \mathcal{P}\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\}$;
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul. Alors $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P}\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\}$;
- soit par la donnée d'un point A et de deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Alors : $\mathcal{D} = \left\{ M \in P / \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{n_2} = 0 \end{cases} \right\}$.

4.2 représentation cartésienne

PROPOSITION :

Toute droite admet une représentation, appelée représentation cartésienne, de la forme : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$

Exemples :

(1) Représentation cartésienne de la droite passant par $A(1;\ 0;_1)$ ET $b(0;_1;\ 0)$;

(2) Représentation cartésienne de la droite passant par $A(1;\ 1;\ 1;\ 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

REMARQUES :

(1) Une droite admet une infinité de représentations cartésiennes ;

(2) Si $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$ est une représentation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$, alors :

- $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs orthogonaus $\mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

4.3 représentation paramétrique

PROPOSITION :

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(a;\ \ b;\ \ c)$ admet une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases} x=a+t\alpha \\ y=b+t\beta \\ z=c+t\gamma \end{cases}$

Exemples :

(1) représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ et $C(0;\ 0;\ 1)$.

(2) équation cartésienne de la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases}$

REMARQUES :

(1) Une droite admet plusieurs représentations paramétriques : on peut changer de vecteur directeur ou de point A ;

(2) Si $\begin{cases} x=a+t\alpha \\ y=b+t\beta \\ z=c+t\gamma \end{cases}$ est une représentation paramétrique d'une droite D, alors :

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D ;

4.4 distance d'un point à une droite

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, $A\in\mathcal{D}$ et M un point de l'espace. Alors $d(M,\mathcal{D})=\frac{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||}$

Exemple : distance de l'origine à la droite (AB), avec $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

4.5 intersection d'une sphère et d'une droite

PROPOSITION :

Soient S une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{D}$ une droite. Alors :

1. si $d(\Omega;\ \mathcal{D})<R$, S et $\mathcal{D}$ de coupent en deux points ;
2. si $d(\Omega;\ \mathcal{P})=R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{D}$ est tangente à la sphère en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega;\ \mathcal{P})>R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas ;

4.6 positions relatives de deux droites et perpendiculaire commune

RAPPELS :

- Deux droites sont dites coplanaires si elles sont incluses dans un même plan $\mathcal{P}$;

• Deux droites ne sont pas forcément coplanaires ;

• Deux droites coplanaires sont sécantes ou parallèles ;

DÉFINITION :

> On dit que deux droites sont perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

PROPOSITION : (perpendiculaire commune)

> Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires admettent une unique perpendiculaire commune Δ.

DÉFINITION :

> Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires et Δ leurperpendiculaire commune. On appelle distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$, et on note $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ le réel : $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH'$,
> où • H est l'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ ;
> • H' est l'intersection de $\mathcal{D}'$ et Δ.

Exemple : distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$, avec $\mathcal{D}\begin{cases} y+z-1=0 \\ z-x=0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}'\begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases}$

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Géométrie dans l'espace

Dans tous les exercices, sauf spécifications contraires, l'espace est muni du repère orthonormal direct $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$ *et les coordonnées des points sont données dans ce repère*

Exercice 1 : Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de l'espace. Est-elle directe ?
2. Soit $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\m\end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.
   (a) Exprimer les composantes de $\overrightarrow{t}$ dans $\mathcal{B}'$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\overrightarrow{m}$ les vecteurs $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 2 : Soient P le plan d'équation cartésienne : $x+2y-3z+4=0$ et $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(1;\ 1;\ 1)$ trois points de l'espace.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan P' passant par ces points.
2. Montrer que P et P' sont sécants en une droite D.
3. Calculer la distance de A à P' et de O à D.

Exercice 3 : Montrer que les deux droites suivantes sont coplanaires et former une équation cartésienne de leur plan.

$$D : \begin{cases} x &= 2z+1 \\ y &= z-1 \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} x &= z+2 \\ y &= 3z-3 \end{cases}$$

Exercice 4 : Déterminer une équation cartésienne des deux plans bissecteurs des plans P et P' d'équations respectives : $4x+4y-7z-1=0$ et $8x-4y+z-7=0$, puis vérifier qu'ils sont perpendiculaires.

Exercice 5 :

1. Calculer la distance de $A(1;\ 1;\ 1)$ au plan P passant par les points : $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ 4)$ et $C(0;\ 5;\ -3)$.
2. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur P.

Exercice 6 : Soients $A(5;\ -1;\ 4)$ et $B(2;\ 0;\ 1)$. Donner une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice 7 : Soient $\Omega(4;\ 1;\ 2)$ et $A(-1;1;\ 2)$.

1. Déterminer une équation de la sphère de centre Ω et passant par A puis donner une équation du plan tangent en A à cette sphère.
2. Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x-2y-4z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le rayon r et le centre w.

Exercice 8 : Soient les droites :

$$D\ :\ \begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{cases} \text{ et } D'\ :\ \begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases}.$$

Calculer la distance entre D et D', puis former une équation cartésienne de la perpendiculaire commune aux deux droites.

Exercice 9 : Soient les droites de représentations paramétriques :

$$D\ :\ \begin{cases} x=1-t \\ y=5+t \\ z=2+2t \end{cases} \text{ et } D'\ :\ \begin{cases} x=3+t \\ y=3+t \\ z=-1 \end{cases}.$$

1. Montrer que D et D' ne sont pas coplanaires.
2. Donner une représentation paramétrique de la perpendiculaire commune Δ aux deux droites.
3. Calculer la distance de D à D'.

Exercice 10 : Soit a un réel. On considère les deux droites suivantes :

$$D_a : \begin{cases} x &= 2z-a \\ y &= 3z+2a \end{cases} \qquad D'_a : \begin{cases} x &= -z+a \\ y &= z-2a \end{cases}$$

1. Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune Δ_a à D_a et D'_a.
2. Déterminer la réunion, lorsque a parcourt $\mathbb{R}$, des points d'intersection du plan $z=0$ et de Δ_a.

Exercice 11 : On considère les droites :

$$(D) : \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=y \\ z-1=y \end{cases} \text{ et } (D') : \begin{cases} y-2=\dfrac{x-2}{2} \\ z=\dfrac{x-2}{2} \end{cases}.$$

Montrer que (D) et (D') sont parallèles et déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (E) des points situés à égale distance de (D) et (D') : $(E)=\{M\in\mathcal{E}_3/\ d(M,(D))=d(M,(D'))\}$.

Exercice 12 : On note S l'ensemble des points $(x;\ y;\ z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ et D la droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$.

1. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
2. Déterminer les points d'intersection de S et D et une équation cartésienne du plan tangent à S en chacun de ces points.
3. Déterminer l'intersection de S avec le plan P d'équation $y-z+1=0$. Préciser les éléments caractéristiques.

---

12. Nombres, arithmétique et récurrence

Table des matières

1 Suites de nombres réels **2**
- 1.1 présentation 2
- 1.2 la récurrence faible 3
- 1.3 variantes de la récurrence faible 3

2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ **4**
- 2.1 divisibilité, diviseurs et multiples 4
- 2.2 division euclidienne 5
- 2.3 nombres premiers 6

3 Les nombres rationnels et réels **7**
- 3.1 les nombres rationnels 7
- 3.2 partie entière d'un nombre réel 7
- 3.3 densité des nombres rationnels et irrationnels 8
- 3.4 comparaison algébrique de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ 9

4 Une propriété fondamentale des nombres réels **9**
- 4.1 ensembles majorés, minorés, bornés 9
- 4.2 propriété de la borne supérieure 10
- 4.3 détermination pratique des bornes supérieures et inférieures (dans $\mathbb{R}$) 11

Lycée Pierre-Paul RIQUET — **Année 2010-2011**
S. GAUTIER — Mathématiques TSI-1

Nombres, arithmétique et récurrence

$\rightsquigarrow$ 6h30

1 Suites de nombres réels

Estimation : 2h30
Durée : 2h

1.1 présentation

DÉFINITION :

On appelle suite de nombres réels toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: u : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

Notations : On note
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) ou u une suite réelle ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

On ne note surtout pas u_n une suite : u_n représente le n-ème terme de la suite.

Exemples :

(1) $0, 1, 2, 3, \ldots$ est une suite. Nous avons $u_0 = 0$, et pour tout entier naturel n $u_n = n$;

(2) $1, 2, 3, 4, \ldots$ est une suite. Nous avons $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_n = n + 1$;

(3) $0, 2, 4, 6 \ldots$ est une suite. Nous avons $u_n = 2n$;

(4) $1, 3, 5, 7, \ldots$ est une suite. Nous avons $u_n = 2n + 1$;

(5) $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ est une suite. Nous avons $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$;

(6) On peut définir une suite u par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Nous obtenons $1, 1, 1, \ldots$: Elle semble stationnaire égale à 1 ;

(7) On peut définir une suite u par la même relation que précédemment (dite de récurrence) mais avec $u_0 = 2$. Nous obtenons : $2, 3, 5, 9, 17 \ldots$. Une expresion simple semble être $2^n + 1$.

1.2 la récurrence faible

But : On considère $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vrai quel que soit n. (Exemple : $\mathcal{P}(n)$: ´ $2^n \geq n$ ˇ.)

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

REMARQUES :

(1) (i) s'appelle l'initialisation de la récurrence ;

(2) (ii) s'appelle l'hérédité de la récurrence.

Exemple : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 2U_n - 1$. Alors, pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n + 1$.

1.3 variantes de la récurrence faible

(a) La récurrence à partir d'un certain rang :

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{P}(n)$ une asertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(n_0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ « $2^n \geq n+2$ »est vraie.

(b) La récurrence à plusieurs pas :

PROPOSITION :

Soient $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose :

(i) $\underbrace{\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(r-1)}_{r \text{ éléments}}$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \geq r-1,\ \underbrace{\mathcal{P}(n-r+1), \ldots, \mathcal{P}(n-1), \mathcal{P}(n)}_{r \text{ éléments}} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : Soit (U_n) telle que : $U_0 = 0, U_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n$.

(c) La récurrence forte :

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : Soit (U_n) telle que : $U_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $U_n = U_0 \times U_1 \ldots \times U_{n-1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n = 1$.

2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Estimation : 1h30
Durée : 1h10

RAPPEL : on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

2.1 divisibilité, diviseurs et multiples

DÉFINITION :

1. Soient $(a;\ b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a divise b, et on note $a|b$, lorsqu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que : $b = ac$;
2. Pour $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des diviseurs de a est l'ensemble des entiers relatifs b tels que $b|a$;
3. Pour $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples de a est l'ensemble des entiers relatifs b tels que $a|b$.

Exemples :

(1) 3 divise 6 : En effet $6 = 2 \times 3$;

(2) 4 ne divise pas 6 : Si $c \in \mathbb{Z}$ tel que : $6 = 4c$, alors $c = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Ceci est impossible ;

(3) Tout entier b divise 0 : $0 = 0 \times b$;

(4) Si 0 est un diviseur de a, alors $a = 0c = 0$: un nombre relatif non nul ne eut avoir 0 comme diviseur ;

(5) Les diviseurs de 6 sont ...

(6) Un multiple de 6 est par exemple 12 ou même -12 ;

(7) 1 est un diviseur de n'importe quel nombre entier relatif.

PROPOSITION : (propriétés de la relation de divisibilité)

Soient a, b deux entiers relatifs.

1. Pour $c \in \mathbb{Z}$, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$;
2. Si $c \in \mathbb{Z}^*$, alors $a|b \Leftrightarrow ac|bc$;
3. Si $d \in \mathbb{Z}$ et $d|a$ et $d|b$, alors $d|au + bv$, avec $(u;\ v) \in \mathbb{Z}^2$ quelconque ;
4. $\left\{ \begin{array}{l} a|b \\ b|a \end{array} \right. \Leftrightarrow |a| = |b|$.

Exercice : Déterminer les diviseurs communs à 101 et 304.

2.2 division euclidienne

THÉORÈME : (division euclidienne)

Soient $(a;\ b) \in \mathbb{Z}^2$ et $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;\ r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. Le nombre q s'appelle le quotient de la division euclidienne. Le nombre r s'appelle le reste de la division euclidienne.

Exemples :

(1) division euclidienne de 11 par 4 ;

(2) division euclidienne de -11 par 4.

(3) division euclidienne de 11 par 36.

REMARQUE : b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de b par a est égal à 0.

2.3 nombres premiers

DÉFINITION :

Un nombre p est dit premier si $p \geq 2$ et les seuls diviseurs de p dans $\mathbb{N}^*$ sont 1 et p.

Exemples :

(1) 1 n'est pas premier ;

(2) 2 est premier ;

(3) 4 n'est pas premier.

(4) liste des nombres premiers inférieurs à 20 : ...

THÉORÈME : (decomposition en facteurs premiers)

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique entier r, une unique famille de nombres premiers $p_1 < p_2 < ... < p_r$ et une unique famille d'entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que : $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} = \varepsilon \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, avec $\varepsilon = \pm 1$.

Exemples :

(1) décomposition en facteurs premiers de 48 ;

(2) décomposition en facteurs premiers de -140.

PROPOSITION :

1. Soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Si $p|a^2$, alors $p|a$;
2. Plus généralement, si un nombre premier divise un produit de nombres, alors il divise au moins l'un des termes du produit.

explications : si un nombre premier divise un produit de nombres (entiers relatifs), alors il divise au moins l'un des termes du produit : en effet il apparaît au moins dans la décomposition en facteurs premiers d'un des termes du produit.

Ceci est faux si p nést pas un nombre premier. Exemple : 6 divise $8\times 9 = 72$ mais 6 ne divise ni 8, ni 9.

3 Les nombres rationnels et réels

Estimation : 2h
Durée : 2h

3.1 les nombres rationnels

DÉFINITION :

1. On appelle nombre rationnel tout nombre r tel que : $r = \frac{p}{q}$, avec $(p;\ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels ;
2. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit irrationnel. On note $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.

Exemples :

(1) Un nombre entier relatif est rationnel ;

(2) $\frac{3}{-2}$ est rationnel.

(3) $\frac{1}{10} = 0,1$ est rationnel ;

(4) $\frac{1}{3} = 0,33333333....$ est rationnel.

REMARQUE : L'écriture $r = \frac{p}{q}$, avec $(p;\ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ n'est pas unique : $\frac{5}{4} = \frac{3}{2}$. On obtient par contre l'unicite en imposant p et q sans diviseurs communs.

PROPOSITION :

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

3.2 partie entière d'un nombre réel

DÉFINITION :

Soit x un nombre réel. On appelle partie entière de x, et on note $E(x)$ le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x : $E(x) = \max\{n \in Z / n \leq x\}$.

Exemples :

(1) $E(3,4) = \ldots$;

(2) $E(-3,4) = \ldots$;

(3) Si $k \in \mathbb{Z}$, $E(k) = k$.

Courbe représentative de la fonction partie entière

PROPOSITION : (propriétés de la partie entière)

Soient x, y deux nombres réels. Alors :

1. $E(x) \leq x < E(x) + 1$;
2. Si $n \in \mathbb{Z}$ est tel que $n \leq x$, alors $n \leq E(x)$;
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, E(x+n) = E(x) + n$;
4. $x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.

REMARQUE : Le 4. de la proposition précédente traduit le fait que la fonction partie entière est croissante.

Exercice : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $x - \frac{1}{n} < x \leq x$.

3.3 densité des nombres rationnels et irrationnels

DÉFINITION :

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout réels x et y il existe $a \in A$ tel que $a \in]x;\ y[$.

Exemples :

(1) $A = \{0;\ 1\}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. De même pour tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$;

(2) $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION : (suites et densité)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

REMARQUE : Le résultat précédent est encore vrai si l'on impose de plus : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x$ ou bien $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x$.

THÉORÈME :

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$;
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3.4 comparaison algébrique de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

PROPOSITION :

1. La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
2. Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationel ;
3. Si $x \in \mathbb{Q}^*$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$.

REMARQUE : La somme de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$. De même, le preoduit de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.)

Les deux opérations essentielles sont $+$ et $-$. On résume les caractéristiques algébriques essentielles dans le tableau ci-dessous :

dans	tout nombre a-t-il un	
	opposé $(+)$	inverse $(\times)$
$\mathbb{Z}$	OUI	NON
$\mathbb{Q}$	OUI	OUI
$\mathbb{R}$	OUI	OUI

BILAN : D'un point de vue algébrique, nous voyons la plus grande richesse de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$. Par contre, toujours d'un point de vue algébrique, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ n'ont pas de différences (on dit que tous deux sont des corps).

4 Une propriété fondamentale des nombres réels

Estimation : 2h
Durée : 1h20

4.1 ensembles majorés, minorés, bornés

DÉFINITION :

Soit A une partie d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

1. Un majorant de A dans E, lorsqu'il existe, est un réel $M \in E$ tel que : $\forall x \in A, x \leq M$;
2. Le maximum de A, lorsqu'il existe, est le réel $a \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$. On note $a = \max(A)$;
3. Un minorant de A dans E, lorsqu'il existe, est un réel $m \in E$ tel que : $\forall x \in A, x \geq m$;
4. Le minimum de A, lorsqu'il existe, est un réel $b \in A$ tel que $\forall x \in A, x \geq a$. On note $b = \min(A)$;
5. Si A admet au moins un majorant dans E, on dit que A est majorée dans E. Si A admet au moins un minorant dans E, on dit que A est minorée dans E. Si A est majoré et minoré dans E, on dit que A est bornée dans E.

Exemples :

(1) $]-\infty;\ 1[$ est majoré dans $\mathbb{R}$. Il n'admet pas de maximum ;
(2) $]-\infty;\ 1]$ est majoré dans $\mathbb{R}$. Son maximum est 1 ;
(3) $]-3;\ +\infty[$;
(4) $[-3;\ +\infty[$;
(5) $A = [0;\ 1] \cap \mathbb{Q}$ est majoré dans $\mathbb{Q}$: 2 est un majorant, mais pas $\sqrt{2}$.

4.2 propriété de la borne supérieure

DÉFINITION :

Soit E un ensemble.

1. On appelle borne supérieure d'une partie A de E, et on note $\sup(A)$ lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A dans E ;
2. On appelle borne inférieure d'une partie A de E, et on note $\inf(A)$ lorsqu'elle existe, le plus grand des minorants de A dans E ;
3. On dit que E vérifie la propriété de la borne supérieure lorsque toute partie non vide de E et majorée (dans E) admet une borne supérieure.

Exemples :

(1) $]-\infty;\ 1[$;
(2) $]-\infty;\ 1]$;
(3) $]-3;\ +\infty[$;

(4) $[-3;\ +\infty[$;

THÉORÈME : (Admis)

1. $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure, c'est à dire toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
2. De même toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée admet une borne inférieure.

REMARQUES :

(1) Il est possible de voir que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure. En effet $A =]-\infty;\ \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ vue dans $\mathbb{Q}$ est clairement non vide et majorée. Si A admet une borne supérieure : $r \in \mathbb{Q}$, alors forcément $r > \sqrt{2}$. Ceci est impossible puisque par densité de $\mathbb{Q}$, on peut trouver un nombre rationnel entre $\sqrt{2}$ et r, ce qui contredit la minimalité de r ;

(2) Intuitivement, un ensemble E qui vérifie la propriété de la borne supérieure est un ensemble qui n'a pas de « trous ».

BILAN : Nous venons donc de mettre en évidence une différence fondamentale entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$: $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure, contrairement aux nombres rationnels.

4.3 détermination pratique des bornes supérieures et inférieures (dans $\mathbb{R}$)

PROPOSITION :

1. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que :
   (i) $\forall x \in A, x \leq M$;
   (ii) Il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = M$.

   Alors A admet une borne supérieure et $M = \sup(A)$.
2. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$ tel que :
   (i) $\forall x \in A, x \geq m$;
   (ii) Il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = m$.

   Alors A admet une borne supérieure et $m = \inf(A)$.

REMARQUES :

(1) A admet un maximum si et seulement si sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ appartient à A ;

(2) De même, A admet un minimum si et seulement si sa borne inférieure dans$\mathbb{R}$ appartient à A.

Exercice : Montrer que $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne supérieure dans

R que l'on déterminera.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Nombres, arithmétique et récurrence

Exercice 1 : (suites arithmético-géométriques)

1. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 2U_n - 1$. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 3 \times 2^n + 1$.
2. Plus généralement, pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, on considère la suite de premier terme U_0 et telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = aU_n + b$. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = a^n \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$.
3. En utilisant la question précédente, proposer une expression simple du n-ème terme de la suite définie par $U_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 1)$.

Exercice 2 : (suite homographique) On considère une suite définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 3}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3 : (suite récurrente linéaire d'ordre 2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 1$, $U_1 = 3$ et pour tout entier naturel non nul : $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = (-1)^n(2n+1)$.

Exercice 4 : Démontrer, en le déterminant, qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ 2^n \geq (n+2)^2.$$

Exercice 5 : Montrer que pour tout entier naturel non nul n il existe des entiers naturels k et q tels que : $n = 2^k(2q+1)$.

Exercice 6 :

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier. En déduire que le carré d'un nombre impair est de la forme $8k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 6.

Exercice 7 :

1. Montrer que : 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour $n \geq 1$.
2. Montrer que : $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.
3. Montrer que : $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

Exercice 8 :

1. Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $x^n + x + 2 = 0$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $3x^2 + xy - 11 = 0$.

Exercice 10 : Soit x un nombre entier plus petit que 1000. On sait que le reste de la division euclidienne de x par $2, 3, 7$ et 17 est 1. Trouver x.

Exercice 11 : (Nombres de Mersenne) Soit a un nombre entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a - 1 | a^n - 1$.
2. En déduire que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 12 :

1. Soient a et b deux entiers premiers entre eux et d un diviseur commun à $a + b$ et $a - b$.
   (a) Montrer que si d est un nombre premier, $d = 2$.
   (b) Montrer que d ne peut être de la forme $d = 2^n$ avec $n \geq 1$.
   (c) Conclure sur les valeurs possibles de d.
2. Soient a et b deux entiers premiers entre eux et d un diviseur commun à $2a + b$ et $a + 2b$. Déterminer les valeurs possibles pour d.

Exercice 13 : Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 14 : Soit $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
2. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = E(\frac{E(nx)}{n})$.

Exercice 15 : On considère l'ensemble des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cet ensemble est-il majoré dans $\mathbb{R}$? Minoré dans $\mathbb{R}$? A-t-il un maximum ? Un minimum ?

Exercice 16 : Déterminer, s'ils existent, les majorants, minorants, bornes supérieures, bornes inférieures (dabs $\mathbb{R}$), maxima, minima des ensembles suivants :

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\};\ B = \left\{ \frac{n - 1/n}{n + 1/n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 17 : Soit :

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* / -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est réunion de deux intervalles.
2. Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 18 : Étudier les bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble : $]0;\ \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$.

---

13. Systèmes linéaires

Table des matières

1 **Systèmes linéaires de taille quelconque** **2**
1.1 présentation 2
1.2 systèmes linéaires échelonnés 3
1.3 opérations élémentaires sur les lignes 3

2 **La méthode du pivot (partiel) de Gauss** **4**
2.1 description de l'algorithme 5
2.2 synthèse 7
2.3 exercices d'application 7

3 **Déterminant d'un système d'ordre 2 ou 3** **7**
3.1 présentation 7
3.2 déterminant et opérations élémentaires 8
3.3 développement par rapport à une ligne ou une colonne 9

4 **Formules de Cramer** **9**
4.1 présentation 9
4.2 application à la résolution d'un système d'ordre 2 à paramètre . 10
4.3 application à la résolution d'un système d'ordre 3 à paramètre . 10

Résolution de systèmes linéaires

$\rightsquigarrow$ 4h45

On note : • $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
• pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[\![1;\ n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.

1 Systèmes linéaires de taille quelconque

Estimation : 1h30
Durée : 1h

1.1 présentation

DÉFINITION :

1. On appelle système linéaire de n équations, à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$, un système de la forme :
$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_P = b_n \end{cases} \text{; avec } a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ pour } \begin{cases} i \in [\![1;\ n]\!] \\ j \in [\![1;\ p]\!] \end{cases}.$$
2. Pour $i \in [\![1;\ n]\!]$ et $j \in [\![1;\ p]\!]$, les réels a_{ij} sont appelés les coefficients du système et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont appelés les seconds membres du système ;
3. Pour $i \in [\![1;\ n]\!]$, on appelle i-ème ligne de (S) , et on note L_i, l'équation : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i$;
4. Résoudre (S) consiste à trouver l'ensemble des p-uplets $(x_1;\ x_2; \ldots;\ x_p)$ vérifiant simultanément les n équations ;
5. Lorsque $p = n$, on dit que le système est carré d'ordre n ;
6. Lorsque $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, on dit que le système est homogène.

Exemple : $\begin{cases} 13x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 1 \\ 2x_1 & & +x_3 & = -1 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

REMARQUES :

(1) Lorque le nombre d'inconnues est petit, on note souvent x, y, z, t les inconnues au lieu de x_1, x_2, x_3, x_4. On écrit donc plutôt le système linéaire précédent : $\left\{\begin{array}{rrrl} 13x & +3y & +4z & = 1 \\ 2x & & +z & = -1 \end{array}\right.$;

(2) Un système homogène admet au moins une solution : $(0;\ 0; \ldots;\ 0)$.

1.2 systèmes linéaires échelonnés

DÉFINITION :

> Soit (S) un système linéaire de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que (S) est échelonné lorsque $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

Exemples :

(1) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & & 2z & = 1 \end{array}\right.$ est un système linéaire échelonné.

(2) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +3z & +t & = 0 \\ & y & -z & +t & = 0 \\ & & 2z & -3t & = 0 \end{array}\right.$ est un système linéaire échelonné.

(3) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & & z & = 0 \\ & & 0 & = 1 \end{array}\right.$ est un système linéaire échelonné.

Exercice : Résoudre les trois systèmes précédents

PROPOSITION :

> Soit (S) un système linéaire échelonné de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors, l'ensemble des solutions de (S) est : soit vide, soit réduit à un seul élément, soit admet une infinité d'éléments.

1.3 opérations élémentaires sur les lignes

DÉFINITION :

> On appelle opérations élémentaires sur un système linéaire (S) les opérations suivantes :
>
> 1. permutation de deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$;
> 2. combinaison d'une autre ligne L_j à une ligne L_i $(i \neq j)$: $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, avec λ non nul et μ quelconque.

Exemples :

(1) On considère S : $\left\{\begin{array}{rrl} x & +y & = 1 \\ -x & +y & = 0 \end{array}\right.$ En faisant l'opération élémentaire : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, nous obtenons le système S' $\left\{\begin{array}{rrl} x & +y & = 1 \\ & 2y & = 0 \end{array}\right.$;

(2) Réciproquement, à partir de S' $\left\{\begin{array}{rrl} x & +y & = 1 \\ & 2y & = 0 \end{array}\right.$, nous obtenons S, en faisant l'opération élémentaire : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

PROPOSITION :

> Soit (S) un système linéaire, alors tout système (S') obtenu à partir de S en faisant une opération élémentaire est équivalent au système S.

> Attention aux opérations élémentaires simultanées : partant du système : (S) $\left\{\begin{array}{rrrl} \frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = 1 \\ \frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}z & = 0 \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = 0 \end{array}\right.$, en faisant les opérations élémentaires simultanées : $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$, nous obtenons le système : (S') $\left\{\begin{array}{rrrl} & & z & = 1 \\ & y & -z & = 0 \\ -x & & & = -1 \end{array}\right.$ d'ensemble de solutions : $(1;\ 1;\ 1)$. Pourtant $(1;\ 1;\ 1)$ n'est pas solution de (S), donc (S) et (S') ne sont pas équivalents.

2 La méthode du pivot (partiel) de Gauss

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

2.1 description de l'algorithme

Il s'agit d'un algorithme qui permet de résoudre n'importe quel système quelle que soit sa taille. On part donc d'un système :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1p}x_p=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2p}x_p=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{np}x_p=b_n \end{array}\right. .$$

On suppose par ailleurs que pour chaque inconnue $x_i, i \in [\![1;\ n]\!]$, les coefficients correspondants $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ ne sont pas tous nuls. Pour illustrer les étapes de l'algorithme on considèrera le système :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{llllll} & & z & +t & =1 \\ x & +y & +z & & =0 \\ x & +y & +2z & +3t & =-1 \\ x & +y & +3z & +10t & =-6 \end{array}\right. .$$

On décompose l'algorithme selon les étapes suivantes :

(a) premier pivot.

➪ choix du premier pivot : l'un des coefficients $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ correspondant à x_1 n'est pas nul : quitte à permuter les lignes, on se ramène à un système avec le premier coefficient en haut à gauche non nul. On se ramène donc à un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1p}x_p=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2p}x_p=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{np}x_p=b_n \end{array}\right. ,$$

avec $a_{11} \neq 0$.

➪ utilisation du premier pivot : on se sert de la première ligne pour éliminer la première inconnue x_1 à 'aide de combinaisons :

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1p}x_p & =b_1 & \\ & \tilde{a}_{22}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{2p}x_p & =\tilde{b}_2 & L_2 \leftarrow L_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 \\ & \vdots & & \vdots & & \\ & \tilde{a}_{n2}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n & L_n \leftarrow L_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}L_1 \end{array}\right.$$

(b) pivots suivants. On simplifie le sous-système : $\left\{\begin{array}{llll} \tilde{a}_{22}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{2p}x_p & =\tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \tilde{a}_{n2}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n \end{array}\right.$.

L'étude dépend des deux situations suivantes :

– l'un des coefficients $\tilde{a}_{22}, \ldots, \tilde{a}_{n2}$ correspondant à x_2 n'est pas nul. on reprend alors les idées du (a) : quitte à permuter les lignes, on se ramène à sous-système avec le premier coefficient en haut à gauche non nul. Le système (S) est alors équivalent au système :

$$(\tilde{\mathrm{S}})\left\{\begin{array}{lllll} \tilde{a}_{11}x_1 & +\tilde{a}_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1p}x_p & =b_1 \\ & \tilde{a}_{22}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{2p}x_p & =\tilde{b}_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \tilde{a}_{n2}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n \end{array}\right. ,$$

avec $\tilde{a}_{22} \neq 0$.

On utilise alors la ligne 2 comme pivot pour éliminer l'inconnue x_2 des lignes situées en-dessous :

$$(\tilde{\mathrm{S}}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} \hat{a}_{11}x_1 & +\hat{a}_{12}x_2 & +\hat{a}_{13}x_3 & +\ldots & +a_{1p}x_p & =\hat{b}_1 & \\ & \hat{a}_{22}x_2 & \hat{a}_{23}x_3 & \ldots & +\hat{a}_{2p}x_p & =\hat{b}_2 & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \hat{a}_{33}x_3 & +\ldots & +\hat{a}_{3p}x_p & =\hat{b}_3 & L_3 \leftarrow L_3-\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}}L_2 \\ & & \hat{a}_{n3}x_3 & +\ldots & +\hat{a}_{np}x_p & =\hat{b}_n & L_n \leftarrow L_n-\frac{\tilde{a}_{n2}}{\tilde{a}_{22}}L_2 \end{array}\right.$$

on retourne ensuite au **(b)** avec le sous-système : $\left\{\begin{array}{llll} \tilde{a}_{33}x_3 & +\ldots & +\tilde{a}_{3p}x_p & =\tilde{b}_3 \\ \vdots & & \vdots & \\ \tilde{a}_{n3}x_3 & +\ldots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n \end{array}\right.$.

– tous les coefficients $\tilde{a}_{22}, \ldots, \tilde{a}_{n2}$ correspondant à x_2 sont nuls. Le système (S) est donc équivalent au système :

$$(\tilde{\mathrm{S}})\left\{\begin{array}{llllll} \tilde{a}_{11}x_1 & +\tilde{a}_{12}x_2 & +\tilde{a}_{13}x_3 & +\ldots & +a_{1p}x_p & =b_1 \\ & & \tilde{a}_{23}x_3 & +\ldots & +\tilde{a}_{2p}x_p & =\tilde{b}_2 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & \tilde{a}_{n3}x_3 & +\ldots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n \end{array}\right. .$$

on retourne alors au **(b)**, mais avec le sous-système : $\left\{\begin{array}{llll} \tilde{a}_{23}x_3 & +\ldots & +\tilde{a}_{2p}x_p & =\tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \tilde{a}_{n3}x_2 & +\ldots & +\tilde{a}_{np}x_p & =\tilde{b}_n \end{array}\right.$.

2.2 synthèse

PROPOSITION :

Tout système (S) est équivalent à un système échelonné (S′). On obtient (S′) à partir de (S) en utilisant le pivot partiel de Gauss.

conséquence. Nous en déduisons donc toutes les possibilités pour les solutions d'un système linéaire : soit il n'admet aucune solution, soit il admet une unique solution, soit il admet une infinité de solutions.

2.3 exercices d'application

Exercice : Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=0 \end{array} \right. ; \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ x+y+2z+2t=0 \\ x+y+2z+3t=1 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{array} \right. ; \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ x+y+2z+2t=0 \\ x+y+2z+3t=0 \end{array} \right. .$$

3 Déterminant d'un système d'ordre 2 ou 3

Estimation : 1h15
Durée : 1h15

3.1 présentation

DÉFINITION :

On appelle déterminant :

1. d'un système carré : $\left\{ \begin{array}{l} a_1x+b_1y=m_1 \\ a_2x+b_2y=m_2 \end{array} \right.$, le déterminant : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;
2. d'un système de taille 3 : $\left\{ \begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=m_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=m_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=m_3 \end{array} \right.$, le déterminant : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3.2 déterminant et opérations élémentaires

PROPOSITION : (déterminant et opérations)

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3$. De même : $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3$;
2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. Plus généralement, le déterminant est nul si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales ;
3. $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Plus généralement, le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux colonnes (ou deux lignes) ;
4. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda c_1+\mu b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda c_2+\mu b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda c_3+\mu b_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Plus généralement, Le déterminant est multiplié par λ lorsqu'on remplace une colonne C_i (ou une ligne L_i) par une combinaison avec une autre colonne : $C_i \leftarrow \lambda C_i + \mu C_j$ (ou $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$,avec $i \neq j$).

Exercice : Donner une expression la plus factorisée possible des déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$, avec $m \in \mathbb{R}$; (b) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, avec $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse au (a) : $-(m+2)(m-1)^2$. Réponse au (b) : $(-(a+2b)(a-b)^2$.

3.3 développement par rapport à une ligne ou une colonne

PROPOSITION : (développement par rapport à une ligne ou une colonne)

> $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$. Plus généralement, on peut développer selon n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne en respectant les alternances de signes $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Exemples :

(1) Calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la première ligne (réponse : -20) ;

(2) Calcul de $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la deuxième colonne (réponse : 6) ;

(3) Calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la dernière ligne (réponse : 11).

4 Formules de Cramer

Estimation : 1h15
Durée : 1h

4.1 présentation

DÉFINITION :

> On appelle système de Cramer tout système linéaire carré admettant une unique solution.

PROPOSITION : (caractérisation et résolution des systèmes de Cramer)

> Un système linéaire est de Cramer si et seulement si son déterminant est non nul. Son unique solution est donnée par les formules suivantes :
>
> 1. Si (S) $\begin{cases} a_1x + b_1y = m_1 \\ a_2x + b_2y = m_2 \end{cases}$, alors :
>
> $$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} ; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} ;$$
>
> 2. Si (S) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = m_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = m_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = m_3 \end{cases}$, alors :
>
> $$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} ; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} ; z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & m_1 \\ a_2 & b_2 & m_2 \\ a_3 & b_3 & m_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

4.2 application à la résolution d'un système d'ordre 2 à paramètre

Exercice : Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \cos(t)x + \sin(t)y = 1 \\ -\sin(t)x + \cos(t)y = -\sin(t) \end{cases}$, où t est un paramètre réel.

4.3 application à la résolution d'un système d'ordre 3 à paramètre

Exercice : Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ mx + my - 2z = -2 \\ x - my + 2z = 1 \end{cases}$, où m est un paramètre réel.

`éléments de réponses :`

- $\det(S) = -2(m-1)(m+1)$;

- Pour $m \neq 1$ et -1 :
$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & m & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2(m-1)\,;$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0\,;$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & m & -2 \\ 1 & -m & 1 \end{pmatrix}\right| = -(m+2)(m-1).$$

Donc $S = \left\{\left(-\frac{1}{m+1};\ 0;\ \frac{m+2}{2(m+1)}\right)\right\}$.
- $m = 1$: infinité de solutions ;
- $m = -1$: lignes 2 et 3 incompatibles donc pas de solutions.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 12 \\ & & y & + & z & = & 6 \end{array} \right. ; \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 3z & + & t & = & 4 \\ & & & & 2z & - & 3t & = & 2 \end{array} \right. .$$

Exercice 2 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array} \right. ; \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & + & 2y & = & 7 \end{array} \right. ; \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 2w & = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & + & 6w & = & 5 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & + & 2w & = & 4 \end{array} \right. ; \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 5y & + & 4z & - & 13w & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 2z & + & 5w & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & - & 4w & = & 1 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(g)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 5y & + & 4z & - & 13w & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 2z & + & 5w & = & 2 \end{array} \right. .$$

Exercice 3 : En utilisant le pivot de Gauss, déterminer ci-dessous les valeurs de k pour lesquelles le système admet (1) aucune solution, (2) plus d'une solution, (3) une solution unique :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \end{array} \right. ; \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 8z & = & 3 \end{array} \right. .$$

Exercice 4 : Calculer sous la forme la plus factorisée possible :

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} ; \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} ; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2a) & \cos(2b) & \cos(2c) \end{vmatrix} .$$

Exercice 5 : Montrer uniquement avec des opérations élémentaires que :

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c.$$

Exercice 6 : Résoudre les systèmes linéaires d'inconnues x, y, z où m est un paramètre complexe :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right. ; \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ mx - 2y + mz = 2 \\ x - my + 2z = 1 \end{array} \right. ; \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{array} \right. .$$

14. Sommes et produits de nombres

Table des matières

1 Calculs de sommes usuelles **2**
1.1 le symbôle $\sum$ 2
1.2 suites arithmétiques 2
1.3 suites géométriques 3

2 Propriétés vérifiées par $\sum$ **4**
2.1 linéarité 4
2.2 relation de Chasles 5
2.3 télescopage 5
2.4 glissement d'indice 6
2.5 Une identité remarquable 7

3 Le binôme de Newton **7**
3.1 coefficients binomiaux 7
3.2 le triangle de Pascal 8
3.3 la formule du binôme 9

4 Manipulation de $\prod$ **9**
4.1 le symbôle $\prod$ 9
4.2 propriétés vérifiées par $\prod$ 10
4.3 quelques produits classiques 10

Sommes et produit de nombres

$\rightsquigarrow$ 4h15

Dans tout le cours, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Calculs de sommes usuelles

Estimation : 1h
Durée : 1h15

1.1 le symbôle $\sum$

DÉFINITION :

> Pour (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on note : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exemples :

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + ... + n$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$;

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

1.2 suites arithmétiques

DÉFINITION :

> On dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple : $0, 2, 4, 6, 8...$ est arithmétique de raison 2 : $U_{n+1} = U_n + 2$.

PROPOSITION : (propriétés des suites arithmétiques)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $U_n = U_0 + nr$;
2. $\sum_{k=0}^{n} U_k = \frac{U_0+U_n}{2}(n+1)$.

Exemples :

(1) La suite (u_n) des nombres pairs est arithmétique de premier terme 0 et de raison 2, donc $u_n = 2n$;

conséquence : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.3 suites géométriques

DÉFINITION :

On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

Exemple : $0, 2, 4, 8, 16...$ est géométrique de raison 2 : $U_{n+1} = 2U_n$.

PROPOSITION : (propriétés des suites géométriques)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $U_n = q^n U_0$;
2. • Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$;
   • Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} U_k = (n+1)U_0$.

conséquence : Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice : Calculer les sommes suivantes : (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^k$.

2 Propriétés vérifiées par $\sum$

Estimation : 2h
Durée : 1h30

2.1 linéarité

PROPOSITION :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k)}$;
2. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k.}$

Explications :

➩ additivité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k &= (u_0 + u_1 + ... + u_n) + (v_0 + v_1 + ... + v_n)\\ &= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + ... + (u_n + v_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k)\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k).}$

➩ multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k &= \lambda u_0 + \lambda u_1 + ... + \lambda u_n\\ &= \lambda(u_0 + u_1 + ... + u_n)\\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k\end{aligned}$$

Exercice : Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3k + 2^k)$.

2.2 relation de Chasles

PROPOSITION :

Soient (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n+r} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k.}$$

explications :

pour $r \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+r} u_k &= u_0 + u_1 + ... + u_{n+r} \\ &= u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1} + ... + u_{n+r} \\ &= (u_0 + u_1 + u_n) + (u_{n+1} + ... + u_{n+r}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k\end{aligned}$$

Exercice : Calculer : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k$.

Exercice : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ en raisonnant par récurrence.

2.3 télescopage

PROPOSITION :

Soient (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Si $w_k = u_{k+1} - u_k$, alors : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k = u_{n+1} - u_n.}$

explications :

Si $w_k = u_{k+1} - u_k$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} w_k &= w_0 + ... + w_n \\ &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_{n+1} - u_n) \\ &= (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + ... + (u_{n+1} - \cancel{u_n}) \\ &= u_{n+1} - u_0\end{aligned}$$

Exercice : Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

2.4 glissement d'indice

PROPOSITION :

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

1. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k}$;
2. plus généralement, pour $l \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+l} = \sum_{k=l}^{n+l} u_k.}$

explications :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} &= u_1 + ... + u_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k\end{aligned}$$

Exercice : Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k+1)$.

2.5 Une identité remarquable

PROPOSITION : (identité remarquable)

Quels que soient les nombres complexes a et b, nous avons :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

REMARQUE : nous avons également : $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{n-1-k} b^k$.

Exemples :

(1) Pour $n = 2$, l'identité s'écrit : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

(2) Pour $n = 3$, l'identité s'écrit : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

(3) Pour $n = 5$, l'identité s'écrit : $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$.

3 Le binôme de Newton

Estimation : 1h30

Durée : 1h

3.1 coefficients binomiaux

DÉFINITION :

Pour $(n;\ p) \in \mathbb{N}^2$, on note :

1. $n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times .... \times 1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k \text{ si } n \geq 1 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$ (factorielle d'un nombre) ;

2. $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (coefficients binômiaux).

REMARQUE : $\dfrac{n!}{(n-p)!} = \overbrace{n(n-1)...(n-p+1)}^{p \text{ termes}}$. Nous avons donc l'égalité : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$.

Exemples :

(1) $0! = \ldots$, $3! = \ldots$, $4! = \ldots$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \ldots$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \ldots$.

$n!p! \neq (np)!$ (exemple : $2!3! = 12 \neq 6!$).

PROPOSITION : (premières propriétés)

Soient $(n\ ;p) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

1. $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$ (symétrie).

3.2 le triangle de Pascal

PROPOSITION :

Soient $(n\ ;p) \in \mathbb{N}^2$. Alors : $\begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

Interprétation graphique :

n \ p	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	$\overbrace{1}^{\nwarrow + \uparrow}$	0	0	0	0	...
2	1	$\overbrace{2}^{\nwarrow + \uparrow}$	1	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	...
5	1	5	10	10	5	1	...

Le triangle de Pascal

conséquence : les coefficients bibômiaux sont des entiers naturels ! !

3.3 la formule du binôme

PROPOSITION : (Admis)

Soient $(a;\ b) \in \mathbb{C}^2$. Alors : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

REMARQUES :

(1) Pour $n=2$ et $n=3$ nous retrouvons les identités remarquables classiques ;

(2) Nous avons également : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$ car $(a+b)^n = (b+a)^n$.

Exercice :

Donner une expression simple des sommes suivantes :

$$\text{(a) } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ ; \qquad \text{(b) } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\ ;$$
$$\text{(c) } \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}\ ; \qquad \text{(d) } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k}.$$

4 Manipulation de $\prod$

Estimation : 30min
Durée : 30min

4.1 le symbôle $\prod$

DÉFINITION :

Pour (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on note : $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

4.2 propriétés vérifiées par $\prod$

PROPOSITION :

1. (multiplicativité) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k \times \prod_{k=0}^{n} v_k = \prod_{k=0}^{n} u_k v_k$;
2. (multiplication par $\lambda \in \mathbb{C}$) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} u_k$;
3. (glissement d'indice) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_{k+l} = \prod_{k=l}^{n+l} u_k$;
4. (téléscopage) Si on pose : $w_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$, alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} w_k = \frac{u_{n+1}}{u_0}$;
5. (lien somme/produit) • $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$
   • $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \exp(u_k)$.

4.3 quelques produits classiques

Exercice : Calculer les produits suivants : (a) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^k$; (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Somme et produit de nombres

Exercice 1 : Pour les exemples ci-dessous, exprimer simplement u_n en fonction de n :

(a) (u_n) arithmétique, $u_3 = \frac{2}{3}$ et $u_{11} = 0$; (b) (u_n) géométrique, $u_3 = \frac{3}{16}$ et $u_{16} = \frac{1}{16}$;

(c) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n + 1$; (d) $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Exercice 2 : Démontrer (par récurrence) les relations suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$; (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$; (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 3 : (suite arithmético-géométrique) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $U_{n+1} = aU_n + b$, avec $U_0 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. On pose $f : x \mapsto ax + b$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet uni unique solution que l'on notera l.
2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n, $V_n = U_n - l$. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire une expression simple de U_n en fonction de n et U_0.

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$; (c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k^2$; (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$; (e) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-k}$; (f) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} (2k^2 - 3e^{-k})$;

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$; (h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3^{2k+1} + 2^{k+2})$; (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3^{2k+2} + 2^{6k+1})$; (j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3^{3k+3} - 26k - 27)$.

Exercice 5 : En vous aidant du principe de télescopage ou du glissement d'indice, montrer :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$; (chercher a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$)

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4(n+2)}$; (penser à l'indication précédente)

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4(n+2)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+k-2} = \frac{11}{18} - \frac{3n^2+6n+2}{3n(n+1)(n+2)}$;

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$; (décomposer k)

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$;

Exercice 6 : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{6} a_k;\ S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} a_k;\ \ S_3 = \sum_{k=0}^{2n} a_k;\ S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2a_k;\ S_5 = \sum_{k=0}^{n}(a_k - 1);\ S_6 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

2. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 7 : Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+2}\right);\ \ \text{(b)} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right).$$

Exercice 8 : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1. Préciser les valeurs C_n et S_n lorsque x est multiple de 2π.
2. On suppose que x n'est pas multiple de 2π. Montrer que :

$$C_n = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ \ S_n = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. En vous aidant des résultats précédents, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k)$.

Exercice 9 : Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} 5^k \binom{n}{k};\ \ \text{(b)} \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \binom{n}{k};\ \ \text{(c)} \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^{k+1} \binom{n}{k};\ \ \text{(d)} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

$$\text{(e)} \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k};\ \text{(f)} \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1};\ \text{(g)} \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}\cos(kx);\ \text{(h)} \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}\sin(kx).$$

Exercice 10 : Ecrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

$$\text{(a)} \prod_{i=1}^{n}(2i);\ \ \text{(b)} \prod_{i=1}^{n} i^2;\ \ \text{(c)} \prod_{i=3}^{n} i^2;\ \ \text{(d)} \prod_{i=n+1}^{2n} i^2;\ \ \text{(e)} \prod_{i=1}^{n}(2i+1).$$

Exercice 11 : Simplifier les expressions suivantes :

$$\text{(a)} \prod_{k=0}^{n} e^{-k};\ \ \text{(b)} \prod_{k=0}^{n} e^{(\sqrt{2}-k)};\ \ \text{(c)} \prod_{k=0}^{n} 2^k;\ \ \text{(d)} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k};\ \ \text{(e)} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}.$$

---

15. Limites de suites

Table des matières

1 Limite d'une suite réelle **2**
1.1 une remarque de logique . . . 2
1.2 limite finie . . . 2
1.3 limite infinie . . . 3
1.4 suites convergentes, suites divergentes . . . 3

2 Calculs pratiques de limites **4**
2.1 limites usuelles . . . 4
2.2 opérations usuelles . . . 5
2.3 exemples d'applications . . . 6

3 Propriétés des suites admettant une limite **6**
3.1 suites extraites . . . 6
3.2 suites convergentes et suites bornées . . . 7
3.3 passage à la valeur absolue . . . 7
3.4 passage d'inégalités à la limites . . . 8

4 Théorèmes généraux sur les limites **8**
4.1 théorèmes d'encadrement . . . 8
4.2 limites de suites monotones . . . 9
4.3 suites adjacentes . . . 10

5 Brève extension aux suites complexes **11**

Limites de suites

$\rightsquigarrow$ 6h15

Nous utiliserons dans ce cours la notation suivante : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

1 Limite d'une suite réelle

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

1.1 une remarque de logique

Considérons E l'ensemble des épreuves lors des derniers jeux olympiques et les deux assertions suivantes :

- « Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y » ;
- « Il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y »

On comprend bien la nuance entre ces deux phrases : pour la première l'athlète qui remporte l'épreuve n'est pas le même selon l'épreuve alors que ce dernier ne change pas pour la deuxième. Ce principe est encore vrai pour les assertions mathématiques, c'est à dire le sens d'une assertion mathématique change lorsqu'on intervertit les symbôles mathématiques : $\forall$ et $\exists$.

Exemple : Les assertions :

- « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} / n \leq x$ » ;
- « $\exists n \in \mathbb{Z} / \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x$ »

sont différentes. La première est toujours vraie ($n = E(x)$ convient pour chaque valeur de x) alors que la seconde est toujours fausse (cela impliquerait que $\mathbb{R}$ est minoré par n ! ! !).

1.2 limite finie

Intuitivement, dire qu'une suite (u_n) admet l pour limite signifie que : « plus n est grand, plus u_n est proche de l. »

DÉFINITION :

On dit que (u_n) admet l pour limite lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\forall n \geq N,\ |u_n - l| < \varepsilon.$$

signification : $|u_n - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon.$

Exemple : Soit (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que (u_n) admet 0 pour limite.

REMARQUES :

(1) Le rang N à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$ dépend de ε. On le note parfois N_ε ;

(2) Le nombre l de la définition précédente est unique. On note : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

1.3 limite infinie

Intuitivement, tendre vers $+\infty$ signifie « être plus grand que n'importe quel nombre strictement positif » et tendre vers $-\infty$ signifie « être plus petit que n'importe quel nombre strictement négatif. »

DÉFINITION :

On dit que (u_n) tend vers :

1. $+\infty$ lorsque : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A$;
2. $-\infty$ lorsque : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ u_n \leq -A$.

Notations : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty = \pm\infty$.

1.4 suites convergentes, suites divergentes

DÉFINITION :

1. Une suite qui admet une limite finie est dite convergente ;
2. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente ;
3. Deux suites sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exemples :

(1) n et $\frac{1}{n}$ ne sont pas de même nature : n diverge vers $+\infty$ et $\frac{1}{n}$ converge vers 0 ;

(2) $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ sont de même nature : elles convergent toutes les deux (mais vers des limites différentes).

2 Calculs pratiques de limites

Estimation : 1h
Durée : 30min

2.1 limites usuelles

PROPOSITION :

Soient f une fonction réelle telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ et (u_n) définie par : $u_n = f(n)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemples :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{1/n} = 1$.

conséquence : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in]0;\ 1[\\ 0 + \infty \text{ si } q > 1 \\ 1 \text{ si } q = 0 \end{cases}$.

2.2 opérations usuelles

Opérations usuelles sur les limites de suites

- **F.I = forme indéterminée**
- $\infty = -\infty$ ou $+\infty$

1. Somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n+V_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

2. Multiplication par $\lambda \neq 0$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda U_n$	λL	$\begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda>0 \\ -\infty \text{ si } \lambda<0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda>0 \\ +\infty \text{ si } \lambda<0 \end{cases}$

3. Produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_nV_n$	LL'	$\begin{cases} +\infty \text{ si } L>0 \\ -\infty \text{ si } L<0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } L<0 \\ -\infty \text{ si } L>0 \end{cases}$	**F.I**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4. Quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$L'\neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n}$	$\dfrac{L}{L'}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } L>0 \\ -\infty \text{ si } L<0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } L<0 \\ -\infty \text{ si } L>0 \end{cases}$	**F.I**	**F.I**	0	**F.I**

2.3 exemples d'applications

Exercice : Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

$$\text{(a) } u_n = 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\,;\quad \text{(b) } u_n = n^3-n\,;\quad \text{(c) } u_n = n-\ln(n)\,;\quad \text{(d) } u_n = \frac{2^n-1}{3^n-1}.$$

3 Propriétés des suites admettant une limite

Estimation : 1h30
Durée : 1h

3.1 suites extraites

DÉFINITION :

On appelle suite extraite de (u_n) toute suite (v_n) obtenue en ne prenant que certains éléments de (u_n), mais une infinité.

Exemples :

(1) (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$ est une suite extraite de (u_n) ;

(2) Quel que soit (u_n) la suite (v_n) des termes d'indices pairs définie par $v_n = u_{2n}$, est une suite extraite de (u_n) ;

(3) De même la suite (w_n) des termes d'indices impairs définie par $w_n = u_{2n+1}$, est une suite extraite de (u_n) ;

(4) Si (v_n) définie par $v_n = u_{n^2}$ est une suite extraite de (u_n).

PROPOSITION :

Soit (u_n) une suite.

1. Si (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) admet l pour limite ;
2. Si (v_n) et (w_n) telles que $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ admettent toutes deux la même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) admet l pour limite.

Exercice : Étudier la nature des suites suivantes et calculer leurs limites lorsqu'elles existent :

$$\text{(a) } u_n = (-1)^n\,;\quad \text{(b) } u_n = \tfrac{(-1)^n}{n}\,;\quad \text{(c) } u_n = \frac{n(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}.$$

3.2 suites convergentes et suites bornées

DÉFINITION :

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que : (u_n) est :

1. majorée par $M \in \mathbb{R}$ (ou que M est un majorant de la suite) lorque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
2. minorée par $m \in \mathbb{R}$ (ou que m est un minorant de la suite) lorque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$;
3. Une suite admettant au moins un majorant est dite majorée, une suite admettant au moins un minorant est dite minorée, une suite majorée et minorée est dite bornée.

Exemples :

(1) (u_n) définie par : $u_n = n^2$ est minorée : un minorant est ... ;

(2) (u_n) définie par : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est majorée, un majorant est ...

(3) (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$ est bornée, un majorant est ... et un minorant est ...

PROPOSITION :

Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse : il existe des suites bornées qui ne convergent pas. C'est par exemple le cas pour (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

3.3 passage à la valeur absolue

PROPOSITION :

Si (u_n) tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $|u_n|$ tend vers $|l|$.

La suite définie par $v_n = |u_n|$ peut admettre une limite sans pour autant que (u_n) n'admette de limites. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, $|u_n| = 1$ donc admet 1 pour limite. Pourtant (u_n) n'admet pas de limite.

3.4 passage d'inégalités à la limites

PROPOSITION :

Soit (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers $l \in \mathbb{R}$.

1. (a) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq m$, alors $l \geq m$;
   (b) Plus généralement, si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors : $l \geq l'$.
2. (a) Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq M$, alors $l \leq M$;
   (b) Plus généralement, si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors : $l \leq l'$.

Lorsque l'on passe une inégalité stricte à la limite, l'inégalité devient large (exemple : pour $u_n = \frac{1}{n}$ nous avons : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, avec $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, mais nous n'avons pas $l > 0$.)

4 Théorèmes généraux sur les limites

Estimation : 1h30
Durée : 2h20

4.1 théorèmes d'encadrement

THÉORÈME :

Soien (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :

(i) (v_n) et (w_n) convergent vers $l \in \mathbb{R}$; ;

(ii) Pour $n \geq N, v_n \leq u_n \leq w_n$.

Alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

conséquences : Si (u_n) et (α_n) sont telles que :

1. $|u_n| \leq \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
2. (u_n) est bornée et (α_n) tend vers 0, alors $(u_n\alpha_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\alpha_n = 0$.

Exercice : Montrer que la suite définie par : $v_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ converge vers 0.

THÉORÈME : (extension aux limites infinies)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice : Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = n + \sin(n)$.

4.2 limites de suites monotones

DÉFINITION :

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est :

1. croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$;
2. décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$;
3. monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante ;
4. strictement croisssante, strictement décroissante, strictement monotone lorsque l'inégalité correspondante est stricte.

REMARQUES :

(1) Il existe des suites non monotones, par exemple : $u_n = (-1)^n$;

(2) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, alors (u_n) croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$;
(u_n) décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

(3) Si (u_n) est croissante, alors (u_n) est minorée par u_0. Si de plus (u_n) converge vers l, alors u_n est majorée par l.

(4) Si (u_n) est décroissante, alors (u_n) est majorée par u_1. Si de plus (u_n) converge vers l, alors (u_n) est minorée par l.

Exemples :

(1) (u_n) définie par : $u_n = n^2$ est strictement croissante : $u_{n+1} - u_n = \ldots$;

(2) Pour (u_n) définie par : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est strictement décroissante : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ldots$.

THÉORÈME :

1. Soit (u_n) une suite croissante. Alors :
   (a) Si (u_n) est majorée, (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et $l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$;
   (b) si (u_n) n'est pas majorée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit (u_n) une suite décroissante. Alors :
   (a) Si (u_n) est minorée, (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et $l = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$;
   (b) si (u_n) n'est pas minorée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice :

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{X(X-1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1}$. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.
3. Montrer que : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers un réel l, et proposer un encadrement de l.

4.3 suites adjacentes

DÉFINITION :

On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque :

(i) (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

PROPOSITION :

Deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite commune l. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$.

Exercice : Montrer que les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$

convergent vers un même réel que l'on notera e.

5 Brève extension aux suites complexes

Estimation : 1h
Durée : 40min

DÉFINITION :

On dit qu'une suite (u_n) à termes complexes converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$ lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \lambda| = 0$.

Exercice : Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{e^{in}}{n}$ converge vers 0.

PROPOSITION :

Soient (u_n) une suite complexe telle que $u_n = a_n + ib_n$ avec $\begin{cases} a_n \in \mathbb{R} \\ b_n \in \mathbb{R} \end{cases}$ et $\lambda = a + ib$, avec $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons équivalence entre :

(i) (u_n) converge vers λ ;

(ii) (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers a et b.

Exercice : Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \dfrac{1+in}{1-in}$.

PROPOSITION : (passage au congugué et au module)

Soit (u_n) une suite complexe convergeant vers $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \overline{u_n} = \overline{\lambda}$;
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |\lambda|$.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Limites de suites

Exercice 1 : Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

(a) $u_n = \dfrac{5n^2+3n}{(n+1)(n-\frac{1}{2})}$; (b) $u_n = \dfrac{2^n-1}{4^n-3}$; (c) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$;

(d) $u_n = \ln(n^3+2n+1) - 3\ln(n+2)$; (e) $u_n = n^2\cos\left(\dfrac{\pi}{(n+1)^2}\right)$; (f) $u_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}$;

(g) $u_n = \dfrac{n+\ln(n)}{n-\ln(n)}$; (h) $u_n = \dfrac{n^2+2}{e^n-n}$; (i) $u_n = n\sin(\frac{1}{n})$;

(j) $u_n = n(\ln(n+1) - \ln(n))$ (k) $u_n = n(e^{1/n}-1)$; (l) $u_n = e^{n^2+1} - e^{n^2}$;

(m) $u_n = e^{n^2+1/n^2} - e^{n^2}$; (n) $u_n = e^{-n^2+1/n} - e^{-n^2}$; (o) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

(p) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$; (q) $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$; (r) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

(s) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$; (t) $u_n = n^2 - \ln(n) + \sin(2n)$;

Exercice 2 : Étudier la nature des suites de termes généraux suivants :

(a) $\dfrac{n(-1)^n}{1+n^2}$; (b) $\dfrac{n}{(-1)^n n + \sqrt{n}}$; (c) $(-1)^n + \dfrac{1}{n}$; (d) $(-1)^n + n - 1$.

Exercice 3 : Étudier la nature des suites de termes généraux suivants :

(a) $\dfrac{\sin(n)}{1+n^2}$; (b) $n^2 + \sin(n)$; (c) $\dfrac{n^3+n\sin(n)}{n^3+1}$; (d) $\dfrac{1}{n} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{8}\right)$.

Exercice 4 : Étudier la nature des suites de termes généraux suivants :

(a) $\dfrac{E(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$; (b) $nE\left(\dfrac{x}{n}\right)$; (c) $n^2E\left(\dfrac{x}{n}\right)$; (d) $\dfrac{n^2+E(n\sqrt{2})}{n^2-E(n\sqrt{2})}$.

Exercice 5 : Étudier la nature des suites de termes généraux suivants :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}E\left(\frac{k^2}{n}\right)$; (d) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$, $x \in \mathbb{R}$;

Exercice 6 :

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ est croissante. Est-elle convergente ?
2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ est décroissante. Est-elle convergente ?

Exercice 7 : Soit la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ (on pourra faire apparaître une quantité conjuguée).
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
5. Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$.

Exercice 8 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 e^{-\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$
4. Montrer que la suite de terme général $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9 : Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ci-dessous sont adjacentes.

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$; (b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$;

(c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; (d) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) v_n$.

Exercice 10 : Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence en posant : $x_0 = a, y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq y_n$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 11 : Étudier la convergence des suites de termes généraux ci-dessous :

$$\text{(a) } u_n = \frac{(i)^n}{n^2}; \quad \text{(b) } u_n = e^{(3n+i)/n}; \quad \text{(c) } u_n = \frac{n}{1 + in}.$$

Exercice 12 : Étudier la suite définie par : $\begin{cases} z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|) \\ z_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$.

---

16. Groupes, nombres complexes et géométrie

Table des matières

1 Structure algébrique sur un ensemble **2**
- 1.1 lois de composition interne 2
- 1.2 associativité, commutativité, élément neutre 2
- 1.3 symétrique d'un élément 3

2 Groupes **4**
- 2.1 groupes et sous-groupes 4
- 2.2 deux exemples de sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ 5
- 2.3 morphismes de groupes 6
- 2.4 groupe des bijections sur un ensemble E 7

3 Isométries et similitudes directes du plan **7**
- 3.1 transformations planes usuelles 7
- 3.2 isométries et similitudes du plan 10
- 3.3 similitudes planes directes 11

Groupes, nombres complexes et géométrie

$\rightsquigarrow$ 8h

1 Structure algébrique sur un ensemble

Estimation : 2h00
Durée : 1h40

1.1 lois de composition interne

<u>DÉFINITION</u> :

> Soit E un ensemble. On dit que $*$ est une loi de composition interne sur E lorsque pour tout $(a;\ b) \in E^2$, on associe un élément $a*b \in E$. On note : $(E, *)$.

Exemples :

(1) $(\mathbb{N}, +)$ est une loi de composition interne.

(2) $\mathbb{N}, -)$ n'est pas une loi de composition interne.

(3) $(\mathbb{Z}, \times)$ est une loi de composition interne.

(4) Notant $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace, $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \wedge)$ est une loi de composition interne.

(5) Avec les notations précédentes, $(\mathcal{E}, .)$ n'est pas une loi de composition interne.

1.2 associativité, commutativité, élément neutre

<u>DÉFINITION</u> :

> Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit que $*$ est :
>
> 1. associative lorsque : $\forall(a;\ b;\ c) \in \mathbb{R}^3, (a*b)*c = a*(b*c)$;
> 2. commutative lorsque $\forall(a;\ b) \in \mathbb{R}^2, a*b = b*a$;
> 3. admet un élément neutre $e \in E$ lorsque pour tout $x \in E$, $x*e = e*x = x$.

REMARQUES :

(1) pour l'associativité, Les parenthèses indiquent l'ordre dans lequel doivent se faire les calculs. Lorsqu'une loi est associative, l'ordre est sans importance, et l'on peut écrire sans ambiguité : $a * b * c$;

(2) Lorsque $(E, *)$ admet un élément neutre, celui-ci est unique.

Exemples :

structure algébrique	propriétés vérifiées		
	associativité	commutativité	élément neutre
$(\mathbb{Z}, +)$	OUI	OUI	OUI
$(\mathbb{Z}, \times)$	OUI	OUI	OUI
$(\mathbb{Z}^*, \times)$	OUI	OUI	OUI
$(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \wedge)$	NON (a)	NON	NON (b)

(a) $\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} \wedge (-\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

(b) Si $\overrightarrow{e}$ est tel que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{e} = \overrightarrow{e} = \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$, alors par antisymétrie, forcément $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}$, mais alors pour $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, nous n'avons pas $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

1.3 symétrique d'un élément

DÉFINITION :

Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'un élément neutre e. On dit que $x \in E$ admet un symétrique pour $*$ lorsqu'il existe $x' \in E$ tel que : $x * x' = x' * x = e$.

REMARQUES :

(1) Lorsque la loi est associative, le symétrique est unique. On le note alors x^{-1} ;

(2) Toujours lorsque la loi est associative, on peut définir sans ambiguité :

$$x^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ termes}} \end{cases}$$

PROPOSITION :

Soient $(E, *)$ une loi associative et admettant un élément neutre e et x et y admettant un élément symétrique. Alors :

1. Le symétrique de x^{-1} est x ;
2. $x * y$ admet pour symétrique $y^{-1} * x^{-1}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le symétrique de x^n est $(x^{-1})^n$.

Exemples :

(1) Tous les éléments de $(\mathbb{Z}, +)$ admettent un symétrique.

(2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, tous les éléments de $(\mathbb{K}, \times)$ admettent un symétrique sauf 0.

Exercice :

On munit $\mathbb{R}$ de la loi $*$ définie par $x * y = x + y - xy$. Étudier cette loi.

2 Groupes

Estimation : 2h
Durée : 2h50

2.1 groupes et sous-groupes

DÉFINITION :

1. On dit que $(G, *)$ est un groupe lorsque $*$ admet un élément neutre, est associative et tout élément $g \in G$ admet un symétrique ;
2. On dit que $(G, *)$ est un groupe abélien si de plus $*$ est commutative ;
3. Si $(G, *)$ est un groupe, on dit que $G' \subset G$ est un sous-groupe de $(G, *)$ lorsque $(G', *)$ est un groupe.

Exemples :

(1) $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe.

(2) $(\mathbb{K}, \times)$ n'est pas un groupe, mais $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe.

PROPOSITION : (caractérisation des sous-groupes)

Soient $(G, *)$ un groupe et $G' \subset G$. Nous avons équivalence entre :

(i) G' est un sous-groupe de G ;

(ii) Pour tout $(x; y) \in G'^2, \begin{cases} x * y \in G' \\ x^{-1} \in G' \end{cases}$.

Exercice : On note $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2}, (a;\ b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2.2 deux exemples de sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Notation : on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module, c'est à dire l'ensemble des points du plan situés sur le cercle unité.

DÉFINITION :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racines n-èmes de l'unité, et on note $\mathbb{U}_n$,l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$.

PROPOSITION :

1. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, c'est à dire :
   (a) si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$;
   (b) si $(z_1;\ z_2) \in \mathbb{U}^2$, alors $z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$.
2. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$ consitué de n éléments. Plus précisément, si $z_1 = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{z_1;\ z_1^2;\ z_1^3; \ldots ; z_1^{n-1};\ \underbrace{1}_{z_1^n}\}$.

REMARQUES :

(1) Si $z_1 = e^{2i\pi/n}$, alors $z_1^{-1} = z_1^{n-1}$, $z_1^{-2} = z_1^{n-2}$ etc....

(2) Nous déduisons du résultat précédent la factorisation : $z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - z_1^k)$.

dessin géométrique des solutions pour $n = 6$

Exemples :

(1) les racines carrées de l'unité sont : ...

(2) les racines cubiques de l'unité sont : ...

(3) les racines quatrième sont : ...

PROPOSITION : (propriétés des racines n-èmes de l'unité)

Soit $z_1 = e^{2i\pi/n}$.

1. La somme des racines n-èmes de l'unité est égale à 0 : $\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = 0$;
2. Pour $a > 0$, l'ensemble des solutions S de l'équation : $z^n = a$ est : $S = \{a^{1/n};\ a^{1/n}z_1;\ \ldots;\ a^{1/n}z_1^{n-1}\}$.

Exercice : Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

$$\text{(a) } z^3 = 8\,; \quad \text{(b) } \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2.3 morphismes de groupes

DÉFINITION :

Soient $(G, *)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On dit qu'une application $f : G \to H$ est :

1. Un morphisme de groupes lorsque : $\forall (x;\ y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$;
2. Si de plus f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de groupes.

PROPOSITION :

1. La fonction ln est un isomorphismes de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}, +)$;
2. La fonction exp est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
3. La fonction $f : \theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$.

2.4 groupe des bijections sur un ensemble E

On note : • $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des applications de E dans E ;
• $\sigma(E)$ l'ensemble des applications bijectives de E dans E.

PROPOSITION : (structure algébrique sur $\mathcal{F}(E)$)

1. $(\mathcal{F}(E), \circ)$ est associative, non commutative, et admet pour élément neutre l'application identité : id ;
2. $f \in \mathcal{F}(E)$ admet un symétrique pour $\circ$ si et seulement si f est bijective ;
3. $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe.

3 Isométries et similitudes directes du plan

Estimation : 2h00
Durée : 3h30

3.1 transformations planes usuelles

➩ Translations :

DÉFINITION :

On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, et on note t, l'application qui à tout point M du plan associe le point : $t(M) = M + \overrightarrow{u}$.

illustration graphique

PROPOSITION : (expression en affixes complexes d'une translation)

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $t(M)$, alors : $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$ est l'affixe complexe de $\overrightarrow{u}$.
2. Réciproquement toute application complexe telle que $z' = z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$ est l'expression en affixes d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.

Exercice : Déterminer l'expression en affixes complexes de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

➩ Rotations :

DÉFINITION :

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, et on note r, l'application qui à tout point M associe le point $r(M)$ tel que : $\begin{cases} ||\overrightarrow{\Omega r(M)}|| = ||\overrightarrow{\Omega M}|| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega r(M)}}) = \theta[2\pi] \end{cases}$.

illustration graphique

REMARQUES :

(1) Si $\theta = 0[2\pi]$, alors $r = id$.

(2) Si $r \neq id$, alors Ω est l'unique point fixe de la rotation.

PROPOSITION : (expression en affixes complexes d'une rotation)

1. Soit $r \neq id$ la rotation de centre Ω et d'angle θ. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $r(M)$, alors : $z' = e^{i\theta}z + w(1 - e^{i\theta})$ où $w \in \mathbb{C}$ est l'affixe complexe de Ω.
2. Réciproquement toute application complexe telle que $z' = az + b$ avec $\begin{cases} |a| = 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$ et $b \in \mathbb{C}$ est l'expression en affixes d'une rotation d'angle un argument de a et de centre le point d'affixe w, où w est solution de l'équation : $z = az + b$.

Exercice : Déterminer l'expression en affixes complexes de la rotation de centre l'origine et d'angle θ.

➩ Homothéties :

DÉFINITION :

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et on note h, l'application qui à tout point M du plan associe le point $h(M)$ tel que $\overrightarrow{\Omega h(M)} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.

illustration graphique

REMARQUES :

(1) Si $\lambda = 1$, alors $h = id$.

(2) Si $\lambda = -1$, alors h est une rotation d'angle π.

(3) Si $h \neq id$, alors Ω est l'unique point fixe de l'homothétie.

PROPOSITION : (expression en affixes complexes d'une homothétie)

1. Soit $h \neq id$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $h(M)$, alors : $z' = \lambda z + w(1 - \lambda)$ où $w \in \mathbb{C}$ est l'affixe complexe de Ω.
2. Réciproquement toute application complexe telle que $z' = az + b$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R}^* \\ a \neq 1 \end{cases}$ et $b \in \mathbb{C}$ est l'expression en affixes d'une homothétie de rapport a et de centre le point d'affixe w, où w est solution de l'équation : $z = az + b$.

Exercice : Déterminer l'expression complexe de l'homothétie de centre $(1;\ 0)$

et de rapport 3.

➩ Symétries :

DÉFINITION :

On appelle symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$, et on note s, l'application qui à tout point M associe le point $s(M)$ tel que : H est le milieu de $[Ms(M)]$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

illustration graphique

REMARQUES :

(1) Une symétrie orthogonale vérifie $s^2 = id$;

(2) Une symétrie orthogonale ne conserve pas les angles orientés de vecteurs.

(3) Si s est symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $s(M) = M$.

Exercice : Déterminer l'expression complexe de la symétrie orthogonale par

rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = x$.

3.2 isométries et similitudes du plan

DÉFINITION :

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application. On dit que f est :

1. affine lorsque l'image d'une droite quelconque du plan est une droite du plan ;
2. une isométrie lorsque f est affine et conserve les distances : $\forall A, B \in \mathcal{P}, d(f(A), f(B)) = d(A, B)$;
3. une similitude lorsque f est affine et multiplie les distances dans un rapport donné : il existe $k > 0$ tel que : $\forall (A;\ B;\ C) \in \mathcal{P}^3,\ d(f(A), f(B)) = kd(A, B)$.

Le rapport k dans la définition précédente n'est pas forcément le même pour deux similitudes différentes.

Exemples :

(1) Une translation est une isométrie et une similitude ;

(2) Une rotation est une isométrie et une similitude ;

(3) Une symétrie est une isométrie et une similitude ;

(4) Une homothétie de rapport λ tel que $|\lambda| \neq 1$ est une similitude mais n'est pas une isométrie.

PROPOSITION :

1. L'ensemble des similitudes est un sous-groupe de $\sigma(\mathcal{P})$;
2. L'ensemble des isométries est un sous-groupe de l'ensemble des similitudes.

Exercice : On considère s_1 la symétrie par rapport à l'axe des réels et s_2 la

symétrie par rapport à la droite d'équation : $y = x - 1$. On admet que s_2 admet une écriture complexe de la forme : $z' = i\overline{z} + 1 - i$. Montrer que $f = s_1 \circ s_2$ est une isométrie que l'on précisera.

PROPOSITION : (propriétés des isométries et des similitudes du plan)

1. Soit f une isométrie du plan. Alors l'image d'une droite par f est une droite, l'image d'un cercle par f est un cercle de même rayon, l'image d'une surface d'aire $\mathcal{A}$ par f est une surface de même aire ;
2. Soit f une similitude du plan de rapport $k > 0$. Alors l'image d'une droite par f est une droite, l'image d'un cercle de rayon R par f est un cercle de rayon kR , l'image d'une surface d'aire $\mathcal{A}$ par f est une surface d'aire : $k^2\mathcal{A}$.

3.3 similitudes planes directes

DÉFINITION :

Soit f une similitude du plan. On dit que f est directe lorsque f conserve les angles orientés de vecteurs : $\forall(A,B,C) \in \mathcal{P}^3$, $(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})[2\pi]$.

Exemples :

(1) Les rotations, les translations et les homothéties sont des similitudes directes.

(2) une symétrie n'est pas une similitude directe.

PROPOSITION :

1. Toute similitude plane directe admet une expression en affixes complexes de la forme : $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
2. L'ensemble des similitudes planes directes est un sous-groupe de l'ensemble des similitudes.

synthèse : Soit f une similitude plane directe de la forme : $z' = az + b$. Alors :

- Si $a \in \mathbb{R}$, soit - $a = 1$, alors f est une translation.
  - $a \neq 1$, alors f est une homothétie.
- Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, soit - $|a| = 1$, alors f est une rotation.
  -$|a| \neq 1$, alors $f = h \circ r$, où h est une homothétie et r est une rotation. On caractérise f à l'aide de son centre Ω, de son rapport k et de son angle de rotation θ.

Exercice : Caractériser la similitude plane d'écriture complexe : $z' = (1+i)z-1$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Groupes, nombres complexes et géométrie

Exercice 1 : On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne : $x * y = x + y + xy$. Étudier cette loi.

Exercice 2 : Pour $(x; y) \in \mathbb{R}$, on pose : $x * y = -2xy + 2(x + y) - 1$. Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 : On munit $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ de la loi : $(x, y) * (x', y') = (xx', yy')$.

1. Montrer que $\left((\mathbb{R} \setminus \{0\})^2, *\right)$ est un groupe.
2. On pose $H = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\left(((\mathbb{R} \setminus \{0\})^2, *\right)$.

Exercice 4 : On pose pour $(x;\ y) \in]-1;\ 1[^2,\ x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

1. Montrer que $(]-1;\ 1[, *)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(]-1;\ 1[, *)$.

Exercice 5 : Déterminer les nombres complexes z tels que $|z| = 1$ et $|z + 2| = 1$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

(a) $\left(\dfrac{z^2 + 1}{z}\right)^3 = 1$; (b) $(z + 1)^n = (z - 1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$; (c) $(z + i)^n = (i - z)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 : Montrer que le produit des racines n-èmes de l'unité est égal à : $(-1)^{n-1}$.

Exercice 8 : Soient $w = e^{2i\pi/5}$, $S = w + w^4$ et $T = w^2 + w^3$.

1. Calculer $S + T$ et ST. Montrer que S et T sont les solutions du trinôme : $X^2 + X - 1$.
2. En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Exercice 9 : Pour tout réel x, donner une expression simple de : $S(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{8\pi}{5}\right)$.

Exercice 10 : Identifier les transformations d'écritures complexes suivantes :

(a) $f(z) = z + i - 4$; (b) $f(z) = -iz$; (c) $f(z) = -\frac{1}{2}z + 4 - i$;

(d) $f(z) = -jz + 1, j = e^{2i\pi/3}$; (e) $f(z) = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}z + 2 - i$; (f) $f(z) = (\sqrt{3} - i)z + i(\sqrt{3} - 1)$.

Exercice 11 : Déterminer l'expression analytique des transformations suivantes :

- Translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$;
- Homothétie de centre $\Omega(1;\ 1)$ et de rapport $\frac{1}{3}$;
- Rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre $\Omega(-1;1)$;
- La similitude directe qui transforme $A(3;\ 5)$ en $B(-2;\ 0)$ et de centre $\Omega(-1;\ 1)$.

Exercice 12 : Soient t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe 1 et r la rotation de centre O et d'angle θ. Montrer que $f = r \circ t$ est une isométrie dont on précisera la nature selon les valeurs de θ.

Exercice 13 : Reconnaître les tranformations du plan ayant les expressions analytiques suivantes :

$$\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+1 \\ y' = -\frac{1}{2}y-1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = x-y-2 \\ y' = x+y+1 \end{cases} .$$

Exercice 14 : On considère le plan muni du repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de 216 et les mettre sous forme exponentielle.
   On appelle A, B et C les images de ses racines (on notera A le point dont l'affixe est réelle, et B celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive). Placer ces points dans le plan.
2. Soient les points D, E et F d'affixes respectives $3+i\sqrt{3}, -3+i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.
   (a) Montrer que D appartient à la droite (AB). Placer D.
   (b) Sur quelle droite se trouve E ? Placer E.
   (c) Montrer que C appartient à la droite (AC). Placer F.
3. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s transformant A en D et B en E et donner son expression complexe. Déterminer les éléments caractéristiques de s et vérifier que s transforme C en F.

Exercice 15 : Dans le plan orienté, on considère ABC et DEF deux triangles équilatéraux directs avec $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On note G et H les points tels que $EDBG$ et $CDFH$ soient des parallélogrammes.

1. Faire une figure
2. On note a, b, c, d, e, f, g, h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H.
   (a) Montrer que $c - a = e^{i\pi/3}(b-a)$ puis exprimer $f - d$ en fonction de $e - d$.
   (b) Exprimer g en fonction de b, d, e et h en fonction de c, d, f.
   (c) Démontrer que $h - a = e^{i\pi/3}(g-a)$ puis que le triangle AGH est équilatéral.
3. On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et r la rotation de centre D et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. On pose $T = t_2 \circ R \circ t_1$.
   (a) Justifier que T est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
   (b) Déterminer l'image de G par T puis montrer que le triangle AGH est équilatéral.

Exercice 16 : On considère dans le plan orienté un carré direct $ABCD$ et M un point quelconque de (DC). La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N. On désigne par I le milieu de $[MN]$.

1. Montrer que AMN est isocèle.
2. Par quelle transformation du plan M a-t-il pour image I ?
3. Déterminer le lieu décrit par I quand M décrit (DC).

---

17. Comparaisons des suites réelles

Table des matières

1 Suites équivalentes **2**
1.1 généralités . . . 2
1.2 caractérisation pratique . . . 3
1.3 équivalents usuels . . . 3

2 Étude pratique d'équivalents et de limites **3**
2.1 équivalents et opérations usuelles . . . 4
2.2 équivalents de suites polynômiales . . . 4
2.3 équivalents et limites . . . 5

3 Prépondérance et domination **5**
3.1 domination . . . 5
3.2 prépondérance . . . 6
3.3 prépondérance, domination et limites . . . 6

4 Manipulation de la comparaison de suites **6**
4.1 prépondérance et équivalents . . . 7
4.2 opérations usuelles . . . 7
4.3 comparaison des suites de référence . . . 8

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Année 2010-2011
Mathématiques TSI-1

Comparaisons des suites réelles

$\rightsquigarrow$ 5h10

1 Suites équivalentes

Estimation : 1h
Durée : 1h20

1.1 généralités

DÉFINITION :

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$, lorsqu'il existe (w_n) et $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_n = v_n w_n$, avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Exemples :

(1) $n \sim n+1$;

(2) $n+1 \sim n$.

REMARQUES :

(1) Si $u_n \sim 0$, alors (u_n) est nulle à partir d'un certain rang ;

(2) Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

PROPOSITION : (propriétés de la relation d'équivalence)

1. $u_n \sim u_n$; (réflexivité)
2. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$; (symétrie)
3. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$. (transitivité)

1.2 caractérisation pratique

PROPOSITION :

Soit (v_n) une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exercice : Montrer que $n + \ln(n) \sim n$.

1.3 équivalents usuels

PROPOSITION :

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors :

(a) $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; (b) $\ln(1+u_n) \sim u_n$; (c) $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$, ; $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $\sin(u_n) \sim u_n$; (e) $1-\cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$; (f) $\tan(u_n) \sim u_n$;

(g) $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$; (h) $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \frac{u_n^2}{2}$; (i) $\mathrm{th}(u_n) \sim u_n$;

(j) $\arcsin(u_n) \sim u_n$; (k) $\arctan(u_n) \sim u_n$;

(l) $\mathrm{argsh}(u_n) \sim u_n$; (m) $\mathrm{argth}(u_n) \sim u_n$.

Exercice : Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$; (b) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$; (c) $\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$; (d) $e^{1/\ln(n)} - 1$; (e) $e^n - 1$.

Tous ces équivalents usuels ne s'appliquent **UNIQUEMENT** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2 Étude pratique d'équivalents et de limites

Estimation : 1h
Durée : 1h20

2.1 équivalents et opérations usuelles

PROPOSITION :

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $u_n \sim v_n$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$;
- **(produit) :** Si $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$, alors $u_n v_n \sim a_n b_n$;
- **(quotient) :** Pour (v_n) non nulle à partir d'un certain rang, si $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$;
- **(puissance) :** Pour $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

1. Pour le dernier point ci-dessus, α **NE DÉPEND PAS de** n. Lorsque α dépend de n, le résultat est faux. Par exemple : $e^{1/n} \sim 1$, mais $\left(e^{1/n}\right)^n = e \nsim \underbrace{1^n}_{=1}$;
2. De même, on ne peut sommer ni soustraire les équivalents. Par exemple, $n+1 \sim n$, mais $n+1-n = 1 \nsim \underbrace{n-n}_{=0}$ (une suite équivalente à 0 est nulle à partir d'un certain rang) ;
3. Enfin, nous ne pouvons composer les équivalents par une fonction. Par exemple : $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} = ee^n \nsim e^n$ (le quotient tend vers $e \neq 1$).

Exercice : Déterminer les équivalents des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; (b) $n\left(e^{1/n} - 1\right)$; (c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; (d) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$.

2.2 équivalents de suites polynômiales

PROPOSITION :

Soit (u_n) telle que $u_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_0$, avec $a_p \neq 0$. Alors $u_n \sim a_p n^p$.

Exercice : Déterminer un équivalent des suites de termes généraux suivants :

(a) $u_n = \frac{n^3+3}{n(n+1)(n-3)}$; (b) $u_n = \sqrt{n^3+2n^2+1}$; (c) $u_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$.

2.3 équivalents et limites

PROPOSITION :

Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$;
2. Si l est finie et non nulle et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $u_n \sim l$.

Le 3. de la proposition précédente est faux pour $l = 0$. Par exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 mais n'est pas équivalente à 0 (une suite équivalente à 0 est nulle à ,partir d'un certain rang).

Exercice : Déterminer un équivalent simple de la suite telle que $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice : Déterminer la limite des suites de termes généraux :

(a) $u_n = n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$; (b) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

3 Prépondérance et domination

Estimation : 1h
Durée : 45min

3.1 domination

DÉFINITION :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est dominée par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$, lorsqu'il existe (w_n) et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N, u_n = v_n w_n$, avec : (w_n) bornée.

REMARQUES :

(1) (u_n) bornée $\Leftrightarrow u_n = O(1)$;

(2) O se dit « grand O ».

PROPOSITION : (caractérisation pratique)

Soit (u_n) une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n = 0(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n}$ est bornée.

Exercice : Montrer que la suite de terme général $u_n = n^2 + 1$ est dominée par n'importe quelle suite de la forme $v_n = an^2 + bn + c$, avec $a \neq 0$.

3.2 prépondérance

DÉFINITION :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$, lorsqu'il existe (w_n) et $N \in \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \geq N, u_n = v_n w_n$, avec : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

REMARQUES :

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$;

(2) On utilise en physique la notation (dite de Hardy) $u_n << v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$.

PROPOSITION : (caractérisation pratique)

Soit (v_n) une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Exercice : Déterminer les réels α tels que : (a) $n^\alpha = o(n^2)$; (b) $\frac{1}{n^\alpha} = o(\frac{1}{n^2})$.

3.3 prépondérance, domination et limites

PROPOSITION :

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

4 Manipulation de la comparaison de suites

Estimation : 1h
Durée : 1h45

4.1 prépondérance et équivalents

PROPOSITION :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Alors : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

Exercice : Déterminer deux réels a et b tels que $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4.2 opérations usuelles

PROPOSITION :

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(transitivité) :** Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$ (de même pour O).
- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u_n = o(v_n)$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$; (de même pour O) ;
- **(multiplication par une suite) :** Si $u_n = o(a_n)$, alors $u_n v_n = o(a_n v_n)$ (de même pour O) ;
- **(produit) :** Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$, alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$ (de même pour O) ;
- **(puissance) :** Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $u_n = o(v_n)$, alors $u_n^\alpha = o\left(v_n^\alpha\right)$ (de même pour O) ;
- **(somme) :** Si $\left.\begin{array}{l} u_n = o(a_n) \\ v_n = o(a_n) \end{array}\right\}$, alors $u_n + v_n = o(a_n)$ (de même pour O).

REMARQUE : Les opérations précédentes peuvent se réécrire sous les formes suivantes : « $o(o(w_n)) = o(w_n)$ »(transitivité), « $\lambda o(v_n) = o(v_n)$ »(multiplication par λ), « $v_n o(a_n) = o(a_n v_n)$,« $o(u_n)o(v_n) = o(u_n v_n)$ »(produit), « $o(u_n)^\alpha = o(u_n^\alpha)$ »(puissance α), « $o(a_n) + o(a_n) = o(a_n)$ »(somme).

1. Pour la somme, les deux suites doivent être comparées à une même suite. Par exemple, $1 = o(n)$, $2 = o(n+1)$ mais $\underbrace{2-1}_{=1}$ n'est pas négligeable devant $\underbrace{(n+1)-n}_{=1}$;
2. Nous avons : $o(u_n) - o(u_n) = o(u_n)$! !

Exercice : On pose : $u_n = e^{1/n}$ et $v_n = (1+\frac{1}{n})^3 - 2$.

1. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : $u_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $v_n = c + \frac{d}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire un équivalent simple de la suite de terme général : $e^{1/n} + (1 + \frac{1}{n})^3 - 2$.

Exercice : Montrer que $\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

4.3 comparaison des suites de référence

PROPOSITION :

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$. Alors :

1. $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$;
2. $n^\alpha = o(a^n)$;
3. $a^n = o(n!)$;
4. $n! = o(n^n)$.

REMARQUE : En notation de Hardy, cela donnerait : $(\ln n)^\beta << n^\alpha << a^n << n! << n^n$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Comparaison des suites réelles

Exercice 1 : Parmi les suites de terme généraux ci-dessous, lesquelles sont équivalentes ?

(a) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3}$; (b) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$; (c) $c_n = e^{1/n}$; (d) $d_n = \dfrac{n^4+8n^3-1}{(n+1)^6}$;

(e) $e_n = e^{1/n}-1$; (f) $f_n = \dfrac{1}{n^2}$; (g) $g_n = \sqrt[5]{1+\dfrac{5}{n}}-1$; (h) $h_n = \arcsin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux ci-dessous :

(a) $u_n = n^3 \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$; (b) $u_n = n(\ln(n+1)-\ln(n))$; (c) $u_n = \dfrac{n\ln\left(1+\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $u_n = n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (e) $u_n = \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2}-1}$; (f) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\arctan(n^2)$;

(g) $u_n = n^2\arctan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; (h) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$; (i) $u_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$;

(j) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1}-n$; (k) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; (l) $u_n = e^{-n^2+\frac{1}{n}}-e^{-n^2}$;

(m) $u_n = \sqrt{\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}$; (n) $u_n = \ln\left(1+\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right)$; (o) $u_n = \tan\left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)\right)$;

(p) $u_n = \ln\left(\ln\left(e+\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (q) $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (r) $u_n = \sqrt{\cos\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)-1}$.

Exercice 3 : Déterminer les limites des suites de termes généraux ci-dessous :

(a) $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$; (b) $u_n = (-1)^n\left(e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$; (c) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln(n)}$;

(d) $u_n = \left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$; (e) $u_n = n^{1/(1+n^2)}-1$; (f) $u_n = \left(\dfrac{2^n+3^n}{2}\right)^{1/n}$;

(g) $u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{1/n}$; (h) $u_n = (1-\mathrm{th}(n))^{\mathrm{th}(1/n)}$; (i) $u_n = \sqrt{\ln(n^2+1)}-\sqrt{\ln(n^2-1)}$;

(j) $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{\ln(n)}$; (k) $u_n = \left(\dfrac{n^2+2n-3}{n^2-n+1}\right)^n$; (l) $u_n = \left(\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^{n\ln(n)}$.

Exercice 4 : On définit les suites : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}},\ v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle converge vers un nombre réel que l'on déterminera.
2. Déterminer v_n puis calculer de deux manières différentes : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n^2$ puis un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 : On considère la suite définie par :

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = n + \sqrt{u_n}.$$

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Montrer que la suite est croissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2n$.
4. En déduire pour $n \geq 1$: $n \leq u_n \leq n\left(1 - \dfrac{1}{n} + \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n^2}}\right)$, puis un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : On pose : $u_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $v_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ et $w_n = u_n^3 - v_n$.

1. Déterminer a et b tels que : $w_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire un équivalent simple de (w_n).

Exercice 7 : Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité :

$$\text{(a) } \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{\ln(n)}{n},\ \frac{\ln(n)}{n^2},\ \frac{\ln^2(n)}{n},\qquad \text{(b) } n,\ n^2, n\ln(n), \frac{1}{n},\ \ n\ln(n)^{1/2}.$$

Exercice 8 : Comparer les suites de termes généraux suivants :

$$\text{(a) } u_n = n^n\ ;\quad \text{(b) } v_n = n^{\ln(n)}\ ;\quad \text{(c) } w_n = e^{n^2}\ ;\quad \text{(d) } z_n = (\ln n)^{n\ln n}.$$

Exercice 9 : On considère la fonction définie sur $[0;\ 1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{\pi}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on déterminera.
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n).

Exercice 10 :

1. Montrer que l'équation : $x^3 - 3x + 2 = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n sur $]0;\ 1[$.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on précisera.
3. On pose : $v_n = x_n - 1$. Montrer que $v_n \sim \frac{1}{\sqrt{3n}}$. En déduire que : $x_n = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ avec a et b que l'on précisera.

---

18. Matrices

Table des matières

1 Généralités **2**
- 1.1 ensemble des matrices . . . 2
- 1.2 addition et multiplication par un scalaire . . . 3
- 1.3 produit de matrices . . . 4
- 1.4 matrice d'un système linéaire . . . 5

2 Matrices particulières **6**
- 2.1 vecteurs lignes et vecteurs colonnes . . . 6
- 2.2 matrices triangulaires et matrices diagonales . . . 7
- 2.3 matrices symétriques et antisymétriques . . . 8

3 Produit de matrices carrées et matrices inversibles **10**
- 3.1 étude du produit . . . 10
- 3.2 puissance de matrices . . . 10
- 3.3 matrices inversibles . . . 11
- 3.4 déterminant de matrices et matrices inversibles . . . 12

Matrices

$\rightsquigarrow$ 5h30

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Estimation : 2h00
Durée : 2h00

1.1 ensemble des matrices

<u>DÉFINITION</u> :

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

1. On appelle matrice de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes. On note :
$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array} \end{array} \quad \text{, avec } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$
2. On dit que deux matrices de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales lorsque leurs coefficients sont égaux ;
3. On note :
   - $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$,
   - O_{np} l'élement de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0,
4. Lorsque $p = n$, on dit que la matrice est carrée, et on écrit plus simplement :
   - $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$,
   - O_n au lieu de O_{np}.

REMARQUE : Nous utilisons également les notations : $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $A = (C_1, C_2, \ldots, C_p)$ ou encore $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

Exemples :

(1) $A = (i-j)_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1.2 addition et multiplication par un scalaire

DÉFINITION :

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle :

1. somme de A et B, et on note $A+B$ l'élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ défini par :

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \ldots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA l'élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

- $A+B = \ldots$
- $2A = \ldots$
- $3A - B = \ldots$

PROPOSITION : (structure d'espace vectoriel)

1. $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. Plus précisément :
   - L'élément neutre est 0_{np} ;
   - Le symétrique de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est $-A$.
2. Pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$ quelconques :
   - $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
   - $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
   - $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Exercice : Résoudre dans $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{K})$ l'équation : $2X + B = 0$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3 produit de matrices

DÉFINITION :

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le r}} \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le r\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$, on appelle produit de A et B, et on note $AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ la matrice telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemples :

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le produit AB existe et $AB = \ldots$;

(2) En reprenant les deux matrices précédentes, on constate que BA n'existe pas !

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nous constatons que $AB = 0_2$ et $BA = B$.

PROPOSITION : (propriétés du produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$;
2. pour $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $(A+B)C = AC + BC$;
3. pour $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $A(B+C) = AB + AC$;
4. pour $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$,$(AB)C = A(BC)$;
5. $0_{rn}A = 0_{rp}$ et $A0_{pr} = 0_{nr}$.

Exercice : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices précédentes.

1.4 matrice d'un système linéaire

DÉFINITION :

Soit (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_P = b_n \end{cases}$; un système linéaire de n équations, à p inconnues et à coefficients dans K. On appelle matrice associée à S la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$.

PROPOSITION : (écriture matricielle d'un système)

Le système (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_P = b_n \end{cases}$ s'écrit matriciellement : $AX = B$, où A est la matrice associée à (S), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$.

Exemples :

(1) Le système linéaire : (S) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ x - 3y + 1 = 2 \end{cases}$ s'écrit matriciellement ... ;

(2) Le système linéaire : (S) $\begin{cases} 2x & +3y & +2z & = 1 \\ & 3y & +1 & = 2 \\ & & 3z & = 4 \end{cases}$ s'écrit matriciellement ...

2 Matrices particulières

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

2.1 vecteurs lignes et vecteurs colonnes

DÉFINITION :

On appelle :

1. vecteur ligne toute matrice constituée d'une seule ligne ;
2. vecteur colonne tout matrice constituée d'une seule colonne.

Exemples :

(1) $A = (1\ 2\ 3)$ et $B = (0\ 1)$ sont des vecteurs lignes ;

(2) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs colonnes.

2.2 matrices triangulaires et matrices diagonales

DÉFINITION :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

1. triangulaire supérieure lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i > j$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Si de plus $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$, on dit que A est strictement triangulaire supérieure ;
2. triangulaire inférieure lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i < j$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Si de plus $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$, on dit que A est strictement triangulaire inférieure ;
3. diagonale lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Si de plus $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$, on dit que A est scalaire.

REMARQUE : A diagonale $\Leftrightarrow$ A triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

PROPOSITION : (propriétés des matrices triangulaires)

1. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures. Alors :
   (a) $A + B$ est triangulaire supérieure ;
   (b) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est triangulaire supérieure ;
   (c) AB est triangulaire supérieure.
2. Soient A et B deux matrices triangulaires inférieures. Alors :
   (a) $A + B$ est triangulaire inférieure ;
   (b) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est triangulaire inférieure ;
   (c) AB est triangulaire inférieure.

2.3 matrices symétriques et antisymétriques

(a) transposition :

DÉFINITION :

Pour $A = (C_1, ..., C_p) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A, et on note : ${}^tA$ la matrice telle : ${}^tA = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \dots$.

PROPOSITION : (propriétés de la transposition)

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors :
(a) Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, ${}^t({}^tA) = A$;
(b) Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$;
(c) Pour A et B deux $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$;
(d) Pour $A \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

(b) matrices symétriques et antisymétriques :

DÉFINITION :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

(a) symétrique lorsque : ${}^tA = A$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.

(b) antisymétrique lorsque : ${}^tA = -A$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

PROPOSITION :

1. Soient A et B deux matrices symétriques. Alors :
   (a) $A + B$ est symétrique ;
   (b) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est symétrique.
2. Soient A et B deux matrices antisymétriques. Alors :
   (a) $A + B$ est antisymétrique ;
   (b) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est antisymétrique.

Le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément symétrique. De même pour les matrices antisymétriques. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons A et B symétriques, mais $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

Exercice : Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose : $S = A\,{}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

S est symétrique.

3 Produit de matrices carrées et matrices inversibles

Estimation : 1h30
Durée : 2h45

3.1 étude du produit

PROPOSITION :

On considère $\mathcal{M}_{\backslash}(\mathbb{K})$ muni du produit de matrices $\times$. Alors $\times$ est :

- associatif : $A(BC) = (AB)C$;
- non commutatif ;
- Admet pour élément neutre la matrice : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;
- n'est pas un groupe : tout élément n'admet pas forcément de symétrique.

Exercice : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_2$.
2. Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $BA = I_2$.
3. Montrer que A n'admet pas de symétrique.

3.2 puissance de matrices

notation : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note : $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et pour tout $n \geq 2$, $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ termes}}$.

REMARQUE : nous avons $A^{n+1} = A \times A^n = A^n \times A$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^2 = \ldots$, $A^3 = \ldots$. Plus généralement, il semble que $A^n = \ldots$.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour

tout entier narurel n.

PROPOSITION : (binôme de Newton)

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est à dire tels que : $AB = BA$. Alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B^k A^{n-k}$.

Il faut absolument vérifier $AB = BA$. En effet, sinon, pour $n = 2$, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB+BA}_{\neq 2AB} + B^2$.

Exercice : En écrivant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour $n \geq 2$.

3.3 matrices inversibles

DÉFINITION :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible lorsque A admet un symétrique pour le produit matriciel, c'est à dire lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que : $AB = BA = I_n$. On note $B = A^{-1}$ et on appelle B l'inverse de A. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

notations : On note
- $B = A^{-1}$ que l'on appelle l'inverse de A ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

PROPOSITION : (calcul pratique de l'inverse)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et pour tout $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution. On obtient A^{-1} en écrivant matriciellement l'unique solution du système : $X = A^{-1}B$.

Exercice : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

PROPOSITION : (propriétés algébriques des matrices inversibles)

1. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe. Plus précisement :
   (a) Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et l'inverse de A^{-1} est A : $(A^{-1})^{-1} = A$;
   (b) Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3.4 déterminant de matrices et matrices inversibles

DÉFINITION :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, et on note $\det(A)$, le déterminant : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, et on note $\det(A)$, le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

PROPOSITION : (propriétés du déterminant)

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. En particulier, pour tout entier naturel n, $\det(A^n) = (\det A)^n$;
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det(A)$.

Nous n'avons pas $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. En effet Pour $A = I_2$, $\underbrace{\det(I_2 + I_2)}_{=4} \neq= \underbrace{\det(I_2) + \det(I_2)}_{=2}$

PROPOSITION : (caractérisation des matrices inversibles)

> Une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exercice : Montrer que qu'une matrice carrée d'ordre 3 triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice : On dit que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est nilpotente lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^r = O_3$.

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
2. Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut être inversible.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Matrices

Exercice 1 : Effectuer tous les produits possibles de deux matrices dans la liste ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Déterminer si la matrice A est inversible puis résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations $AX = B$ puis $XA = B$ pour les valeurs de A et B suivantes :

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer toutes les matrices M telles que :

$$\text{(a) } AM = 0_3\,; \quad \text{(b) } AM = I_2\,; \quad \text{(c) } MA = I_2\,; \quad \text{(d) } AM = MA.$$

2. En utilisant uniquement les résultats précédents, montrer que la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 4 : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère les matrices $S = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ et $T = \dfrac{A - {}^tA}{2}$.

1. Calculer S et T lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, S est symétrique, T est antisymétrique et $A = S + T$.

Exercice 5 : Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6 : Inverser les matrices suivantes (quand cela est possible) :

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(d) } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 8 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\alpha) \\ -1 & 0 & \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M^2 et M^3.
2. On pose $A(x) = I_3 + xM + \frac{x^2}{2}M^2$. Comparer $A(x+y)$ et $A(x)A(y)$.
3. En déduire que $A(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer $A^{-1}(x)$.

Exercice 9 : On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer simplement J^2 en fonction de J, puis montrer que J n'est pas inversible.

Exercice 10 : Montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est antisymétrique, alors A n'est pas inversible.

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3, puis B^n pour $n \geq 3$.
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 12 : Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $B = P^{-1}AP$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}, B^n$ et en déduire A^n.
3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations linéaires :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 3v_n + w_n \end{cases}.$$

   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

   (b) En déduire une expression simple de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

---

19. Limites et continuité de fonctions

Table des matières

1 Généralités 2

1.1 limite finie en x_0 2

1.2 continuité, continuité à droite et à gauche 3

1.3 autres limites 4

2 Résultats généraux sur les limites 5

2.1 propriétés des fonctions admettant une limite 5

2.2 théorèmes d'encadrement 7

2.3 limites de fonctions monotones 8

3 Résultats généraux sur les fonctions continues 8

3.1 opérations usuelles 8

3.2 prolongement par continuité 9

3.3 suite récurrente définie par une fonction continue 10

3.4 image continue d'un ensemble fermé borné 10

4 Autour du théorème des valeurs intermédiaires 11

4.1 la méthode de dichotomie 11

4.2 généralisation : le théorème des valeurs intermédiaires 12

4.3 application 13

Limites de fonctions et fonctions continues

$\rightsquigarrow$ 7h30

Notations : On note, sauf mentions contraires :

- f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I un intervalle (non vide) inclus dans D ;
- x_0 un point de I ou une borne finie de I (exemple : $I =]0;\ +\infty[$ et $x_0 = 0$).

1 Généralités

Estimation : 2h
Durée : 1h30

1.1 limite finie en x_0

DÉFINITION :

On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ /\ \forall x \in D, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

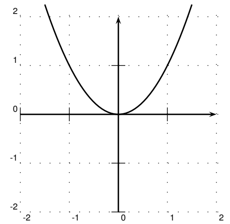
signification :

$$|x - x_0| \leq \eta \Leftrightarrow x \in [x_0 - \eta;\ x_0 + \eta]$$
$$|f(x) - L| \leq \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in [L - \varepsilon;\ L + \varepsilon]$$

notations : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L$ ou $\lim\limits_{x_0} f = L$.

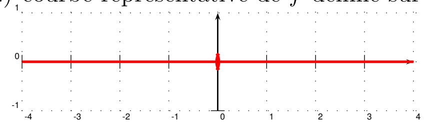
Exemples :

(1) courbe représentative de la fontion définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.



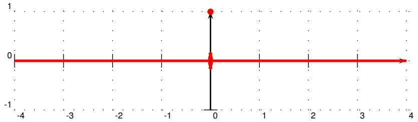
graphiquement, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 1$. Vérifions ceci à l'aide de la définition de la limite.

(2) courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$.



graphiquement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(3) courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} f(0) = 1 & \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$



graphiquement, f n'admet pas de limite en 0.

REMARQUES :

(1) La limite, lorsqu'elle existe, est unique ;

(2) Le η dépend à priori de ε. On rencontre parfois la notation η_ε ;

(3) Si f est définie en x_0 et admet une limite en x_0, cette limite est forcément égale à $f(x_0)$;

(4) On dit que f admet pour limite L à droite en x_0 si la fonction $\tilde{f}$ restriction de f à $D \cap]-\infty;\ x_0[$ admet L pour limite en x_0. On note $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$;

(5) On dit que f admet pour limite L à gauche en x_0 si la fonction $\tilde{f}$ restriction de f à $D \cap]x_0;\ +\infty[$ admet L pour limite en x_0. On note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

1.2 continuité, continuité à droite et à gauche

DÉFINITION :

Soit $x_0 \in D$. On dit que f est :

1. continue en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0, c'est à dire : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;
2. continue à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;
3. continue à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exemples :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Nous avons :
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq \underbrace{f(0)}_{=1}$ donc f n'est pas continue à droite en 0 ;
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq \underbrace{f(0)}_{=1}$ donc f n'est pas continue à gauche en 0 ;
   - f n'est continue ni à gauche ni à droite en 0 donc f n'est pas continue en 0.
2. On considère la fonction partie entière notée E. Nous avons :
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = 0 = E(0)$ donc E est continue à droite en 0 ;
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} E(x) = -1 \neq \underbrace{E(0)}_{=0}$ donc E n'est pas continue à gauche en 0 ;
   - E n'est pas continue à gauche en 0 donc E n'est pas continue en 0.

PROPOSITION :

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Exercice : Les fonctions suivantes sont-elles continues au point proposé ?

(a) f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [0;\ 2] \\ x^2 - 2 & \text{sinon} \end{cases}$, $x_0 = 2$;

(b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-1)^{E(x)}$ en $x_0 = 0$.

1.3 autres limites

DÉFINITION :

1. On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ lorsque :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$
« Plus x est grand, plus $f(x)$ est proche de L »
2. On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $-\infty$ lorsque :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x \leq -B \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$
« Plus x est petit, plus $f(x)$ est proche de L »
3. On dit que f admet $+\infty$ pour limite
   (a) en x_0 lorsque :
   $$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A;$$
   (b) en $+\infty$ lorsque :
   $$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A;$$
   (c) en $-\infty$ lorsque :
   $$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ / \ \forall x \in D, x \leq -B \Rightarrow f(x) \geq A;$$
4. On définit de manière analogue la limite en $-\infty$ pour un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

notations : Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ ou $\lim\limits_{a} f = b$.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$. Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (*vérification à l'aide de la définition*).

REMARQUE : La limite, lorsqu'elle existe, est unique.

2 Résultats généraux sur les limites

Estimation : 2h
Durée : 1h45

On note dans cette section $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

2.1 propriétés des fonctions admettant une limite

(a) suite et limites de fonctions :

PROPOSITION :

Soit (u_n) une suite d'élements de D telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$. Si f admet b pour limite en a, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Exercice : Montrer que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

(b) fonctions localement bornées.

DÉFINITION :

On appelle voisinage de :
(a) $a = x_0 \in \mathbb{R}$ tout intervalle de la forme : $[x_0 - \eta;\ x_0 + \eta]$ avec $\eta > 0$;
(b) $a = +\infty$ tout intervalle de la forme : $[B;\ +\infty[$ avec $B > 0$;
(c) $a = -\infty$ tout intervalle de la forme : $]-\infty;\ -B]$ avec $B > 0$;

PROPOSITION :

Si f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée sur un voisinage de a.

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$ donc sur un voisinage de $+\infty$, mais n'admet pas de limite en $+\infty$.

(c) passage à la valeur absolue.

PROPOSITION :

Si f admet b pour limite en a, alors $|f|$ admet $|b|$ pour limite en a (par convention on pose : $|\pm\infty| = +\infty$).

La réciproque n'est pas vraie. Considérons par exemple la fonction f définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}$. Nous avons $|f(x)| = 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. Pourtant f n'admet pas de limite en 0 puisque nous avons vu précédemment qu'elle n'était pas continue en 0.

(d) passage d'inégalités à la limite.

PROPOSITION :

Soit f une fonction admettant $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) (a) Si au voisinage de a, $f(x) \geq m$, alors $L \geq m$;

(b) Plus généralement, si au voisinage de a, $f(x) \geq g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L'$, alors : $L \geq L'$.

(2) (a) Si au voisinage de a, $f(x) \leq M$, alors $L \leq M$;

(b) Plus généralement, si au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L'$, alors : $L \leq L'$.

Lorsque l'on passe une inégalité stricte à la limite, l'inégalité devient large (exemple : pour $f(x) = \frac{1}{x}$ nous avons : pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, avec $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, mais nous n'avons pas $L > 0$.)

2.2 théorèmes d'encadrement

THÉORÈME :

Soien f, g et h trois fonctions réelles telles que :

(i) au voisinage de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;

(ii) g et h admettent $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$;

Alors f une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Exercice : Montrer que la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

THÉORÈME : (extension aux limites infinies)

Soient f et f deux suites telles qu'au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$.

1. si $\lim\limits_{x\to+a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$;
2. si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exercice : Déterminer la limite en 0 de la fonction définie par $f(x) = \ln(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.3 limites de fonctions monotones

THÉORÈME :

Soit f une fonction croissante définie sur $I =]a_1;\ a_2[$, avec $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $a \in I$, f admet une limite à droite et à gauche en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
2. Si f est majorée sur I, alors f admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en a_2 et $L = \sup\{f(x), x \in I\}$. Sinon $\lim\limits_{x\to a_2} f(x) = +\infty$;
3. si f minorée sur I, alors f admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en a_1 et $L = \inf\{f(x), x \in I\}$. Sinon $\lim\limits_{x\to a_1} f(x) = -\infty$.

REMARQUE : Nous avons un résultat analogue lorsque f est décroissante.

L'intervalle doit absolument être ouvert. Par exemple, la fonction f définie sur $[0;\ 1]$ par $f(x) = x + E(x)$ est croissante sur $[0;\ 1]$ mais n'admet pas de limite en 1.

Exercice : On note F la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $f(x) = e^{-x^2}$, c'est à dire définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1. Montrer que pour $x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt \leq e^{-1} - e^{-x}$.
2. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq 1 + \frac{1}{e}$, puis que F admet une limite finie L en $+\infty$ dont on précisera un encadrement.

3 Résultats généraux sur les fonctions continues

Estimation : 2h
Durée : 2h15

3.1 opérations usuelles

DÉFINITION :

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D. On note $\mathcal{C}^0(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

PROPOSITION : (opérations usuelles)

1. $\mathcal{C}^0(D)$ est stable par addition et par multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$. Plus précisément, si f et g sont continues sur D, alors pour $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue sur D.
2. $\mathcal{C}^0(D)$ est stable par produit : si f et g sont continues sur D, alors $f \times g$ est continue sur D.
3. Si f est continue sur D et g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.
4. Si f et g sont continues et telles que : $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est continue sur D.

REMARQUE : Toutes les fonctions usuelles vues en début d'année sont continues sur leurs ensembles de définition.

Exercice : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3.2 prolongement par continuité

PROPOSITION :

Soit f continue sur D et $x_0 \notin D$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors l'application $\tilde{f}$ définie sur $D \cup \{x_0\}$ telle que :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \neq x_0 \\ l & \text{pour } x = x_0 \end{cases},$$

est continue sur $D \cup \{x_0\}$ et est appelée le **prolongement par continuité** de f sur $D \cup \{x_0\}$.

REMARQUE : Souvent, par abus de notation, on note encore f ce prolongement.

Exemple : la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0 et est le prolongement par continuité de la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0.

Exercice : Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

3.3 suite récurrente définie par une fonction continue

PROPOSITION :

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I = [a;\ b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $\begin{cases} f(I) \subset I \\ f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est croissante sur } I \end{cases}$, alors (u_n) converge vers un point fixe de f sur $[a;\ b]$, c'est à dire vers $l \in [a;\ b]$ tels que $f(l) = l$.

Exercice : Montrer que la suite définie par la relation de récurrence : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ est convergente et préciser sa limite.

3.4 image continue d'un ensemble fermé borné

THÉORÈME : (Weierstrass)

Toute fonction continue sur $I = [a;\ b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire :

1. $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est borné.
2. il existe $x_m \in I$ et $x_M \in I$ tels que $f(x_m) = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ et $f(x_M) = \sup\limits_{x \in I} f(x)$.

REMARQUE : Le théorème est vrai même lorsque I est une réunion d' intervalles.

Le théorème n'est pas vérifié lorsque :

(1) l'intervalle n'est pas fermé. C'est par exemple le cas pour $\dfrac{1}{x}$ regardée sur $]0;\ 1]$.

(2) l'intervalle n'est pas borné. C'est par exemple le cas pour e^x regardée sur $\mathbb{R}$.

(3) la fonction f est discontinue. C'est par exemple le cas pour la fonction f définie sur $[0;\ 1]$ par $\begin{cases} f(x) = x \text{ pour } x \in [0;\ 1[\\ f(1) = 0 \end{cases}$.

Exercice : Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique de période $T > 0$ est bornée.

4 Autour du théorème des valeurs intermédiaires

Estimation : 2h
Durée :

4.1 la méthode de dichotomie

PROPOSITION :

Soient a et b deux réels et $f : [a;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;\ b]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a;\ b]$ tel que $f(c) = 0$.

REMARQUE : $f(a)f(b) \leq 0$ est équivalente à $\begin{cases} f(a) \leq 0 \\ f(b) \geq 0 \end{cases}$ OU $\begin{cases} f(a) \geq 0 \\ f(b) \leq 0 \end{cases}$

explications : On va construire deux suites d'éléments qui vont converger toutes deux vers le même zéro de la fonction f. Nous aurons donc un algorithme, appelé « dichotomie », pour calculer des valeurs approchées des zéros d'une fonction continue.

Dans un premier temps, on remarque que si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, alors le résultat est évident. On supposera donc dorénavant : $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (on raisonnera de même pour le cas $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$).

On construit cette suite comme suit :

- On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Sinon, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$.
- On procède de même sur l'intervalle $[a_1;\ b_1]$. On définit alors a_2 et b_2, puis on refait pareil sur $[a_2;\ b_2]$ etc...

On construit de cette façon par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vérifie alors les points suivants (démonstration rigoureuse par récurrence) :

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b-a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

BILAN : les deux suites sont adjacentes et convergent donc vers une même limite commune, que l'on note c. Puisque par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0$, par passage à la limite, et f étant continue en c : $f(c) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \leq 0$. De même, $f(b_n) \geq 0$, donc nous avons aussi : $f(c) \geq 0$. Finalement, c est bien tel que $f(c) = 0$.

REMARQUE : Nous avons de plus : $\bullet a_n \leq c \leq b_n$;
$\bullet 0 \leq b_n - c \leq \underbrace{b_n - a_n}_{=\frac{b-a}{2^n}}$;
$\bullet 0 \leq c - a_n \leq \underbrace{b_n - a_n}_{=\frac{b-a}{2^n}}$.

Exercice :

1. Montrer que l'équation $\begin{cases} e^{-x} = -x + 2 \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ admet une unique solution c comprise entre 1 et 2.
2. Donner un encadrement de sa valeur à 10^{-1} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

4.2 généralisation : le théorème des valeurs intermédiaires

PROPOSITION : (caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. I est un intervalle réel ;
2. Tout nombre compris entre deux éléments x et y de I appartient à I.

THÉORÈME : (des valeurs intermédiaires)

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout a, b appartenant à I et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;\ b]$ tel que $y = f(c)$.

REMARQUE : Le théorème des valeurs intermédiaires s'écrit aussi « tout nombre y compris entre deux éléments y_1 et y_2 de $f(I)$ appartient à $f(I)$ » : autrement dit le théorème des valeurs intermédiaires revient à dire que $\underline{f(I)}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

> Le théorème est faux si f n'est pas continue ! Par exemple l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice : Montrer que quels que soient les réels a, b, c, le polynôme $P(x) =$

$x^3 + ax^2 + bx + c$ admet au moins une racine réelle.

4.3 application

PROPOSITION :

1. Si f est continue sur I et ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant sur I ;
2. Si f est continue et ne s'annule pas sur $I = [a;\ b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in I, |f(x)| \geq m$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Limites de fonctions et fonctions continues

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont-elles continues aux points proposés ?

$$\text{(a) } xE(x) \text{ en } 0\,; \quad \text{(b) } x - E(x) \text{ en } 0\,; \quad \text{(c) } \frac{x - E(x)}{x + E(x)} \text{ en } 1.$$

Exercice 2 : Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 + b & \text{si } x = 0 \\ bx + 2a & \text{sinon} \end{cases}$$

soit continue en 0.

Exercice 3 : Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas de limites aux points proposés :

(a) $f(x) = \cos(x)$, $a = -\infty$; (b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$, $a = +\infty$; (c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = 0$.

Exercice 4 : Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\text{(a) } f(x) = E(x)\,; \quad \text{(b) } f(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}\,; \quad \text{(c) } f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,; \quad \text{(d) } f(x) = \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 5 : On note F la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ qui s'annule en 0, c'est à dire $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

1. Montrer que pour $x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^3} \leq \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire $F(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2}$, puis que F admet une limite en $+\infty$ dont on proposera un encadrement.

Exercice 6 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous :

$$\text{(a) } f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0\,; \quad \text{(b) } f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

Exercice 8 : Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition et les prolongements par continuité éventuels sur $\mathbb{R}$.

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}\,; \quad \text{(b) } f(x) = x\ln(x)\,; \quad \text{(c) } f(x) = x^x\,; \quad \text{(d) } f(x) = e^{-1/x^2}.$$

Exercice 9 :

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^{15} - 3x^{12} + x^7 - x^5 + 2x^2 + 1$ admet au moins une racine réelle négative.
2. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution positive ou nulle.
3. Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 10 :

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que soit $f = 1$ soit $f = -1$.
2. Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) - f(x) = 0$.

Exercice 11 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonctions définie par : $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$.

1. Étudier les variations de f'.
2. En déduire qu'il existe un unique $a \in]-1;\ 0[$ tel que : $f'(a) = 0$.
3. Donner le tableau de variations de f.
4. À l'aide de la méthode de dichotomie, donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

Exercice 12 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;\ b]$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$.

indication : montrer que $g(x) = f(x) - x$ s'annule au moins une fois sur I.

Exercice 13 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x) \quad (*)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que si f vérifie $(*)$, alors f est constante. Étudier la réciproque.

Exercice 14 : Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 15 : On considère la suite définie par $u_0 \in [0;\ +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. On suppose $u_0 \in [0;\ 1]$. Montrer que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.
2. Que se passe-t'il lorsque $u_0 \in]1;\ +\infty[$?

Exercice 16 :

1. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on notera c.
2. Proposer une valeur approchée de c à 10^{-1} près à l'aide de la méthode de dichotomie.
3. Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$ converge vers c.

---

20. Espaces vectoriels

Table des matières

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels **2**
1.1 espaces vectoriels 2
1.2 sous-espaces vectoriels 3
1.3 espace vectoriel engendré par des vecteurs 4
1.4 espaces vectoriels classiques 5

2 Intersection, somme et sous-espaces supplémentaires **7**
2.1 intersection 7
2.2 somme 8
2.3 espaces supplémentaires 8

3 Applications linéaires **9**
3.1 définition et premières propriétés 9
3.2 noyau et image d'une application linéaire 10
3.3 structure d'espace vectoriel 10

4 Endomorphismes et automorphismes **11**
4.1 généralités 11
4.2 projecteurs 12
4.3 symétries 13

Espaces vectoriels et applications linéaires

$\rightsquigarrow$ 9h

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Estimation : 2h00
Durée : 3h00

1.1 espaces vectoriels

DÉFINITION :

Soit E un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur E lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in E$;
2. Pour E muni d'une loi de composition interne notée « + », et d'une loi de composition externe, notée « . », on dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel lorsque :
   (i) $(E, +)$ est un groupe abélien ;
   (ii) Pour tous $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$;
   $$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v} \\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\} \text{(distributivité mixte)} ;$$
   $$\lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v} \ \} \text{ (associativité mixte)} ;$$
   $$1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$
3. Lorsque E est un espace vectoriel, les éléments de E sont appelés les vecteurs (on les note donc, au moins au début, avec une flèche), et les éléments de $\mathbb{K}$ les scalaires.

REMARQUES :

(1) L'élément neutre pour la loi + est noté $\overrightarrow{0}$;

(2) Nous déduisons de la définition les points suivants :

- $\lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$;

- $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
- $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Exemples :

(1) L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel. Si l'on fixe une base $\mathcal{B}$ et que l'on exprime les vecteurs dans $\mathcal{B}$, les opérations sont les suivantes :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$;
- $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

(2) De la même façon, nous identifions l'ensemble des vecteurs de l'espace à $\mathbb{R}^3$ muni des opérations :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$;
- $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Alors $\mathbb{R}^3$ muni de ces opérations est un espace vectoriel.

1.2 sous-espaces vectoriels

DÉFINITION :

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.

PROPOSITION : (caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide. Nous avons équivalence entre :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E ;

(ii) F est stable par combinaison linéaire : pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in F^2$ et scalaires $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$;

(iii) pour tous vecteurs $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v} \in F$.

REMARQUE : Si F est un sous-espace vectoriel de E et $\overrightarrow{0}$ est le vecteur nul de E, alors $\overrightarrow{0} \in F$.

Exercice : On considère $\overrightarrow{P}$ muni d'une base orthonormée directe. Montrer que l'ensemble des vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

(a) $x + 2y = 0$, est un sous-espace vectoriel ;

(b) $x + 2y = 1$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

1.3 espace vectoriel engendré par des vecteurs

DÉFINITION :

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de E.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$ lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ tels que : $\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u}_1 + ... + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k}$;
2. On note $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

Exemples :

(1) $\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ correspond aux vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que ...

(2) $\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ correspond à tous les vecteurs du plan.

Exercice : Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Préciser cette dernière.

PROPOSITION :

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de E. Alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

DÉFINITION :

Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

1. Lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$, on dit que F est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$ ou encore que $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de F ;
2. Lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u})$, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on dit que F est une droite vectorielle.

Exercice : On note F l'ensemble des vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$x + y + z = 0$.

1. Déterminer une famille génératrice de F.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1.4 espaces vectoriels classiques

(a) l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec

$\begin{cases} x_1 \in \mathbb{K} \\ x_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

$$\bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ; \bullet \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION :

$\mathbb{K}^n$ muni des opérations précédentes est un espace vectoriel.

Exercice : Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que

$x+y+z+t = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On note F cet ensemble. Déterminer une famille génératrice de F.

(b) l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION :

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

Exercice :

1. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On note F l'ensemble des matrice triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Montrer que F est engendré par des vecteurs que l'on précisera.

(c) l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

- $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$;
- $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$.

PROPOSITION :

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations précédentes est un espace vectoriel.

Exercice : Montrer que l'ensemble des suites (u_n) telles que $u_{n+1} = 2u_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(d) l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{K},\ \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{F}(\mathbb{K},\ \mathbb{K})$ des opérations suivantes :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

PROPOSITION :

$\mathcal{F}(\mathbb{K},\ \mathbb{K})$ muni des opérations précédentes est un espace vectoriel.

Exercice : Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$y' - xy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$. En déterminer une famille génératrice.

2 Intersection, somme et sous-espaces supplémentaires

Estimation : 2h
Durée : 1h45

Dans toute cette sous-section, on note $(E, +, .)$ un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

2.1 intersection

DÉFINITION :

On appelle intersection de F et G, et on note $F \cap G$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à F et à G.

PROPOSITION :

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice : On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$

Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

2.2 somme

DÉFINITION :

On appelle somme de F et G, et on note $F + G$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x} \in E$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

PROPOSITION :

1. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E ;
2. Si $F = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, .., \overrightarrow{u_p})$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et $G = \text{vect}(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_r})$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, alors $F + G = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_r})$.

2.3 espaces supplémentaires

DÉFINITION :

On dit que F et G sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, lorsque tout élement $\overrightarrow{x}$ de E admet une unique décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec : $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont supplémentaires.
En effet les vecteurs considérés forment une base du plan. Par conséquent tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc comme somme d'éléments de F et G.

PROPOSITION : (caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Nous avons équivalence entre :

(i) $E = F \oplus G$;

(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exercice : Déterminer si F et G sont supplémentaires : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$

et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

3 Applications linéaires

Estimation : 2h
Durée : 1h15

- Dans toute cette section, on note E et F deux espaces vectoriels ;
- On notera dorénavant pour les deux lois de composition externe : $\lambda\overrightarrow{u}$, au lieu de $\lambda.\overrightarrow{u}$.

3.1 définition et premières propriétés

DÉFINITION :

On dit qu'une application $f : E \to F$ est linéaire lorsque pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de E et scalaires λ, μ, $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$.

REMARQUE : Si $f : E \to F$ est linéaire, nous avons $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.

PROPOSITION : (caractérisation des applications linéaires)

Soit $f : E \to F$ une application. Nous avons équivalence entre :

(i) f est linéaire ;

(ii) pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, , $f(\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + \lambda f(\overrightarrow{v})$.

Exercice : On considère $E = \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$. Montrer que f est une application linéaire.

PROPOSITION : (propriétés des applications linéaires)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F ;
2. Si G est un sous-espace vectoriel de f, alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3.2 noyau et image d'une application linéaire

DÉFINITION :

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle :

1. noyau de f, et on note $\text{Ker}(f)$, l'ensemble : $\text{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\overrightarrow{0}_F\}\right) = \{\overrightarrow{x} \in E / f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}_F\}$;
2. image de f, et on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble : $\text{Im}(f) = f(E)$.

PROPOSITION :

1. $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F ;
2. (a) f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$;
   (b) f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Exercice : On considère $E = \mathbb{R}^2$ et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
2. f est-elle surjective ? injective ?

3.3 structure d'espace vectoriel

notation : On note : $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. On munit $\mathcal{L}(E, F)$ des deux opérations suivantes :

- la loi de composition interne « + »définie par : $(f + g)(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})$;
- Une loi de compostion externe définie par : $(\lambda f)(\overrightarrow{x}) = \lambda.f(\overrightarrow{x})$.

PROPOSITION :

$\mathcal{L}(E,F)$ muni des opérations précédentes est un espace vectoriel.

REMARQUE : le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est donc ici l'application nulle, c'est à dire définie par $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$.

Exemple : Pour $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$,

1. $f+g$ est définie par $(f+g)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+2z \\ 0 \end{pmatrix}$;
2. $3f$ est définie par $(3f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x+3y+3z \\ 3x-3y+3z \end{pmatrix}$.

4 Endomorphismes et automorphismes

Estimation : 2h
Durée : 3h

Dans cette section, on note E un espace vectoriel et « + »sa loi de composition interne.

4.1 généralités

DÉFINITION :

1. On appelle endomorphisme toute application linéaire $f : E \to E$. On note $\mathcal{L}(E)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$) l'ensemble des endomorpismes ;
2. Si de plus f est bijective, on dit que f est un automorphisme. On note $\mathrm{gl}(E)$ l'ensemble des automorphismes.

REMARQUE : D'après la section précédente, $\mathcal{L}(E)$ possède une structure d'espace vectoriel.

PROPOSITION : (opérations algébriques)

1. $\mathcal{L}(E)$ muni de la loi de composition interne « $\circ$ »est associative, non commutative, d'élément neutre l'application identité id_E ;
2. $(\mathrm{gl}(E), \circ)$ est un groupe. Plus précisément :
   (a) Si f est automorphisme, alors f^{-1} est un automorphisme . L'application réciproque de f^{-1} est f : $(f^{-1})^{-1} = f$;
   (b) Si f et g sont deux automorphismes, alors $f \circ g$ est un automorphisme. L'application réciproque est alors $g^{-1} \circ f^{-1}$: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice : On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{pmatrix}$.

1. f est-elle un automorphisme ?
2. Calculer $f \circ f$.

4.2 projecteurs

DÉFINITION :

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Pour $\overrightarrow{x} \in E$, nous avons donc une unique décomposition :
$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \text{ avec } \begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases} ;$$
- L'application p de E dans E définie par $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u}$ est appelée **projection** sur F parallèlement à G ;
- On dit également que p est un **projecteur**.

PROPOSITION :

1. Si p est un projecteur sur F parallèlement à G, alors p est linéaire et $p \circ p = p$;
2. Réciproquement, si p est linéaire **et** $p \circ p = p$, alors p est une projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ et parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.

Exercice : On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ \frac{y-z}{2} \\ \frac{z-y}{2} \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

4.3 symétries

DÉFINITION :

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Pour $\overrightarrow{x} \in E$, nous avons donc une unique décomposition :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \text{ avec} \begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases} ;$$

- L'application s de E dans E définie par $s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est appelée **symétrie** par rapport à F et parallèllement à G.

PROPOSITION :

1. Si s est une symétrie par rapport à F et parallèlement à G, alors s est linéaire et $s \circ s = id$;
2. Réciproquement, si s est linéaire **et** $s \circ s = id$, alors s est une symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - id)$ et parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + id)$.

Exercice : On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y-z \\ -2x-y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est une symétrie.
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Espaces vectoriels

Exercice 1 : Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \right\}$, $E = \mathbb{R}^2$; (b) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x = -1 \right\}$, $E = \mathbb{R}^2$;

(c) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / 3x - y + t = 0 \right\}$, $E = \mathbb{R}^4$; (d) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right. \right\}$, $E = \mathbb{R}^4$;

(e) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $E = \mathbb{R}^3$; (f) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \right\}$, $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Montrer que les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de E :

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (b) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} ; \ a \in \mathbb{C} \right\}$, $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

(d) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, $F = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AX = XA\}$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 : On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \ \mathbb{R})$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

(a) $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = 0\}$; (b) $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = 5\}$;

(c) $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) \leq 0\}$; (d) $F = \{f \in E \text{ tel que } f(x + 2\pi) = f(x)\}$.

Exercice 4 : Montrer que les ensembles suivants sont engendrés par des vecteurs que l'on précisera :

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - y = 0 \right\}$; (b) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \right\}$;

(c) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ -b & -a \end{pmatrix} ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; (d) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a + b & c \\ c & b & a + c \end{pmatrix} ; \ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

Exercice 5 :

1. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$.

2. Pour $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le vecteur : $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&0\end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs : $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$?

Exercice 6 : Soient $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3/x-y+2z=0\right\}, G=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3/x+y=0\right\}$.

1. Montrer que F,G sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.
2. Déterminer une famille génératrice de $F\cap G$.
3. Soit $H=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $F\oplus H=G\oplus H=\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : Déterminer si les applications définies par les relations ci-dessous sont linéaires.

(a) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2x+y\\x-y\end{pmatrix}$; (b) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y\\xy\end{pmatrix}$; (c) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2x+1\\2y\\x+y\end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Montrer que les applications : $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ et $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ suivantes sont linéaires, puis étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f, g, $f\circ g$ et $g\circ f$:

(a) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2x+y\\y\end{pmatrix}$ et $g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+z\\5x-2y+z\end{pmatrix}$;

(b) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x-y\\x-2y\\x-3y\end{pmatrix}$. et $g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\y+2z\end{pmatrix}$.

Exercice 9 : On pose $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}/x-y+2z=0\right\}$ et vect $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. Montrer que F et G sont supplémentaires puis déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 10 : On pose $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}/x+2y-z=0\right\}$ et vect $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Montrer que F et G sont supplémentaires puis déterminer l'expression de la symétrie sur F parallèlement à G.

Exercice 11 : Identifier les applications suivantes (projecteurs ou symétries), puis déterminer leurs éléments caractéristiques :

(a) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3x+4y+z\\-2x-3y-z\\2x+4y+2z\end{pmatrix}$; (b) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}y+z+t\\x+z+t\\-x+y-t\\x-y-z\end{pmatrix}$;

(c) $f(M)=\begin{pmatrix}-2&3\\-2&3\end{pmatrix}M$, $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; (d) $f(M)=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}M$, $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12 : Soient $p\in\mathcal{L}(E)$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que si p est la projection sur F et parallèlement à G, alors $s=2p-\text{id}_E$ est la symétrie sur F parallèlement à G.

---

21. Limites et comparaisons de fonctions

Table des matières

1 Fonctions équivalentes 2
1.1 généralités 2
1.2 équivalents usuels 3
1.3 opérations usuelles 4
1.4 équivalents et limites 4

2 Relations de comparaison 5
2.1 domination et prépondérance 5
2.2 prépondérance et équivalents 6
2.3 opérations usuelles 6
2.4 comparaison des fonctions de référence 7

Comparaison des fonctions réelles

$\rightsquigarrow$ 3h30

Notations :

- Toutes les fonctions considérées ci-dessous sont définies sur un ensemble D ;
- On note $a \in \overline{\mathbb{R}}$ appartenant soit au bord d'un intervalle I inclus dans D, soit à l'ensemble D.

1 Fonctions équivalentes

Estimation : 2h
Durée : 2h

1.1 généralités

DÉFINITION :

> On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, et on note $f(x) \sim_a g(x)$, lorsqu'il existe une fonction φ telle que : $f(x) = \varphi(x)g(x)$ sur un voisinage de a avec $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1$.

Exemples :

(1) $x^2 - x \sim_{+\infty} x^2$;

(2) $x^2 - x \sim_0 -x$.

REMARQUES :

(1) Si $f(x) \sim_a 0$, alors f est nulle sur un voisinage de a ;

(2) Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors f et g sont de même signe sur un voisinage de a.

PROPOSITION : (propriétés de la relation d'équivalence)

1. $f(x) \sim_a f(x)$; (réflexivité)
2. $f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \sim_a f(x)$; (symétrie)
3. Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $g(x) \sim_a h(x)$, alors $f(x) \sim_a h(x)$. (transitivité)

PROPOSITION : (caractérisation pratique)

Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, alors $f \sim_a g$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$;

Exercice : Montrer que $x + \sin(x) \sim_{+\infty} x$.

1.2 équivalents usuels

PROPOSITION :

Soit u une fonction réelle telle que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$. Alors :

- $e^{u(x)} - 1 \sim_a u(x)$; • $\ln(1+u(x)) \sim_a u(x)$; • $(1+u(x))^\alpha - 1 \sim_a \alpha u(x)$;
- $\sin(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\tan(u(x)) \sim_a u(x)$; • $1 - \cos(u(x)) \sim_a \frac{u^2(x)}{2}$;
- $\mathrm{sh}(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\mathrm{th}(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\mathrm{ch}(u(x)) - 1 \sim_a \frac{u^2(x)}{2}$;
- $\arcsin(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\arctan(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\mathrm{argsh}(u(x)) \sim_a u(x)$; • $\mathrm{argth}(u(x)) \sim_a u(x)$.

Exercice : Déterminer un équivalent simple au point proposé des fonctions suivantes :

(a) $\sqrt{1+x} - 1$, $a = 0$; (b) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = +\infty$; (c) $\sin(\ln(1+x))$, $a = 0$;

(d) $\ln(x)$, $a = 1$; (e) $e^{x-2} - 1$, $a = 2$.

Tous ces équivalents usuels ne s'appliquent **UNIQUEMENT** lorsque $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$.

1.3 opérations usuelles

PROPOSITION :

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $f \sim_a g$, alors $\lambda f \sim_a \lambda g$;
- **(produit) :** Si $f \sim_a h_1$ et $g \sim_a h_2$, alors $fg \sim_a h_1 h_2$;
- **(quotient) :** Pour g non nulle au voisinage de a, si $f \sim_a h_1$ et $g \sim_a h_2$ alors $\frac{f}{g} \sim_a \frac{h_1}{h_2}$;
- **(puissance) :** Pour $g > 0$ au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f \sim_a g$, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

(1) Pour le dernier point ci-dessus, α doit être **CONSTANT** : par exemple, $e^x \sim_0 1$ mais $(e^x)^{1/x} \nsim_0 \underbrace{1^{1/x}}_{=1}$ puisque $(e^x)^{1/x} = e$;

(2) De même, on ne peut ni sommer ni soustraire. Par exemple $x+1 \sim_{+\infty} x$ mais $1 = (x+1) - x \nsim_{+\infty} \underbrace{x - x}_{=0}$;

(3) Enfin, nous ne pouvons composer les équivalents par une fonction. Par exmple $x + 1 \sim_{+\infty} x$, mais $e^{x+1} = ee^x \nsim_{+\infty} e^x$ (le quotient tend vers $e \neq 1$).

Exercice : Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $a = 0$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)}$, $a = 0$; (c) $x(e^{1/x} - 1)$, $a = +\infty$;

(d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $a = +\infty$; (e) $e^x - e$, $a = 1$.

1.4 équivalents et limites

PROPOSITION :

1. Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$;
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim_a l$.

le 2) de la proposition précédente est **FAUX** lorsque $l = 0$. En effet, $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = 0$, mais $\sin(x) \nsim_0 0$ puisque la fonction sinus n'est pas nulle sur un voisinage de 0.

Exercice : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction arctan.

Exercice : Déterminer la limite des fonctions suivantes au point proposé :

$$\text{(a) } x\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right),\ a=+\infty\,;\ \text{(b) } (1+x)^{1/x},\ a=0.$$

2 Relations de comparaison

Estimation : 2h
Durée : 1h30

2.1 domination et prépondérance

DÉFINITION :

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle. On dit que f est :

1. dominée par g au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction φ telle que : $f(x) = \varphi(x)g(x)$ sur un voisinage de a avec φ bornée sur un voisinage de a. On note $f = O_a(g)$;
2. négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction φ telle que : $f(x) = \varphi(x)g(x)$ sur un voisinage de a avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=0$. On note $f = o_a(g)$.

REMARQUES :

(1) Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$;

(2) $f = O_a(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a ;

(3) $f = o_a(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

PROPOSITION : (caractérisations pratique)

Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, alors :

1. $f = O_a(g)$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée sur un voisinage de a ;
2. $f = o_a(g)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exercice : Montrer que : $\dfrac{\sin(x)}{x} = O_0\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

PROPOSITION : (prépondérance, domination et limites)

1. Si $f = o_a(g)$ et g est bornée sur un voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$;
2. Si $f = O_a(g)$ et g est bornée sur un voisinage de a, alors f est bornée sur un voisinage de a ;
3. Si $f = O_a(g)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

2.2 prépondérance et équivalents

PROPOSITION :

Soient f et g deux fonctions réelles. Alors : $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$.

Exercice : Déterminer a, b et c tels que $\ln(1+x^2) = a + bx + cx^2 + o_0(x^2)$.

2.3 opérations usuelles

PROPOSITION :

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(transitivité) :** Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$ (de même pour O) ;
- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f = o_a(g)$, alors $\lambda f = o_a(g)$ (de même pour O) ;
- **(multiplication par une fonction) :** Si $f = o_a(g)$, alors $fh = o_a(gh)$ (de même pour O) ;
- **(produit) :** Si $f = o_a(h_1)$ et $g = o_a(h_2)$, alors $fg = o_a(h_1h_2)$ (de même pour O) ;
- **(puissance) :** Si $g > 0$ à partir d'un certain rang et $f = o_a(g)$, alors $f^\alpha = o_a(g^\alpha)$ (de même pour O) ;
- **(somme) :** Si $\left.\begin{array}{l} f = o_a(h) \\ g = o_a(h) \end{array}\right\}$, alors $f + g = o_a(h)$ (de même pour O).

REMARQUE : Les opérations précédentes peuvent se réécrire sous les formes suivantes :

- « $o_a(o_a(h)) = o_a(h)$ »(transitivité) ;
- « $\lambda o_a(g) = o_a(g)$ »(multiplication par un réel) ;
- « $ho_a(g) = o_a(hg)$ »(multiplication par une fonction) ;
- « $o_a(h_1)o_a(h_2) = o_a(h_1h_2)$ »(produit) ;
- « $o_a(g)^\alpha = o_a(g^\alpha)$ »(puissance α) ;
- « $o_a(h) + o_a(h) = o_a(h)$ »(somme).

1. Pour la somme, les deux fonctions doivent être comparées à une même fonction. Par exemple, $1 = o_{+\infty}(x)$, $2 = o_{+\infty}(x+1)$ mais $\underbrace{2-1}_{=1}$ n'est pas négligeable en $+\infty$ devant $\underbrace{(x+1)-x}_{=1}$;
2. Nous avons : $o_a(f) - o_a(f) = o_a(f)$! !

Exercice : On pose : $f(x) = e^x$ et $g(x) = (1+x)^3$.

1. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : $f(x) = a + bx + o_0(x)$, $g(x) = c + dx + o_0(x)$.
2. En déduire un équivalent simple en 0 de $e^x + (1+x)^3 - 2$.

Exercice : Montrer que $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

2.4 comparaison des fonctions de référence

PROPOSITION :

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors :

1. $(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$;
2. $|\ln x|^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$;
3. $x^\alpha = o_{+\infty}\left(e^{\beta x}\right)$;
4. $e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

explications : Il s'agit d'une réécriture des croissances comparées vues en début d'année.

Comparaisons des fonctions réelles

Exercice 1 : Donner un équivalent simple en 0 des fonctions ci-dessous :

(a) $\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; (b) $\sqrt{1+x^2}-1$; (c) $\ln(1+\sin(x))$;

(d) $\sin(x^2)\ln(1+x)$; (e) $\dfrac{\ln(1+2x)}{\cos(x)-1}$; (f) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x)}$;

(h) $\dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^2\tan^3(x)}$; (i) $\ln(\cos(x))$; (j) $\dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)}$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent des fonctions f suivantes en a, puis calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

(a) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $a=0$; (b) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$, $a=0$; (c) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$, $a=0$;

(d) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $a=1,$; (e) $f(x)=\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$, $a=1$; (f) $f(x)=\dfrac{x^x-1}{x-1}$, $a=1$;

(g) $f(x)=x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$, $a=+\infty$; (h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\ln(\mathrm{th}(x))}$, $a=+\infty$; (i) $f(x)=x^3\arctan(e^{-x})$, $a=+\infty$;

(j) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$, $a=4$; (k) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$, $a=2$; (l) $f(x)=\dfrac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}$, $a=e$;

(m) $f(x)=\dfrac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$, $a=\pi/3$; (n) $f(x)=\dfrac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$, $a=\pi/4$; (o) $f(x)=\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{1-\sqrt{2}\sin(x)}$, $a=\pi/4$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x})^{1/x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln(x)}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\sin(x)}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x$; (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 4 : Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité :

(a) $x, x^2, x\ln(x), x\ln^2(x), \sqrt{x}, \dfrac{x}{\ln(x)}$ en $+\infty$; (b) $x, x^2, x\ln(x), x\ln^2(x), \sqrt{x}, \dfrac{x}{\ln(x)}$ en 0 ;

(c) $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x\ln(x)}, \dfrac{1}{x\ln^2(x)}, \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \dfrac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$; (d) $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x\ln(x)}, \dfrac{1}{x\ln^2(x)}, \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 0.

Exercice 5 :

1. Déterminer a, b, c, d tels que $e^{x^2}=a+bx+o_0(x)$ et $e^x=c+dx+o_0(x)$. En déduire un équivalent simple en 0 de $e^{x^2}-e^x$.
2. De la même façon, déterminer un équivalent simple en 0 de $x-x^3+\sin(x)^2+\tan(x)$.

---

22. Dimension d'un espace vectoriel

Table des matières

1 Manipulations de vecteurs 2

1.1 famille libre, famille liée . . . 2

1.2 compléments sur les familles génératrices . . . 3

1.3 base d'un espace vectoriel . . . 3

1.4 image d'une base par une application linéaire . . . 4

2 Espaces vectoriels de dimension finie 5

2.1 dimension d'un espace vectoriel . . . 5

2.2 espaces vectoriels de dimension finie classiques . . . 5

2.3 familles libres et génératrices en dimension finie . . . 6

2.4 produit d'espaces vectoriels de dimension finie . . . 7

3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie 8

3.1 dimension d'un sous-espace vectoriel . . . 8

3.2 rang d'une famille de vecteurs . . . 8

3.3 sous-espaces supplémentaires en dimension finie . . . 9

4 Applications linéaires en dimension finie 10

4.1 rang d'une application linéaire . . . 10

4.2 endomorphismes en dimension finie . . . 11

4.3 théorème du rang . . . 11

4.4 espaces vectoriels isomorphes . . . 12

4.5 formes linéaires et hyperplans . . . 12

Dimension d'un espace vectoriel

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Manipulations de vecteurs

Estimation : 2h00

Durée :

On note dans cette section E un espace vectoriel.

1.1 famille libre, famille liée

<u>DÉFINITION</u> :

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs ($p \in \mathbb{N}^*$). On dit que :

1. $\mathcal{F}$ est liée lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non nuls simultanément tels que : $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$;
2. $\mathcal{F}$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée, c'est à dire lorsque $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_p = 0 \end{cases}$.

Exemples :

(1) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre ;

(2) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$ est liée.

Exercice : Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

$$\text{(a) } \mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) ; \quad \text{(b) } \mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right).$$

REMARQUE : Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

PROPOSITION : (propriétés des familles libres)

1. Toute sous-famille d'une famille libre est libre ;
2. Deux vecteurs non nuls forment une famille libre si et seulement s'ils sont non colinéaires.

PROPOSITION : (propriétés des familles liées)

1. Toute famille contenant une sous-famille liée est liée ;
2. Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs. Alors $\mathcal{F}$ est liée si et seulement s'il existe $k \in [\![1; p]\!]$ tel que $\overrightarrow{u_k}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{k-1}}, \overrightarrow{u_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n}$.

Exercice : Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

$$\text{(a)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad \text{(b)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1.2 compléments sur les familles génératrices

PROPOSITION : (propriétés des familles génératrices)

1. Toute famille contenant une sous-famille génératrice est une famille génératrice ;
2. Si $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est liée et $\overrightarrow{u_k}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{k-1}}, \overrightarrow{u_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n}$, alors $\text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}) = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{k-1}}, \overrightarrow{u_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n})$.

1.3 base d'un espace vectoriel

DÉFINITION :

On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, $(p \in \mathbb{N}^*)$, est une base de E lorsque $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

Exemples :

(1) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$;

(2) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

PROPOSITION : (caractérisation des bases)

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs. Nous avons équivalence entre :

(i) $\mathcal{B}$ est une base de E ;

(ii) Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. Dans ce cas, nous avons : $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 \overrightarrow{u_i}$ pour un unique p-uplet : $(\lambda_1; \dots;\ \lambda_p)$ appelé composantes de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$.

1.4 image d'une base par une application linéaire

On considère dans cette sous-section E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

DÉFINITION :

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$. On appelle image de f par $\mathcal{B}$, et on note : $f(\mathcal{B})$, la famille de vecteurs de F telle que $f(\mathcal{B}) = (f(\overrightarrow{u_1}), \dots, f(\overrightarrow{u_p}))$

PROPOSITION :

1. Si $E' = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, alors : $f(E') = \text{vect}(f(\overrightarrow{u_1}), \dots, f(\overrightarrow{u_p}))$;
2. Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une base de E, alors :
   (a) f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre ;
   (b) f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice ;
   (c) f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Estimation : 2h
Durée :

2.1 dimension d'un espace vectoriel

THÉORÈME : (Admis)

Soit E un espace vectoriel tel que $E = \text{vect}((\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. Alors E possède au moins une base et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

DÉFINITION :

1. On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie lorsque il existe une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ telle que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ;
2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle dimension de E, et on note $\dim(E)$ le nombre d'élements d'une base de E ;
3. Par convention, on dit que l'espace vectoriel nul est de dimension nulle : $\dim(\{\overrightarrow{0}\}) = 0$.

Exemples :
(1) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$;
(2) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$;
(3) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

2.2 espaces vectoriels de dimension finie classiques

(a) l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

PROPOSITION :

$\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

DÉFINITION :

On apelle base canonique de $\mathbb{K}^n$ la base : $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right)$.

Exemple : La dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4. Sa base canonique est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

(b) l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION :

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à np.

DÉFINITION :

On apelle base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ la base consitutué des éléments E_{ij} dont le coefficient situé à l'intersection de la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est égal à 1 et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

Exemple : La dimension de $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ est 6. Sa base canonique est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$
.

2.3 familles libres et génératrices en dimension finie

PROPOSITION :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille d'éléments de E. Alors :

1. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $p \leq n$. Si de plus $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E ;
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $p \geq n$. Si de plus $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exercice : Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

THÉORÈME : (Théorème de la base incomplète)

Soient L une famille libre et G une famille génératrice (finie) d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors :

1. il est possible de compléter L avec des vecteurs de G de façon à former une base de E ;
2. il est possible d'extraire de G des vecteurs de façon à former une base de E.

Exercice :

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et en extraire une base.

2.4 produit d'espaces vectoriels de dimension finie

DÉFINITION :

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $E \times F$ l'ensemble des éléments de la forme : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in E \\ \overrightarrow{v} \in F \end{cases}$ On munit $E \times F$ d'une structure d'espace vectoriel en posant :

- $(u_1;\ v_1) + (u_2;\ v_2) = (u_1 + v_1;\ u_2 + v_2)$;
- pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(u_1;\ v_1) = (\lambda u_1;\ \lambda u_2)$.

PROPOSITION :

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un espace vectoriel de simension p. Alors $E \times F$ est un espace vectoriel de dimension $n + p$. Plus précisément, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de F, alors : $\mathcal{B} = ((e_1;\ 0), (e_2;\ 0), \ldots, (e_n;\ 0), (0;\ f_1), (0;\ f_2), \ldots, (0;\ f_p))$ est une base de $E \times F$.

3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Estimation : 2h
Durée :

On considère dans cette section E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

3.1 dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION :

Si F est un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
2. Si de plus, $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$;
3. Si F est une droite vectorielle, alors $\dim(F) = 1$.

Exercice : Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\}$.

3.2 rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION :

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs. On appelle rang de $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$: $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}))$.

On ne calcule pas le rang de d'une famille $\mathcal{F}$ en comptant le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$!

PROPOSITION :

Si $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille de vecteurs, alors :

1. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ;
2. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

Exercice : Déterminer le rang des familles suivantes :

$$\text{(a) } \mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad \text{(b) } \mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3.3 sous-espaces supplémentaires en dimension finie

(a) relation de Grassman :

PROPOSITION :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

REMARQUE : En particulier, si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice : Soient les deux sous-epaces vectoriels : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$

et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$.

(b) caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie :

PROPOSITION :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

(i) F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E ;

(ii) $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exercice : Les sous-espaces ci-dessous sont-ils supplémentaires ?

$$\text{(a) } F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\}, \ G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right);$$

$$\text{(b) } F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\}, \ G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) existence de supplémentaires en dimension finie :

PROPOSITION :

Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Exercice : Déterminer un supplémentaire de $\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4 Applications linéaires en dimension finie

Estimation : 2h
Durée :

4.1 rang d'une application linéaire

DÉFINITION :

Soient E et F deux espaces vectoriels avec F de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle rang de f, et on note $\text{rg}(f)$ la dimension de l'image de f : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

PROPOSITION :

1. $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité si et seulement si f est surjective ;
2. Si E est de dimension finie, alors :
   (a) $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seuleement si f est injective ;
   (b) f est bijective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Exercice : On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

4.2 endomorphismes en dimension finie

PROPOSITION :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Nous avons équivalence entre :

(i) f est injective ;
(ii) f est surjective ;
(iii) f est bijective.

Exercice : Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ est bijectif.

4.3 théorème du rang

THÉORÈME :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\dim((\ker)(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire surjective. Déterminer la

dimension du noyau.

4.4 espaces vectoriels isomorphes

DÉFINITION :

Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit que E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme $f : E \to F$.

PROPOSITION : (construction d'applications linéaires en dimension finie)

Si E et F sont de dimensions finies respectives p et n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, f_p)$ est une famille de F, alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ définie par : $f(e_i) = v_i$ pour tout $i \in [\![1;\ p]\!]$.

Exercice :

1. Déterminer l'unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
2. Écrire l'expression complexe de f puis interpréter géométriquement f.

THÉORÈME : (classification des espaces vectoriels de dimension finie)

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$;
2. En particuler, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exemples :
(1) $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.
(2) $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes.

4.5 formes linéaires et hyperplans

DÉFINITION :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$.
2. Si E est de dimension finie n, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exercice :

1. Montrer que l'application f définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x+y+z$ est une forme linéaire.
2. Montrer que le noyau de f est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

PROPOSITION :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Si f est une forme linéaire non nulle sur E, alors $\ker(f)$ est un hyperplan de E ;
2. Réciproquement, si H est un hyperplan de E, alors ils existe une application linéaire f telle $H = \ker(f)$. Si de plus f et g sont deux formes linéaires non nulles telles que $H = \ker(f) = \ker(g)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda g$.

Exercice : Dans $\mathbb{R}^4$, on pose : $H = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que H est le noyau d'une forme linéaire que l'on précisera.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 1 : Déterminer une base puis calculer la dimension des sous-espaces vectoriels de E suivants :

(a) $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $E = \mathbb{R}^3$; (b) $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ / \ x + y - z + t = 0\right\}$, $E = \mathbb{R}^4$;

(c) $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}\right\}$, $E = \mathbb{R}^4$;

(d) $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, (a;\ b;\ c) \in \mathbb{C}^3\}\right\}$, $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

(e) $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 3 : On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$: $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer une base et calculer la dimension de : F, G, $F + G$, ainsi que $F \cap G$.

Exercice 4 : Après avoir vérifié la liberté des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ci-dessous, les compléter en une base de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$; (b) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 5 : Montrer que l'ensemble des solutions du système :

$$(\mathrm{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et calculer sa dimension.

Exercice 6 :

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $Com(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ MA = AM\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
2. On considère dans cette question $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer une base et la dimension de $Com(A)$.
   (b) Montrer que si $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que $X^2 = A$, alors $X \in Com(A)$. En déduire les solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation : $X^2 = A$.

Exercice 7 : Déterminer si les espaces-vectoriels suivants sont supplémentaires ou ne le sont pas :

(a) $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$;

(b) $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - 3y + z = 0\right\}$;

(c) $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, x - y + 3z - t = 0\right\}$.

Exercice 8 : Pour chacune des applications linéaires suivantes, calculez la dimension de leur noyau, leur rang et déterminez si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$$\text{(a) } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 2x + 3y + 2z \end{pmatrix} ; \text{ (b) } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \\ x - y \end{pmatrix} ;$$

$$\text{(c) } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x + 2y - z \\ 5x - y + 2z \end{pmatrix} ; \text{ (d) } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 2x + 4y + 2z \\ -x - 2y - z \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 :

1. Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
2. Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

Exercice 10 : Montrer que $H = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est un hyperplan et déterminer une forme linéaire f telle que $H = \ker(f)$.

---

23. Développements limités

Table des matières

1 Généralités **2**

1.1 définitions . . . 2

1.2 propriétés . . . 4

1.3 développements limités et dérivabilités . . . 5

2 Développements limités usuels : **5**

2.1 $DL_n(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ . . . 5

2.2 intégration d'un développement limité . . . 6

2.3 développements limités associées à la fonction exponentielle . . . 7

2.4 développements limités et puissance d'une fonction . . . 9

3 Opérations usuelles sur les développements limités **11**

3.1 combinaison linéaire de développements limités . . . 11

3.2 développement limité d'un produit . . . 11

3.3 développement limité d'une composition . . . 12

3.4 développement limité d'un quotient . . . 12

4 Applications **12**

4.1 limites et équivalents . . . 12

4.2 développements limités, tangentes et asymptotes . . . 13

4.3 développements limités et courbes paramétrées . . . 13

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Année 2010-2011
Mathématiques TSI-1

Développements limités

$\rightsquigarrow$ 5h15

But : Approximation locale d'une fonction par une fonction polynômiale.

Notations :

- Toutes les fonctions considérées ci-dessous vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sont définies sur un ensemble D ;
- Dans la suite, on note x_0 un réel appartenant, soit au bord d'un intervalle I inclus dans D, soit à l'ensemble D.

1 Généralités

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

1.1 définitions

1. développement limité en 0 :

DÉFINITION :

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (on écrit $DL_n(0)$) lorsqu'il existe des réels $a_0, ..., a_n$ tels que :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = o_0(x^n), \text{ c'est à dire :}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0(x^n) \\ &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o_0(x^n). \end{aligned}$$

Exemples :

(1) $f(x) = 6x^5 + 4x^3 + x^2$:

- $DL_1(0)$: $f(x) = 0 + o_0(x)$;

- $DL_2(0)$: $f(x) = x^2 + \underbrace{o_0(x^2)}_{=4x^3+6x^5}$;
- $DL_3(0)$: $f(x) = x^2 + 4x^3 + \underbrace{o_0(x^3)}_{=6x^5}$;
- $DL_5(0)$: $f(x) = x^2 + 4x^3 + 6x^5 + \underbrace{o_0(x^5)}_{=0}$;

(2) $f(x) = \ln(1+x)$. $DL_1(0)$: $f(x) = x + o_0(x)$ (en effet $f(x) \sim_0 x$).

Une fonction quelconque n'admet pas forcément de développement limité en 0, c'est par exemple le cas de $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. développement limité en x_0 :

DÉFINITION :

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 (on écrit $DL_n(x_0)$) lorsqu'il existe des réels $a_0, ..., a_n$ tels que :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = o_{x_0}((x-x_0)^n), \text{ c'est à dire :}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n) \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

REMARQUE : $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ est appelé partie principale du développement limité.

Exemples :

(1) $DL_1(1)$ de $f(x) = x^2 + x + 1$: On pose $x = 1 + u$ (x est au voisinage de 1 si et seulement si u est au voisinage de 0.) Alors :

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + x + x^2}_{f(x)} &= (1+u)^2 + (1+u) + 1 \\ &= \underbrace{u^2 + 3u + 3}_{g(u)} \end{aligned}$$

Le $DL_1(0)$ de g est : $3+3u+o_0(u)$. Ainsi, $f(x) = 3+3(x-1)+o_1((x-1))$. On obtient donc le $DL_1(1)$ de f.

1.2 propriétés

PROPOSITION :

1. Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors les coefficients $a_0, a_1,..., a_n$ sont uniques ;
2. Si f admet pour $DL_n(x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n),$$

alors pour $m \leq n$, f admet un $DL_m(x_0)$. De plus, le $DL_m(x_0)$ est obtenu en tronquant la partie principale du $DL_n(x_0)$ au degré m.

PROPOSITION :

1. Si f est paire et admet un $DL_n(0)$, alors le développement limité ne fait intervenir que des puissances paires.
2. Si f est impaire et admet un $DL_n(0)$, alors le développement limité ne fait intervenir que des puissances impaires.

explications :

Puisque : $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + o_0(x^n)$, nous avons $f(-x) = a_0 - a_1x + ... + (-1)^nx^n + o_0(x^n)$. Ainsi, par unicité des coefficients du développement limité :

1. $f(x) = f(-x)$ entraîne : $a_1 = -a_1 \Leftrightarrow a_1 = 0$. De même pour tous les coefficients impairs.
2. $f(x) = -f(-x)$ entraîne : $a_0 = -a_0$. De même pour tous les coefficients pairs.

Si le $DL_n(0)$ de f ne fait intervenir que des puissances paires (ou impaires), f n'est pas forcément paire (ou impaire) ! ! On ne connaît pas à priori la parité du terme d'erreur. Par exemple : $f(x) = 1 + x^2 + x^3\cos(x)$ a pour $DL_2(0)$: $f(x) = 1 + x^2 + o_0(x^2)$. Pourtant, f n'est pas paire.

1.3 développements limités et dérivabilités

PROPOSITION :

1. Si f est dérivable en x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 et : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$;
2. Réciproquement, si $x_0 \in D$ et $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, alors : • f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$
   • La tangente en x_0 a pour équation : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

2 Développements limités usuels :

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

2.1 $DL_n(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-x}$

PROPOSITION :

pour tout entier naturel n,

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o_0(x^n)}.$$

démonstration On l'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} 1 + x + ... + x^n &= \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} + o_0(x^n). \end{aligned}$$

On en déduit : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o_0(x^n)$

conséquences : On en déduit les développements limités suivants :

➩ on remplace x par $-x$: $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o_0(x^n)}$

➩ on remplace x par x^2 : $\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n} + o_0(x^{2n+1})}$

(pas de termes de degré x^{2n+1} par parité)

➩ on remplace x par $-x^2$: $\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n+1})}$

(pas de termes de degré x^{2n+1} par parité)

2.2 intégration d'un développement limité

PROPOSITION :

Si $x_0 \in D$ et $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$, alors :

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + ... + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + o_{x_0}((x-x_0)^{n+1}).$$

Conséquences :

$\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}$, donc :

➯ $$\boxed{\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o_0(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k}\frac{x^{k+1}}{k+1} + o_0(x^n) \end{aligned}}$$

$\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, donc :

➯ $$\boxed{\begin{aligned} \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2n+2}) \end{aligned}}$$

(pas de termes de degré x^{2n+2} par imparité)

2.3 développements limités associées à la fonction exponentielle

PROPOSITION :

pour tout entier naturel n,

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} .... + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n) \end{aligned}}.$$

conséquences : On en déduit :

➯ $$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}((1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ....) + (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...))}_{\text{non rigoureux sans le o donc à ne jamais écrire}} \\ &= \boxed{1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})} \end{aligned}$$

(pas de termes de degré x^{2n+1} par parité)

➯ $$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}((1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ....) - (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...))}_{\text{non rigoureux sans le o donc à ne jamais écrire}} \\ &= \boxed{x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2})} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})} \end{aligned}$$

(pas de termes de degré x^{2n+2} par imparité)

➩ $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}((1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....)+(1-ix-\frac{x^2}{2!}+i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....))}_{\text{non rigoureux sans le o donc à ne jamais écrire}}$$

$$= \boxed{1-\frac{x^2}{2}+.....+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o_0(x^{2n+1})}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o_0(x^{2n+1})}$$

(pas de termes de degré x^{2n+1} par parité)

➩ $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2i}((1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....)-(1-ix-\frac{x^2}{2!}+i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....))}_{\text{non rigoureux sans le o donc à ne jamais écrire}}$$

$$= \boxed{x-\frac{x^3}{3!}+.....+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o_0(x^{2n+2})}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o_0(x^{2n+2})}$$

(pas de termes de degré x^{2n+2} par imparité)

2.4 développements limités et puissance d'une fonction

PROPOSITION :

Pour tout réel α et pour tout entier naturel n,

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+....+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o_0(x^n)$$

explications : Il s'agit d'une **généralisation** de la formule du binôme :

$$(1+x)^p = 1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+....$$

Conséquences : On peut en déduire les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

➩ $\alpha = \frac{1}{2}$ | $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+....+o_0(x^n)$

➩ on remplace ci-dessus x par $-x$ | $\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+...+o_0(x^n)$

➩ $\alpha = -\frac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+....+o_0(x^n) \quad (*)$

➩ on remplace ci-dessus x par $-x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+....+o_0(x^n)$

➩ on remplace ci-dessus x par x^2 | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+....+o_0(x^{2n+1})$

(pas de termes de degré x^{2n+1} par parité)

➩ on remplace dans $(*)$ x par x^2 | $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+....+o_0(x^{2n+1})$

(pas de termes de degré x^{2n+1} par parité)

➩ $\arcsin(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ | $\arcsin(x) = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+...+o_0(x^{2n+2})$

(pas de termes de degré x^{2n+2} par imparité)

➩ $\mathrm{argsh}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ | $\mathrm{argsh}(x) = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+...++o_0(x^{2n+2})$

(pas de termes de degré x^{2n+2} par imparité)

3 Opérations usuelles sur les développements limités

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

3.1 combinaison linéaire de développements limités

PROPOSITION :

Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}, f + \lambda g$ admet un $DL_n(x_0)$. Plus précisément, si

$$f(x) = P_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n),$$

avec P_n, Q_n polynômes de degré n, alors :

$$f(x) + \lambda g(x) = P_n(x) + \lambda Q_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Exercice : Déterminer le $DL_3(0)$ de $2\sin(x) + 3\cos(x)$ (réponse : $3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$.)

3.2 développement limité d'un produit

PROPOSITION :

Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, alors fg admet un $DL_n(x_0)$. Plus précisément, si

$$f(x) = P_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n),$$

avec P_n, Q_n polynômes de degré n, alors :

$$f(x)g(x) = R_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n),$$

où R_n est la partie tronquée d'ordre n du polynôme P_nQ_n.

Exercice : Déterminer le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\cos(x)}{1-x}$ (réponse : $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$)

3.3 développement limité d'une composition

PROPOSITION :

Si f admet un $DL_n(x_0)$: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ et g admet un $DL_p(a_0)$, alors $g \circ f$ admet un $DL_{np}(x_0)$.

Exercice : Déterminer les développements limités en 0 suivants :

(a) $DL_2(0)$ de $e^{\sin(x)}$; (b) $DL_4(0)$ de $\cos(\sin(x))$.

$(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2))$ $(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o_0(x^4))$

3.4 développement limité d'un quotient

PROPOSITION :

Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, et $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(x_0)$.

Exercice : Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_2(0)$ de $\dfrac{1}{2 + e^{-x}}$; (b)$DL_4(0)$ de $\tan(x)$.

$(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{1}{54}x^2 + o_0(x^2))$ $(x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^4))$

4 Applications

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

4.1 limites et équivalents

PROPOSITION :

Si $f(x) = a_p(x - x_0)^P + a_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$, $(p \leq n)$, avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p.$$

Exercice : Déterminer les équivalents puis les limites des fonctions suivantes aux points proposés :

(a) $f(x)=x-\sin(x)$, $a=0$; (b) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)-x}{\tan(x)-x}$, $a=0$.

$(f(x)\sim_0 \frac{1}{6}x^3)$ $(f(x)\sim_0 \frac{1}{2})$

4.2 développements limités, tangentes et asymptotes

(a) développements limités et tangentes :

PROPOSITION :

Si f admet un $DL_(x_0)$ ($x_0 \in D$), de la forme :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_p((x-x_0)^p)+o_{x_0}((x-x_0)^p),$$

avec $a_p \neq 0$, alors :

- la courbe représentative de f admet en x_0 une tangente d'équation : $y=a_0+a_1(x-x_0)$;
- la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de x_0 est donnée par le signe de $a_p(x-x_0)^p$.

Exercice : Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction arcsin, puis étudier la position de cette dernière par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.

(b) développements limités et asymptotes : On étudie un exemple :

Exercice : Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ dont on donnera une équation cartésienne. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

(Réponse : $f(x)=x+2+\frac{3}{x}+o_\infty\left(\frac{1}{x}\right)$)

4.3 développements limités et courbes paramétrées

On étudie un exemple :

Exercice : Donner l'allure du support de la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t)=2t+t^2 \\ y(t)=2t-\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$ au voisinage du point A de paramètre $t=-1$.

méthode :

- On vérifie que ce point est bien un point stationnaire de la courbe paramétrée.
- On fait un développement limité de x et y. On obtient : $x(t)=-1+(t+1)^2$ et $y(t)=-3-3(t+1)^2-4(t+1)^3+o_{-1}((t+1)^3)$.
- On interprète géométriquement les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \begin{pmatrix} x(t)-x(-1) \\ y(t)-y(-1)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t+1)^2 \\ -3(t+1)^2-4(t+1)^3+o_{-1}((t+1)^3)\end{pmatrix} \\ &= (t+1)^2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}}+(t+1)^3\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}+\begin{pmatrix} o_{-1}((t+1)^3) \\ o_{-1}((t+1)^3)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nous en déduisons les points suivants :

– $\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{\overrightarrow{AM}}{(t+1)^2}=\overrightarrow{u}$. Ainsi $\overrightarrow{u}$ est tangent à la courbe paramétrée en -1.
– les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base du plan. Notant $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées de M dans le nouveau repère : $(A;\ \overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, nous avons : $X(t)\sim_{-1}(t+1)^2$ et $Y(t)\sim_{-1}(t+1)^3$. Nous pouvons en déduire le signe des coordonnées au voisinage de A, donc la position de la courbe paramétrée par rapport au vecteur du nouveau repère.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Développements limités

Exercice 1 : Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 de :

(a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$; (b) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$; (c) $f(x) = e^x - \sqrt{1+x}$;

(d) $f(x) = \ln(1+x) - (1+x)^2$; (e) $f(x) = \sqrt{x+2}$; (f) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$;

(g) $f(x) = \ln(x+5)$; (h) $f(x) = \sin(x+\pi/7)$; (i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

(j) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3$; (k) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$; (l) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$.

Exercice 2 : Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_6(0)$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$; (b) $DL_3(0)$ de $f(x) = (1-x^3)\sqrt{1+x}$;

(c) $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$; (d) $DL_6(0)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(e) $DL_7(0)$ de $f(x) = (1-\cos(x))(1-\mathrm{ch}(x))$; (f) $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$;

(g) $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln(\cos(x))$; (h) $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln(1+\cos(x))$;

(i) $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$; (j) $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{\mathrm{ch}(x)}$;

(k) $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{4+\sin(x)-3\cos(x)}$; (l) $DL_3(0)$ de $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

Exercice 3 : Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_3(2)$ de $f(x) = e^x$; (b) $DL_3(2)$ de $f(x) = \ln(x)$; (c) $DL_3(2)$ de $f(x) = \sqrt{x}$;

(d) $DL_3(2)$ de $f(x) = \dfrac{1}{x}$; (e) $DL_3(2)$ de $f(x) = x^4$; (f) $DL_3(\pi/3)$ de $f(x) = \sin(x)$;

(g) $DL_3(1)$ de $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; (h) $DL_3(1)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; (i) $DL_3(1)$ de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$;

(j) $DL_3(\pi/2)$ de $\ln(\sin(x))$; (k) $DL_3(\pi/2)$ de $f(x) = \mathrm{arcos}(x)$; (l) $DL_3(\pi/3)$ de $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 4 : Déterminer le développement limité en 0 à n'importe quel ordre des fonctions ci-dessous :

$$\text{(a) } f(x) = \frac{\sin(x)}{x}\,; \quad \text{(b) } f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2; \quad \text{(c) } f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt.$$

Exercice 5 : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3\arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x) + 1 - \cos(x)}{\tan(x) - \sin(x)}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)} + \frac{2}{x-1}\right)$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$; (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}\right)$; (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

Exercice 6 : Déterminer un équivalent en a des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x(2 + \cos(x)) - 3\sin(x)$ en $a = 0$; (b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ en $a = 0$;

(c) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $a = +\infty$; (d) $f(x) = x^x - (\sin(x))^x$ en $a = 0$.

Exercice 7 : Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :

$$\text{(a)} \quad u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}; \qquad \text{(b)} \quad u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$$

Exercice 8 : Donner la position du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et en 1.

Exercice 9 : Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$; (b) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$; (c) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$;

(d) $f(x) = (x + \sqrt{x})e^{\sqrt{x^2+x}}$; (e) $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$; (f) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arctan(x)$.

Exercice 10 : Montrer que la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= (t+1)e^t \\ y(t) &= t^2e^t \end{cases}$ admet un unique point singulier et donner son allure au voisinage de ce point.

Exercice 11 : Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x - 1}$$

admet un développement limité en 0.

Exercice 12 : Déterminer un équivalent en 0 de $f(x) = \mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x))$.

---

24. Matrices de vecteurs et d’applications linéaires

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 matrice d'une famille de vecteurs dans une base 2
1.2 matrice d'une application linéaire 3
1.3 application linéaire canoniquement associée à une matrice 3

2 Opérations matricielles et applications linéaires **4**
2.1 somme et multiplication par un scalaire 4
2.2 composition 5
2.3 cas des endomorphismes 5

3 Formules de changement de base **6**
3.1 matrices de passages d'une base à une autre 6
3.2 formules de changement de base pour les vecteurs 7
3.3 formules de changement de base pour les applications linéaires . 7

4 Applications **8**
4.1 rang d'une matrice 8
4.2 déterminant d'un endomorphisme 9
4.3 calcul de puissances de matrices 10

Matrices de vecteurs et d'applications linéaires

$\rightsquigarrow$ 5h30

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

1.1 matrice d'une famille de vecteurs dans une base

DÉFINITION :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. On apelle vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur $x \in E$ le vecteur colonne $X \in \mathbb{K}^n$ dont les coefficients sont les composantes de x dans $\mathbb{K}$: Si $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$, alors $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$;
2. On appelle matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ dans $\mathcal{B}$, et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice dont la j-ème colonne est le vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ de u_j.

Exemple : La matrice dans la base canonique de la famille de vecteurs :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 matrice d'une application linéaire

notations : on note $\bullet E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E
$\bullet F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}'$ une base de F

DÉFINITION :

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice de $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$, avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Exemple : Si $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ est l'application linéaire définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x-2y+3z \end{pmatrix}$. alors la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^3$ et $\mathbb{K}^2$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION :

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et :

- $x \in E$ de vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ notée X ;
- $y = f(x)$ de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$ notée Y ;
- $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Alors : $Y = AX$.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $Mat(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Déterminer $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

1.3 application linéaire canoniquement associée à une matrice

PROPOSITION :

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par : $f(X) = AX$ est linéaire. De plus $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ où
$\bullet \mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$
$\bullet \mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$

DÉFINITION :

On apelle application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par $f(X) = AX$.

Exercice : On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

2 Opérations matricielles et applications linéaires

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

2.1 somme et multiplication par un scalaire

PROPOSITION :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors : $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par : $\varphi(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphime d'espaces vectoriels. En particulier :

- $\underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)}_{\varphi(f+g)} = \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)} + \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)}_{\varphi(g)}$;
- $\underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)}_{\varphi(\lambda f)} = \lambda \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)}$.

Exemple : Si f et g sont deux applications linéaires de matrices respectives dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(2f-g) = 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

2.2 composition

PROPOSITION :

Soient : $\bullet E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et de base $\mathcal{B}$
$\bullet F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie r et de base $\mathcal{B}'$
$\bullet G$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B}''$.

On considère également f et g deux applications linéaires telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exemple : On note $\mathcal{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathcal{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. Soient $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ et $g : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ deux applications linéaires telles que $A = Mat_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = Mat_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

- $Mat_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_3}(g \circ f) = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- $Mat_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_2}(f \circ g) = BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3 cas des endomorphismes

notations : on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

DÉFINITION :

On appelle matrice associé à f dans $\mathcal{B}$, et on note $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Exemples :

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$.

Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, $Mat_{\mathcal{B}}(id) = I_n$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases différentes, alors $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) \neq I_n$. Par exemple, si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, alors $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION :

1. Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}}(g)$;
2. $\varphi : \mathrm{gl}(E) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\varphi(f) = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathrm{gl}(E), \circ)$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication matricielle.

Exercice : On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

3 Formules de changement de base

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

3.1 matrices de passages d'une base à une autre

DÉFINITION :

Soients E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

REMARQUE : nous avons $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id)$.

PROPOSITION :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

1. La famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.
2. Si $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$. En particulier $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Exercice : Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et déterminer $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

3.2 formules de changement de base pour les vecteurs

PROPOSITION :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On considère un vecteur x de E •de vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ noté X
•de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$ noté X'.

Alors : $X = PX'$, où $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Exercice : On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \right)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère un vecteur de vecteur colonne dans la base canonique : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Exprimer x' et y' en fonction de x, y et θ.

3.3 formules de changement de base pour les applications linéaires

notations : On note dans cette sous-section : •E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p
•F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

PROPOSITION :

1. Soient •$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E
•$\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases de F,
et $f : E \to F$ est une application linéaire. Alors :
$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{U}'}(f) = (P_{\mathcal{U},\mathcal{U}'})^{-1} Mat_{\mathcal{B},\mathcal{U}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$
2. En particulier, si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :
$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P, \text{ où } P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Exercice : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

4 Applications

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

4.1 rang d'une matrice

DÉFINITION :

Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle :

(a) noyau de A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, le noyau de son application linéaire canoniquement associée ;

(b) image de A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'image de son application linéaire canoniquement associée ;

(c) rang de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de son application linéaire canoniquement associée ;

REMARQUES :

(1) Nous avons donc $\dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A) = p$;

PROPOSITION :

Le rang de la matrice A est égal au rang des vecteurs colonnes de A.

Exercice : Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$. Autrement dit, le rang des vecteurs lignes de A est égal au rang des vecteurs colonnes de A.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

Exercice : Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

4.2 déterminant d'un endomorphisme

notations : On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 ou 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$.

PROPOSITION :

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det(Mat_{\mathcal{B}'}(f)) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f))$

DÉFINITION :

On appelle déterminant de f, et on note $\det(f)$ le déterminant de la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E.

Exercice : On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ défini par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y-z \\ -2x-y-2z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(f)$.

PROPOSITION : (propriétés du déterminant)

1. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Alors $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$. En particulier, pour tout entier naturel n, $\det(f^n) = (\det f)^n$;
2. $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Exercice : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$f^2 = 0$. Montrer que f n'est pas bijectif.

4.3 calcul de puissances de matrices

PROPOSITION :

Soient A et P deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Avec P inversible. Si

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}P^{-1},$$

alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p^n \end{pmatrix}P^{-1}$.

Exercice : On note $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement

associé à A. On note $P(\lambda) = \det(f - \lambda id)$.

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $P(\lambda) = 0$. On note $\lambda_1 < \lambda_2$ les valeurs précédemment trouvées.
2. Déterminer un vecteur e_1 de $\ker(f - \lambda_1 id)$ et un vecteur e_2 de $\ker(f - \lambda_2 id)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$ et déterminer $D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)$.
4. En déduire qu'une expression simple de A^n est $A^n = \begin{pmatrix} -2+3.2^n & 6-6.2^n \\ -1+2^n & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Matrices de vecteurs et d'applications linéaires

Exercice 1 : Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver la matrice de chacun des endomorphismes T de E dans la base canonique : .

$$(a)\ T(A) = MA, \qquad (b)\ T(A) = AM, \qquad (c)\ T(A) = MA - AM.$$

Exercice 2 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\text{(a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 11 & -2 & 16 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y + 2z \end{pmatrix}$ et $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - 2y \\ x - 3y \end{pmatrix}$. Calculer les matrices de $f,\ g,\ f \circ g,\ g \circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix}$.

1. Donner sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire que f est un isomorphisme et calculer f^{-1}.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déduire de précédemment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est la plus simple possible.

Exercice 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. À-t-on $f \in \mathrm{gl}(E)$?
2. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.
3. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, avec $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On admet que $\mathcal{F}$ est une base.

1. Trouver les matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{F},\mathcal{B}}$.
2. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Trouver les coordonnées de v dans la base $\mathcal{F}$.
3. Soit $v = 2f_1 - 5f_2 + 3f_3$. Trouver les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.
4. Trouver la matrice de l'application linéaire f définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2y+z \\ x-4y \\ 3x \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.
5. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.
6. Déterminer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 8 : Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base et calculer la dimension de $F = \ker(f - id)$ et de $G = \ker(f - 4id)$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de f est diagonale.
3. Déterminer B^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - id)$ et de $\ker(f - 2id)$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de f est diagonale.
3. Déterminer B^n puis A^n.

Exercice 11 : Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace $E = \mathbb{R}^3$ et l'application linéaire f de E dans E telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. Étudier le sous-espace $\ker(f - id_E)$: dimension, base.
3. Étudier le sous-espace $\ker(f^2 + id_E)$: dimension, base.
4. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

---

25. Fonctions dérivables et régularités d'ordres supérieurs

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions dérivables 2
1.1 dérivabilité, dérivabilité à droite et à gauche 2
1.2 extrêma d'une fonction 3
1.3 théorème de Rolle 4
1.4 égalité des accroissements finis 4

2 Fonctions de classe C^1 4
2.1 comparaison avec les fonctions continues et les fonctions dérivables 5
2.2 opérations usuelles 5
2.3 prolongement de classe C^1 d'une fonction 6
2.4 inégalité des accroissements finis 6

3 Régularités d'ordres supérieurs et dérivées successives 6
3.1 classes d'une fonction 7
3.2 opérations usuelles 8
3.3 formule de Leibniz 10

Fonctions dérivables et régularités d'ordres supérieurs

$\rightsquigarrow$ 4h

Notations :
• Toutes les fonctions considérées ci-dessous vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sont définies sur un ensemble D ;
• On note dans la suite x_0 un réel appartenant à l'intérieur d'un intervalle I inclus dans D.

1 Généralités sur les fonctions dérivables

Estimation : 2h
Durée : 1h

• On note dans cette section τ_{x_0} l'application définie sur $D \setminus \{x_0\}$ et telle que : $\tau_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Une telle expression est appelée **taux d'accroissement de f en x_0**.
• On rappelle que f dérivable en x_0 signifie : $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(x) = f'(x_0)$.

1.1 dérivabilité, dérivabilité à droite et à gauche

DÉFINITION :

1. On dit que f est dérivable à droite en $x_0 \in D$ lorsque τ_{x_0} admet une limite à droite en x_0. On note alors : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
2. On dit que f est dérivable à gauche en $x_0 \in D$ lorsque τ_{x_0} admet une limite à gauche en x_0. On note alors : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

PROPOSITION :
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **ET** $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Nous avons dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exercice : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle dérivable en 0 ?

1.2 extrêma d'une fonction

DÉFINITION :

On dit que x_0 est

1. un **minimum local** lorsque l'inégalité : $f(x_0) \leq f(x)$ est vérifiée sur un voisinage de x_0 ;
2. un **maximum local** lorsque l'inégalité : $f(x) \leq f(x_0)$ est vérifiée sur un voisinage de x_0 ;
3. un **minimum global** lorsque l'inégalité : $f(x_0) \leq f(x)$ est vérifiée pour tout $x \in D$;
4. un **maximum global** lorsque l'inégalité : $f(x) \leq f(x_0)$ est vérifiée pour tout $x \in D$.

Exemple : exemple graphique à faire au tableau

REMARQUES :

(1) Un extrêmum global est local, mais un extrêmum local n'est pas forcément global.

(2) Le théorème de Weierstrass assure l'existence d'extrêma globaux pour des fonctions continues sur des intervalles fermés bornés.

PROPOSITION :

Si f est dérivable sur $]a;\ b[$ et admet un extrêmum local c, alors $f'(c) = 0$.

explications : Supposons que c est un extrêmum local. Si $f'(c) \neq 0$, alors $f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + o_c(x-c)$, donc $f(x) - f(c) \sim_c (x-c)f'(c)$, donc du même signe que $(x-c)f'(c)$, expression qui change de signe lorsqu'on traverse c. Par conséquent, $f(x) - f(c)$ ne peut rester localement du même signe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

1. On peut avoir $f'(c) = 0$ sans que c soit un extrêmum local. C'est par exemple le cas de 0 pour la fonction $f(x) = x^3$;
2. Une fonction peut admettre des extrêma locaux en un point où elle n'est pas forcément dérivable. C'est par exemple le cas de 0 pour la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

1.3 théorème de Rolle

THÉORÈME :

Soit f une fonction continue sur $[a;\ b]$, dérivable sur $]a;\ b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;\ b[$ tel que $f'(c) = 0$.

explications : Le théorème de Weierstrass assure l'existence d'un maximum et d'un minimum sur $[a;\ b]$. La condition $f(a) = f(b)$, entraîne qu'il ya au moins l'un des deux extrêma qui est dans l'intervalle $]a;\ b[$ (et alors la dérivée s'annule en ce point), à moins que a et b ne réalisent à la fois le maximum et le minimum. Dans ce cas, f est forcément constante sur $[a;\ b]$, donc $f'(c) = 0$ quel que soit le réel $c \in]a;\ b[$.

Exercice : Pour un entier naturel $n \geq 2$, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois zéros réels.

1.4 égalité des accroissements finis

THÉORÈME :

Soit f une fonction continue sur $[a;\ b]$ et dérivable sur $]a;\ b[$. Alors il existe $c \in]a:\ b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

2 Fonctions de classe C^1

Estimation : 2h
Durée : 1h30

RAPPELS :

- On dit que f est de classe C^1, ou encore continûment dérivable, sur D lorsque f est dérivable sur D et que f' est continue sur D ;
- On note $C^1(D)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur D ;
- On note $\mathcal{D}(D)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D ;
- On note $C^0(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

2.1 comparaison avec les fonctions continues et les fonctions dérivables

PROPOSITION :

Nous avons $\mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{C}^0(D)$. Plus précisément :

1. Si f est dérivable sur D, alors f est continue sur D.
2. Si f est de classe C^1 sur D, alors f est dérivable sur D.

REMARQUE :

Les inclusions précédentes sont **STRICTES**. En effet :

- Il existe des fonctions continues mais non dérivables (par exemple $|x|$ en 0)
- des fonctions dérivables mais non continument dérivables (par exemple $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0).

2.2 opérations usuelles

PROPOSITION :

1. $C^1(D)$ est un sous-espaces vectoriel des fonctions dérivables sur D. Plus précisément, si f et g sont de classe C^1 sur D, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est de classe C^1 sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$.
2. $C^1(D)$ est stable par produit : si f et g sont de classe C^1 sur D, alors fg est de classe C^1 sur D. De plus : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Si f et g sont de classe C^1 sur D et g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^1 sur D. De plus : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
4. Si f et g sont de classes C^1 et telles que : $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur D. De plus : $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.

2.3 prolongement de classe C^1 d'une fonction

PROPOSITION : (limite de la dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, de classe c^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et si f' admet une limite finie en x_0, alors f est de classe C^1 sur I.

L'hypothèse de continuité sur I est indispensable. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle. Cette dernière admet donc une limite en 0, pourtant f n'est pas de classe C^1 en 0 (elle n'est même pas continue en 0).

Exercice : Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.4 inégalité des accroissements finis

PROPOSITION :

Soient f est une fonction de classe C^1 sur $I = [a;\ b]$ et $M = \max\{|f'(x)|, x \in I\}$. Alors :

$$\forall (x;\ y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice : On considère la suite (u_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = 2 - e^{-x}$. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \in I = [1;\ 2]$ et que f admet un unique point fixe ℓ sur I.

1. Montrer que pour tous $(x;\ y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$, avec $0 < K < 1$.
2. En déduire que (u_n) converge vers ℓ et déterminer une valeur de n_0 pour laquelle u_{n_0} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

3 Régularités d'ordres supérieurs et dérivées successives

Estimation : 2h
Durée : 1h30

3.1 classes d'une fonction

DÉFINITION :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit que f est n-fois dérivable sur D lorsqu'il existe des fonctions $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ définies sur D telles que : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et pour tout $k \in [\![1;\ n-1]\!]$, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$. Pour f n-fois dérivable sur D, on appelle $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f sur D.
2. On dit que f est n-fois continûment dérivable (ou de classe $\mathcal{C}^n$) sur D si f est n-fois dérivable sur D et $f^{(n)}$ est continue.
3. On dit que f est indéfiniment dérivable (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable sur D.

Notations : On note $\mathcal{D}^n(D)$ l'ensemble des fonctions n-fois dérivables, $C^n(D)$ l'ensemble des fonctions n-fois continûment dérivables et $C^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur D.

REMARQUES :

(1) On préfèrera les notations f' et f'' plutôt que $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$;

(2) Nous avons les inclusions (strictes) $\mathcal{C}^2(D) \subset \mathcal{D}^2(D) \subset \mathcal{C}^1(D)$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^{n+1}(D) \subset \mathcal{D}^{n+1}(D) \subset \mathcal{C}^n(D)$.

Exemples :

(1) Toutes les fonctions usuelles vues en début d'année sont en fait de classe C^∞ sur leur domaine de dérivabilité.

(2) En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^\alpha$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in I$:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

(3) De même, $f(x) = e^{\alpha x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in I$:

$$f^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

PROPOSITION :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

1. f est $n+1$ fois dérivable sur D si et seulement si f' est n fois dérivable sur D. Dans ce cas $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$;
2. f est de classe C^{n+1} sur D (resp. C^∞) si et seulement si f' est de classe C^n sur D (resp. C^∞).

3.2 opérations usuelles

➪ combinaison linéaire :

PROPOSITION :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

1. $\mathcal{D}^n(D)$ et $\mathcal{C}^n(D)$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(D)$.
2. $\mathcal{C}^\infty(D)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^n(D)$.

➪ produit :

PROPOSITION :

1. Si f et g sont n-fois dérivables sur D, alors fg est n-fois dérivable sur D.
2. Si f et g sont de classe C^n sur D (resp. C^∞), alors fg est de classe C^n sur D (resp. C^∞).

Exercice : Montrer que la fonction définie par $f(x) = xe^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$.

➪ quotient :

PROPOSITION :

1. Si f et g sont n-fois dérivables sur D et g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est n-fois dérivable sur D.
2. Si de plus f et g sont de classe C^n sur D (resp. $\mathcal{C}^\infty$), alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D (resp. $\mathcal{C}^\infty$).

Exemples :

(1) Toute fonction rationnelle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

(2) En particulier, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

➩ composition :

PROPOSITION :

1. Si f et g sont n fois dérivables sur D et telles que : $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est n-fois dérivable sur D ;
2. Si de plus f et g sont de classe C^n (resp. $\mathcal{C}^\infty$), alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D (resp. $\mathcal{C}^\infty$).

Exercice : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$ où P_n est une fonction polynômiale de degré n. Déterminer P_0, P_1 et donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

3.3 formule de Leibniz

PROPOSITION :

Si f et g sont n-fois dérivable sur D, alors fg est n-fois dérivable sur D et pour tout $x \in D$: $(fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Montrer, en utilisant la formule de Leibniz, que pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

⋆

⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

Fonctions dérivables et régularités d'ordres supérieurs

Exercice 1 : Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ est continue et dérivable en 0, mais que f n'est pas de classe C^1 en 0.

Exercice 2 : Donner une condition necessaire et suffisante sur a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x))} - \frac{1}{x}.$$

Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe C^1 sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 : On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + x^2 + x^{5/2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f admet un $DL_2(0)$ que l'on explicitera.
3. Montrer que f est dérivable en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 5 : Déterminer les valeurs de a, b et c pour lesquelles la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 : Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\arctan^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynômiale. Donner une relation entre P_{n+1} et P_n.

Exercice 7 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$, où P_n est une fonction polynômiale.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Déterminer $f^{(n)}$ pour les fonctions f ci-dessous :

(a) $\sin(x)$; (b) $\cos(x)$; (c) $\cos^2(x)$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$; (e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; (f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$;

(g) $f(x) = xe^{-x}$; (h) $f(x) = x^2e^x$; (i) $f(x) = e^x\sin(x)$.

Exercice 9 : On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. Préciser par quelle valeur f est alors prolongée. On notera encore f son prolongement et D' le nouvel ensemble de définition.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur D'.
4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0;\ +\infty[$.
5. Calculer $f''(x)$ sur $]0;\ +\infty[$ et montrer que pour tout entier naturel n non nul il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n\frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$
6. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$. En déduire la valeur de T_n.*On ne cherchera pas à expliciter une expression de chacun des coefficients de x^k de ce polynôme.*

Exercice 10 : Pour $n \geq 1$, on pose : $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k}$ pour $k \geq 2$.
3. Déterminer un encadrement puis un équivalent de U_n.

Exercice 11 : On pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $\dfrac{1}{1+(1+a^2)} \leq \arctan(a+1) - \arctan(a) \leq \dfrac{1}{1+a^2}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite l.

Exercice 12 : Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{8} - \ln(x)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha < \beta$.
3. Montrer que $\beta = \sqrt{1 + 8\ln(\beta)}$.
4. Soit g définie sur $[3;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{1+8\ln(x)}$. Montrer que $g(x) \geq 3$ et $0 \leq g'(x) \leq \frac{4}{9}$.
5. Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers β et déterminer une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

---

26. Polynômes

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ . . . 2
1.2 degré d'un polynôme . . . 4
1.3 division euclidienne . . . 5
1.4 diviseurs et multiples . . . 5

2 Polynômes dérivés et racines d'un polynôme **6**
2.1 racine d'un polynôme . . . 6
2.2 dérivées successives . . . 7
2.3 multiplicité d'une racine . . . 8

3 Factorisations d'un polynôme **9**
3.1 polynômes irréductibles . . . 9
3.2 polynômes scindés . . . 11
3.3 factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ . . . 11
3.4 cas de $\mathbb{R}[X]$ . . . 12

4 Polynômes et algèbre linéaire **13**
4.1 espaces vectoriels de polynômes . . . 13
4.2 familles de degrés échelonnés . . . 13
4.3 polynômes de matrices . . . 14

Polynômes

$\rightsquigarrow$ 6h35

Notation : Dans tout le cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Généralités

Estimation : 1h30
Durée : 1h20

1.1 l'ensemble $\mathbb{K}[X]$

DÉFINITION :

1. On appelle polynôme à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute expression P de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k; \quad \text{où}$$

- X est un symbôle formel appelé indéterminée ;
- $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés coefficients du polynôme P ;

2. On dit que deux polynômes sont égaux lorsque leurs coefficients sont égaux.

notation : On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

REMARQUES :

(1) Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé polynôme nul et est noté 0 ;

(2) Si $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, on écrit aussi $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$ avec $a_k = 0$ pour $k > n$.

opérations usuelles : On munit l'ensemble des polynômes des opérations usuelles suivantes :

⇨ somme : Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, on appelle somme de P et Q, et on note $P+Q$ le polynôme :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k.$$

⇨ multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$:

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note λP le polynôme :

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) X^k.$$

⇨ produit :

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, on appelle produit de P et Q, et on note PQ le polynôme :

$$PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k, \quad \text{avec } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j.$$

⇨ puissance : On note $P^0 = 1$, $P^1 = P$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $P^{n+1} = P^n P$.

⇨ composition :

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, on note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k.$$

Exemple : Pour $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X + 1$:

- $P + Q = X^2 + 2X + 2$;
- $PQ = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$;
- $P \circ Q = (X+1)^2 + (X+1) + 1 = X^2 + 3X + 3$;
- $Q \circ P = (X^2 + X + 1) + 1 = X^2 + X + 2$.

REMARQUE : Les propriétés des opérations précédentes sont les mêmes que pour les fonctions.

1.2 degré d'un polynôme

DÉFINITION :

1. Soit P un polynôme non nul. Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k$, on appelle degré de P, et on note $\deg(P)$, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$;
2. Par convention on pose : $\deg(0) = -\infty$.

Exemples :

(1) $\deg(1 + X^3) = 3$;

(2) $\deg(3) = 0$.

PROPOSITION : (propriétés du degré)

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda = 0 \\ \deg(P) & \text{sinon} \end{cases}$;
2. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Si de plus $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
3. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;
4. Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

REMARQUES :

(1) Par convention, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose : $-\infty + \deg(P) = -\infty$;

(2) On pose également, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, $-\infty \times \deg(Q) = -\infty$.

1. Si $\deg(P) = \deg(Q)$, nous n'avons pas forcément $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$. Par exemple, pour $P = X^2$ et $Q = -X^2 + 1$, nous avons $\deg(P+Q) = 0 \neq \underbrace{\max(\deg(P), \deg(Q))}_{=2}$;
2. Si $\deg(Q) = 0$, nous n'avons pas forcément $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$. Par exemple, pour $P = X^2 - 1$ et $Q = 1$, nous avons $P \circ Q = 0$ donc $\deg(P \circ Q) = -\infty \neq \underbrace{\deg(P)\deg(Q)}_{=0}$.

DÉFINITION :

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$. On appelle $a_n X^n$ le monôme de plus haut degré et a_n le coefficient dominant de P. Si $a_n = 1$, on dit que P est unitaire ;
2. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1.3 division euclidienne

THÉORÈME :

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) d'élements de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A = QB + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(B).$$

- Q est appelé le quotient de la division euclidienne de A par B ;
- R est appelé le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice : Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 2X - 1$ par $X^2 + X + 1$.

1.4 diviseurs et multiples

DÉFINITION :

1. Soient $(A;\ B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que A divise B, et on note $A|B$, lorsqu'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $B = AC$;
2. Pour $A \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble des diviseurs de A est l'ensemble des polynômes B tels que $B|A$;
3. Pour $A \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble des multiples de A est l'ensemble des polynômes B tels que $A|B$;

Exemples :

(1) Tout polynôme est divisible par n'importe quel polybnôme constant non nul. Par exemple : $X^2 + 2 = 2\left(\frac{X^2}{2} + 1\right)$;

(2) $X - 1$ divise $\underbrace{X^2 - 1}_{=(X-1)(X+1)}$;

(3) $\underbrace{x^3 - 3X}_{=X(X^2-3)}$ est un multiple de X ;

(4) L'ensemble des diviseurs (non constants) de $X - 1$ est l'ensemble des polynômes de la forme $\lambda(X - 1)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

PROPOSITION :

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$. Alors A divise B si et seulement si le reste de la division euclidienne de B par A est nul.

Exercice : Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $X^3 + aX + a^2$ est divisible par $X - 1$.

2 Polynômes dérivés et racines d'un polynôme

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

2.1 racine d'un polynôme

DÉFINITION :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1. On appelle fonction polynômiale associée à P, et on note $\tilde{P}$ la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{K}$ pour $x \in \mathbb{K}$;
2. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P lorsque α est un zéro de $\tilde{P}$, c'est à dire : $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

REMARQUE : Dans la suite du cours, on notera encore P (au lieu de $\tilde{P}$) la fonction polynômiale associée à P.

Exemple : Les racines complexes de $X^3 - 1$ sont $1, j, j^2$.

PROPOSITION :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

1. Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$;
2. α est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P. Plus généralement si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont deux à deux différents, alors

$$\begin{cases} P(\alpha_1) = 0 \\ \vdots \\ P(\alpha_p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k) | P.$$

Exercice : Déterminer les valeurs de $(a;\ b) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquelles $X^3 + aX + b$

est divisible par $X^2 - 1$.

PROPOSITION :

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant tel que $\deg(P) = n$. Alors P admet au plus n racines distinctes ;
   (a) Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines, alors $P = 0$.
   (b) Si P admet une infinité de racines, alors $P = 0$.

2.2 dérivées successives

DÉFINITION :

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On appelle polynôme dérivé de P, et on note P', le polynôme défini par :

$$P' = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k & \text{si } n \geq 1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

2. On définit la suite des polynes dérivés $P^{(n)}$, en posant : $P^{(0)} = P$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$

Exemple : Pour $P = X^2 + 3X$, nous avons $P' = 2X + 3$, $P^{(2)} = 2$, $P^{(n)} = 0$ pour $n \geq 3$.

REMARQUES :

(1) Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$;

(2) Si $\deg(P) = n$, alors $P^{(n)}$ est un polynôme constant et pour $r \geq n+1$, $P^{(r)} = 0$;

(3) Les règles de dérivation des polynômes sont identiques à celles des fonctions. En particulier la formule de Leibniz reste valable.

PROPOSITION : (formule de Taylor)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k.$$

2.3 multiplicité d'une racine

DÉFINITION :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est racine de P de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ lorsque :

- $(X - \alpha)^k | P$;
- $P = (X - \alpha)^k Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

REMARQUES :

(1) Une racine d'ordre 1 est également appelée racine simple.

(2) Une racine d'ordre 2 est également appelée racine double.

(3) On dit également racine « d'ordre k ».

PROPOSITION :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si α est racine de P d'ordre k, alors $1 \leq k \leq \deg(P)$;
2. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont deux à deux distincts, alors nous avons équivalence entre :
   (i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines de P d'ordre respectifs $k_1, \ldots, k_p$;
   (ii) $\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)^{k_j}|P$.

THÉORÈME : (caractérisation pratique)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est racine de P d'ordre k si et seulement si $\begin{cases} P(\alpha)=0 \\ P'(\alpha)=0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ P^{(k)}(\alpha)\neq 0. \end{cases}$

Exercice : Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$

et déterminer son ordre.

3 Factorisations d'un polynôme

Estimation : 1h30
Durée : 2h30

3.1 polynômes irréductibles

DÉFINITION :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ lorsque P est non constant et que les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme a et aP, avec $a \in \mathbb{K}^*$.

Exemples :

(1) $X-1$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Plus généralement, tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

(2) X^2-1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. Il ne l'est pas non plus dans $\mathbb{R}[X]$.

(3) X^2+1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. Il est par contre irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

(4) Les polynômes constants ne sont pas irréductibles.

REMARQUES :

(1) Si P n'est pas irréductible, on dit qu'il est réductible ;

(2) Si P est de degré supérieur ou égal à 2 et admet une racine $\alpha \in \mathbb{K}$, alors P est réductible ($X-\alpha$ divise P)

PROPOSITION : (Polynômes irréductibles de degré supérieur ou égal à 2)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$.

1. Si P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, alors P n'admet pas de racines dans $\mathbb{K}$;
2. Si de plus $\deg(P) = 2$, alors P est irréductible si et seulement s'il n'admet pas de racines dans $\mathbb{K}$.

La réciproque du 1. est fausse. Par exemple $(X^2+1)^3$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple : Les polynômes de degré trois ne sont jamais irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, toute fonction polynômiale de degré trois admet au moins une racine réelle.

THÉORÈME : (Décomposition en polynômes irréductibles)

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ admet une décomposition **unique** de la forme :

$$P = aP_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_r^{\alpha_r} = a\prod_{k=1}^{r}P_k^{\alpha_k},$$

où :

- a est le coefficient dominant de P ;
- $P_1, P_2, ..., P_r$ sont des polynômes irréductibles **unitaires** ;
- $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ sont des entiers naturels **non nuls**.

Exemples :

(1) $2X+1 = 2(X+\frac{1}{2})$ dans $\mathbb{C}[X]$;

(2) $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

REMARQUES :

(1) Si l'on n'impose pas que les polynômes irréductibles de la décomposition soient unitaires, alors il ne peut y avoir unicité de la décomposition. Par exemple, $2X+1 = 2(X+\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2}X+\frac{1}{4})$;

(2) Factoriser un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$, c'est le décomposer en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

3.2 polynômes scindés

DÉFINITION :

> Soit P un polynôme non constant. On dit que P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ lorsque la décomposition de P en polynômes irréductibles ne fait intervenir que des polynômes de degré 1.

Exemples :

(1) X^2+1 est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$ (il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$) ;

(2) $(X-1)^3(X-3)^3$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

PROPOSITION :

> Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$. Alors P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement s'il admet n racines comptées avec leurs multiplicités.

Exercice : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $X^n - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et donner sa décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

3.3 factorisations dans $\mathbb{C}[X]$

THÉORÈME : (d'Alembert-Gauss)

> Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

conséquences :

⇨ Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ;

⇨ Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Exercice : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme X^4+1.

PROPOSITION : (relations coefficients/racines)

> Soient $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les n racines de P (non nécessairement distinctes). Alors :
>
> 1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$;
> 2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Exemple : Pour $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$:

- la somme des racines vaut $-(-3) = 3$;
- le produit des racines vaut $(-1)^3(-1) = 1$.

Exercice : Calculer le produit des racines n-èmes de l'unité.

3.4 cas de $\mathbb{R}[X]$

PROPOSITION :

> Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P.

> Ceci est faux pour des polynômes à coefficients complexes non réels : les deux racines de $(X+i)(X+2i) = X^2+3i-2$ ne sont pas conjuguées.

THÉORÈME :

> Les polynômes irréductibles **unitaires** de $\mathbb{R}[X]$ sont **exactement** les polynômes de la forme :
>
> - $X+a$, avec $a \in \mathbb{R}$.
> - X^2+aX+b avec $a^2 < 4b$.

Exercice : Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Polynômes et algèbre linéaire

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

4.1 espaces vectoriels de polynômes

PROPOSITION :

1. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension finie $n+1$.

$\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie !

DÉFINITION :

On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la base $\mathcal{B} = (\underbrace{1, X, \dots, X^n}_{n+1 \text{ éléments}})$.

Exercice : On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = X(P(X+1) - P(X))$.

1. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

4.2 familles de degrés échelonnés

DÉFINITION :

Soit $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes. On dit que $\mathcal{F}$ est étagée (ou encore de degrés échelonnés) lorsque $-\infty < \deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$.

PROPOSITION :

Toute famille de degrés échelonnées est libre.

Exercice :

1. Montrer que $\mathcal{F} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^3 dans $\mathcal{F}$.

2. Pour $a \in \mathbb{K}$, étudier la liberté de $\mathcal{F} = (X, X+1, X+a)$ dans $\mathbb{K}[X]$.

4.3 polynômes de matrices

notation : Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on pose : $P(M)$ la matrice telle que $P(M) = a_0I_p + a_1M + \dots + a_nM^n$.

Exemple : pour $P = X^2 + X + 1$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, nous avons $P(M) = M^2 + M + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) & 0 \\ 0 & P(2) \end{pmatrix}$.

PROPOSITION :

Soient P et Q deux polynômes et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

- $(P+Q)(M) = P(M) + Q(M)$;
- $(PQ)(M) = P(M)Q(M)$.

Exercice : On pose : $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire $A^n = \begin{pmatrix} -2 + 3.2^n & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

⋆
⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆

Polynômes

Exercice 1 : En faisant une étude comparative sur les degrés des polynômes, déterminer les polynômes P et Q tels que :

1. $Q^2(X) = XP^2(X)$ où P et Q sont deux polynômes réels.
2. $(P')^2 = 4P$ où P est un polynôme réel.

Exercice 2 :

1. Effectuer la division euclidienne de $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par le polynôme $Q = X^2 - 1$.
2. Même question pour $P = 3X^5 + 4X^2 + 1$ par le polynôme $Q = X^2 + 2X + 3$.

Exercice 3 : Calculer les restes des divisions euclidiennes de $X^n + X + 1$ par les polynômes :

$$\text{(a) } (X-1)(X-2)\,; \quad \text{(b) } (X-1)^2.$$

Exercice 4 : Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P soit unitaire, de degré 3, divisible par $X - 1$, et tel que les restes des divisions euclidiennes de P par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ soient égaux.

Exercice 5 : Soit P un polynôme. Le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$ est 4 et le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$ est 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.

Exercice 6 :

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $P = X^3 + aX^2 + 1$ est divisible par $X - 1$.
2. Factoriser P pour les valeurs de a trouvées à la question précédente.

Exercice 7 :

1. Montrer que 2 est racine de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$. et préciser son ordre.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X - 1)^3$.

Exercice 9 : Le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ a-t-il une racine multiple ?

Exercice 10 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$\text{(a) } X^2 + X + 1\,; \quad \text{(b) } X^3 - 1\,; \quad \text{(c) } (X+1)^3 - 1\,;$$

$$\text{(d) } X^5 - 1\,; \quad \text{(e) } X^6 + 1\,; \quad \text{(f) } X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1.$$

Exercice 11 : Soit $P = (X+1)^n - 1$.

1. Calculer les racines de P.
2. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 12 : Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Déterminer les racines entières de P ainsi que leurs multiplicités. Vérifier que j est racine de P. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13 : Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que si a est une racine éventuellement complexe de P alors a^2 et $(a+1)^2$ sont aussi des racines de P.
2. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
3. Montrer que si a est une racine de P alors $|a+1| = 1$.
4. En déduire les racines de P et la forme de P.

Exercice 14 : Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on pose $f(P) = (1-X)P(0) + XP(1)$. Montrer que f est linéaire et déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire ? Trouver les éléments caractéristiques de f.

Exercice 15 : Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$.

1. Pour quelles valeurs de n l'application linéaire f est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$?
2. On se place désormais dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
   (b) On pose $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = (X-1)^2$ et $P_3 = (X+1)^2$ et $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{F}}(f)$.

Exercice 16 : Pour P un polynôme, on pose : $u(P) = P(X) + P(X+1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice M de u dans la base canonique.
3. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}. En déduire $u^{-1}(X^2)$.
4. (a) Montrer que quel que soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$:
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k u(P)(k) = (-1)^n P(n+1) - P(1).$$
   (b) En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

Exercice 17 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A - I_2)(A - 3I_2) = 0$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-3)$. En déduire la valeur de A^n.

---

27. Intégrales de fonctions

Table des matières

1 Compléments sur l'intégrale d'une fonction continue **2**
1.1 formule de changement de variable 2
1.2 intégrales de fonctions rationnelles 3
1.3 autres intégrales usuelles 4

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux **5**
2.1 subdivisions d'un intervalle 5
2.2 fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux 5
2.3 intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux . . 6
2.4 propriétés de l'intégrale de Riemann 7

3 Utilisations de l'intégrale de Riemann **9**
3.1 intégrale de Riemann et primitives de fonction 9
3.2 sommes de Riemann 10
3.3 calcul approché d'intégrales 11

4 Exemples d'études de fonctions définies avec une intégrale **11**

Intégrales de fonctions

$\rightsquigarrow$ 7h15

notation : Pour $b < a$, on pose par convention, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.

1 Compléments sur l'intégrale d'une fonction continue

Estimation : 2h
Durée : 3h30

1.1 formule de changement de variable

PROPOSITION :

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a;\ b]$ et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J et à valeurs dans $[a;\ b]$. Alors, pour $\varphi(t_0) = a$ et $\varphi(t_1) = b$, nous avons :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ en posant $x = \cos(t)$.

conséquence de la formule de changement de variable : on en déduit en particulier la proposition suivante :

PROPOSITION :

1. Si f est paire,
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
2. Si f est impaire,
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
3. Si f est T périodique :
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

illustrations graphiques

1.2 intégrales de fonctions rationnelles

(a) integrales de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$:

PROPOSITION :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors :
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

REMARQUES :

(1) On déduit de la proposition précédente le calcul des intégrales de la forme : $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, avec $a \neq 0$ et $\Delta < 0$;

(2) Si $\Delta > 0$, on décompose en éléments simples ;

(3) Si $\Delta = 0$, on utilise directement les primitives usuelles.

Exercice : Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}\,;\quad \text{(b)} \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2+2x-3}\,;\quad \text{(c)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

(b) integrales de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$: Les étapes sont le suivantes (lorsque $\Delta < 0$:

- On se ramène au calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$;
- On calcule l'intégrale précédente, par exemple en faisant le changement de variable : $x = \tan(t)$. Nous obtenons :
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \cos^{2n-2}(t)\,dt.$$
- On calcule une telle primitive en linéarisant $\cos^{2n-2}(t)$.

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

1.3 autres intégrales usuelles

⇨ intégrales de la forme $I(x) = \displaystyle\int F(e^{\alpha x})\,dx$: On fait le changement de variable $t = e^{\alpha x}$ pour se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Exercice : Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$. *indication : on pourra chercher une décomposition de la forme :* $\frac{1}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$.

⇨ intégrales de la forme $I(x) = \displaystyle\int \cos^m(t)\sin^n(t)\,dt$, $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$:

- Si m est impair, on pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(t)$.
- Si n est impair, on pourra prendre $x = \cos(t)$.
- Si m et n sont pairs, on linéarise.

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$.

REMARQUE : Plus généralement, dans le cas de fractions rationnelles en $\sin(x)$ et $\cos(x)$, on peut toujours effectuer le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Estimation : 2h
Durée : 2h

notation : on considère dans cette section une fonction f définie sur $[a;\ b]$ avec a et b deux réels et $a < b$.

2.1 subdivisions d'un intervalle

DÉFINITION :

1. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}, a < b$. On appelle subdivision σ du segment $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que :
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$
2. Le pas de la subdivision σ est le réel $p(\sigma)$ strictement positif donné par
$$p(\sigma) = \max_{k\in[\![0;\ n-1]\!]} (x_{k+1} - x_k)$$

REMARQUE : σ est à pas constant si et seulement si $p(\sigma) = \frac{b-a}{n}$. Dans ce cas, les points de la subdivision sont donnés par : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, \quad k \in [\![0;\ n]\!]$.

2.2 fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

DÉFINITION :

On dit que f est :

1. une **fonction en escalier** sur $[a;\ b]$ lorsqu' il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ du segment $[a, b]$ et des réels $c_1, \cdots,\ c_n$ n tels que pour tout $k \in [\![1;\ \cdots, n]\!]$, sur l'intervalle $]x_{k-1};\ x_k[$ f est constante et égale à c_k :
$$\forall x \in]x_{k-1};\ x_k[\quad f(x) = c_k.$$
2. une **fonction continue par morceaux** sur $[a;\ b]$ lorsqu' il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ du segment $[a, b]$ telle que f est continue sur $]x_{k-1};\ x_k[$ et admet des limites finies à gauche en x_k et à droite en x_{k-1}.

Notations : on note :

- $\mathcal{E}([a;\ b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;\ b]$;
- $\mathcal{CM}([a;\ b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a;\ b]$.

Exemples :

(1) La fonction $E(x)$ est une fonction en escalier sur $[-2;\ 2]$.

(2) La fonction $x - E(x)$ est continue par morceaux sur $[-2;\ 2]$.

REMARQUES :

(1) Les fonctions en escalier, ainsi que les fonctions continues sont des fonctions continues par morceaux.

(2) La fonction inverse n'est pas une fonction continue par morceaux sur $[0;\ 1]$;

(3) Une fonction continue par morceaux est forcément bornée.

PROPOSITION :

1. Si f et g sont continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est continue par morceaux : $\mathcal{CM}([a;\ b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a;\ b])$.
2. Si f et g sont des fonctions en escalier et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est une fonction en escalier : $\mathcal{E}([a;\ b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}([a;\ b])$.
3. Le produit de deux fonctions continues par morceaux est une fonction continue par morceaux et le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.

THÉORÈME : (approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;\ b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a;\ b])$ tels que :
$$\forall x \in [a;\ b], \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ et } 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$$

2.3 intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux

DÉFINITION :

Soient f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$, $\sigma = \{x_0, \cdots, x_n\}$ une subdivision et $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$, tels que $\forall x \in]x_{k-1};\ x_k[, \quad f(x) = c_k$.

On appelle intégrale de f sur $[a;\ b]$, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ le réel :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

Exemples :

(1) $\displaystyle\int_a^b 1\,dt = (b-a)\,;$

(2) $\displaystyle\int_0^4 E(t)\,dt = 0+1+2+3 = 6.$

REMARQUES :

(1) La quantité $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ représente l'aire (algébrique) de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f et les droites $x = a$ et $x = b$;

(2) En approchant une fonction continue par morceaux f par des fonctions en escalier, on voit que l'on peut définir l'aire de la partie délimitée par la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ cette valeur, et on l'appelle **intégrale (de Riemann) d'une fonction continue par morceaux**.

(3) Si f est une fonction de la variable réelle à valeurs complexes et $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ sont continues par morceaux, on définit l'intégrale de f sur $[a;\ b]$ en posant :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

2.4 propriétés de l'intégrale de Riemann

On considère dans cette sous-section des fonctions à valeurs réelles.

➩ Linéarité et croissance :

PROPOSITION :

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a,b])$ Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda\int_a^b g(t)\,dt;$
2. Si $\forall x \in [a;\ b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$

➩ Intégrale de fonctions positives :

PROPOSITION :

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$.

1. Si $\forall x \in [a;\ b], f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$
2. Si de plus f est **continue**, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Le 2. est faux lorque la fonction n'est pas continue. Par exemple, $\int_0^1 E(x)\,dx = 0$, pourtant la fonction partie entière n'est pas nulle sur $[0;\ 1]$ $(E(1) = 1)$.

conséquence : Si f est continue et $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$, alors f est nulle sur $[a;\ b]$.

➩ Relation de Chasles :

PROPOSITION :

Soit $c \in]a;\ b[$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$

➩ Inégalités de la moyenne :

DÉFINITION :

Soit $f \in \mathcal{CM}([a;\ b])$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;\ b]$ la quantité : $m(f) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

PROPOSITION :

Soient f et $g \in \mathcal{CM}([a;\ b])$. Alors :

1. $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq (b-a) \sup_{t\in[a;\ b]} |f(t)|$;
2. Plus généralement : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sup_{t\in[a;\ b]} |f(t)| \displaystyle\int_a^b |g(t)|\,dt$.

REMARQUES :

(1) Le 1. de la proposition précédente s'écrit aussi : $|m(f)| \leq \sup\limits_{t\in[a;\ b]} |f(t)|$ d'où le nom d'inégalités de la moyenne.

(2) La proposition reste vraie pour des fonctions à valeurs complexes.

3 Utilisations de l'intégrale de Riemann

Estimation : 1h30
Durée : 1h15

3.1 intégrale de Riemann et primitives de fonction

THÉORÈME :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur I et vérifie de plus : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

L'hypothèse de continuité est indispensable. En effet, considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. On vérifie que : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = |x|$, mais $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

REMARQUE : Si f est uniquement supposée continue par morceaux, alors F est continue. On utilise pour cela les inégalités de la moyenne. Notant $M =$

$\sup\{|f(t)|, t \in [a;\ b]\}$, nous avons :

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \sup\{|f(t)|, t \in [x_0;\ x]\}|x - x_0| \leq M|x - x_0|.$$

Alors, par encadrement :

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f \text{ est continue en } x_0.$$

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_0^n tE(t)\,dt,\ n \in \mathbb{N}^*$.

3.2 sommes de Riemann

DÉFINITION :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle sommes de Riemann les deux expressions suivantes :

1. $$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$
2. $$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

THÉORÈME :

Soit f une fonction continue sur $[a;\ b]$. Alors :

1. $$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)\,dt;$$
2. $$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)\,dt.$$

explications :

1. On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On remarque que $\sigma = \{x_0;\ x_2;\ ...;\ x_n\}$ est une subdivision à pas constant de $[a;\ b]$. Le pas vaut donc $p(\sigma) = \frac{b-a}{n}$. On réécrit cette somme sous la forme : $S_n(f) = p(\sigma)f(x_0) + p(\sigma)f(x_1) + ... + p(\sigma)f(x_{n-1})$. Alors :

- $p(\sigma)f(x_k)$ est l'aire du rectangle $[x_k;\ x_{k+1}] \times [0, f(x_k)]$.
- La somme $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ est l'intégrale d'une fonction en escalier.
- En pensant à la définition de l'intégrale construite par approximations d'aires de fonctions en escalier, il semble raisonnable d'approcher $\int_a^b f(t)\,dt$ par la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. De la même manière, en considérant les rectangles $[x_k;\ x_{k+1}] \times [0;\ f(x_{k+1})]$, nous obtenons 2.

Exercice : Calculer la limite de la suite de terme général $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

3.3 calcul approché d'intégrales

PROPOSITION :

Soient f une fonction continue sur $[a;\ b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si f est croissante, alors $S_n(f) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq R_n(f)$;
2. Si f est décroissante, alors $R_n(f) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq S_n(f)$.

Exercice : Proposer un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. (réponse :

- $R_2(f) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1/4}) \approx 0,88$
- $S_2(f) = \frac{1}{2}(e^{-1/4} + e^{-1}) \approx 0,57$

)

REMARQUE : Les deux façons d'approcher une intégrale que nous venons de voir sont communément appelées **méthode des rectangles**.

4 Exemples d'études de fonctions définies avec une intégrale

Estimation : 30min
Durée : 30min

PROPOSITION :

On considère une fonction f définie sur un ensemble D et continue par morceaux sur tout segment $[a;\ b] \subset D$.

1. Si u est une fonction définie sur I, alors $F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ est une fonction définie sur l'ensemble D' de tous les nombres x pour lesquels $[a;\ u(x)] \subset D$;
2. Si de plus u est continue sur D', alors F est continue sur D' ;
3. Si de plus u est de classe C^1 sur D', alors F est de classe C^1 sur D'. De plus, $\forall x \in D',\ f'(x) = u'(x)f(u(x))$.

REMARQUE : Plus généralement, si F est de la forme : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$, alors :

1. F est définie sur l'ensemble D' de tous les nombres x pour lesquels $[u(x);\ v(x)] \subset D$.
2. Dans le cas où F est de classe C^1, on calcule la dérivée en décomposant : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt - \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$. Alors : $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Exemples :

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{-1+x} \frac{dt}{t}$ est une fonction définie si et seulement si $[-1;\ -1+x] \subset \mathbb{R}^* \Leftrightarrow -1+x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

(2) $F(x) = \displaystyle\int_x^{1+x} \frac{dt}{\ln(t)}$.
- Si $0 < x < 1$, F est définie si et seulement si : $1 + x < 1 \Leftrightarrow x < 0$;
- Si $x > 1$, F est tout le temps définie.

F est donc définie sur $]1;\ +\infty[$.

(3) Pour $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ est bien définie. Notant G une primitive de $\dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $I =]1;\ +\infty[$, nous avons : $F(x) = G(x^2) - G(x)$. Ainsi, par opérations élémentaires, F est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\underbrace{\ln(x^2)}_{=2\ln(x)}} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

★

★ ★

★ ★ ★

Intégrales de fonctions

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+6x-7}\,; \quad \text{(b)} \int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+4x}\,; \quad \text{(c)} \int_{0}^{1} \frac{dx}{3x^2+4}\,;$$

$$\text{(d)} \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+4}\,; \quad \text{(e)} \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}\,; \quad \text{(f)} \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+x+1)^3};$$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}; \quad \text{(b)} \int_{2}^{3} \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}\,; \quad \text{(c)} \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$$

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx\,; \quad \text{(b)} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx\,; \quad \text{(c)} \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)}.$$

(poser $u=\sin(x)$) (poser $u=\cos(x)$) (poser $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$)

Exercice 4 : Calculer pour $x \neq 0$, $\displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{dt}{t}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

Exercice 5 : On pose : $I_n = \displaystyle\int_{0}^{1} t^n e^{-t}\,dt$.

1. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
2. Montrer, à l'aide d'encadrements, que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. On pose $W_n = \dfrac{I_n}{n!}$.
   (a) Montrer que : $W_{n+1}-W_n = -\dfrac{1}{e(n+1)!}$. En déduire $W_n = 1-\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, puis une expression de I_n en fonction de n.
   (b) Montrer que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 6 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan^{2n}(x)\,dx$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Calculer I_0, puis $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. En déduire $\dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

Exercice 7 : Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

Exercice 8 : (lemme de Riemann-Lebesgue) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a;\ b]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

Exercice 9 : On considère la fonction f définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de F et définie et montrer que F est de classe C^1 sur D.
2. Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F.
3. Montrer que F est impaire et pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
4. Déterminer le $DL_9(0)$ de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10 : On considère la fonction f définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)}$.

1. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $I =]1;\ +\infty[$.
2. Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F.
3. À l'aide d'encadrements, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
4. Montrer que $0 \leq \ln(t) \leq t-1$. En déduire $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$

Exercice 11 : Déterminer les limites éventuelles des suites :

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ ;\ \text{(b)} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\ ;\quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2+k^2}\ ;\quad \text{(d)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}.$$

Exercice 12 : (intégrales de Wallis) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que (I_n) est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}. Donner alors un équivalent simple de I_n.

---

28. Formules de Taylor

Table des matières

1 Présentation **2**
1.1 approximation d'une fonction par un polynôme 2
1.2 qu'est-ce qu'une formule de Taylor ? 3
1.3 un résultat utile 3

2 Les trois formules de Taylor **3**
2.1 formule de Taylor-Young 4
2.2 formule de Taylor-Lagrange 4
2.3 formule de Taylor avec reste intégral 5

3 Utilisation des formules de Taylor **5**
3.1 Taylor-Young et développements limités 5
3.2 Taylor-Lagrange et étude de suites définies par des sommes . . . 6
3.3 Taylor avec reste intégral et inégalités 6

Lycée Pierre-Paul RIQUET
S. GAUTIER

Formules de Taylor

$\rightsquigarrow$ 2h

On note dans la suite :

- f une fonction définie sur un ensemble D ;
- I un intervalle inclus dans D ;
- x_0 un élément de I.

1 Présentation

Estimation : 45min
Durée : 45min

1.1 approximation d'une fonction par un polynôme

PROPOSITION :

Si f est n-fois dérivable en x_0, alors il existe un unique polynôme P de degré n tel que : $\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ P'(x_0) = f'(x_0) \\ \vdots \\ P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$.
L'expression de ce polynôme P_n est :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

DÉFINITION :

Si f est n-fois dérivable en x_0, on appelle polynôme de Taylor de degré n en x_0 associé à f le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Exemple : Pour $f(x) = e^x$, Le polynôme de Taylor de degré 2 en x_0 est $P_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$.

Exercice :

1. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre n en 0 associé à la fonction exponentielle.
2. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre $2n$ associé à la fonction cosinus.
3. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre n associé à la fonction $(1+x)^\alpha$.

1.2 qu'est-ce qu'une formule de Taylor ?

On pose $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Une formule de Taylor est un théorème qui donne une estimation de ce reste.
Il y a trois formules de Taylor :

- Formule de Taylor-Young ;
- Formule de Taylor-Lagrange ;
- Formule de Taylor avec reste intégral.

1.3 un résultat utile

PROPOSITION : (intégration de la relation de comparaison)

> Soit f une fonction dérivable sur I et telle que $f'(x) = o_{x_0}(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Alors : $f(x) - f(x_0) = o_{x_0}(x^{n+1})$.

> La réciproque est fausse : si $f(x) - f(x_0) = o_{x_0}(x^{n+1})$ nous n'avons pas $f'(x) = o_{x_0}(x^n)$. Par exemple, pour $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, nous avons $f(x) = o_0(x)$ mais $f'(x)$ n'est pas négligeable devant 1 en 0 puisque f' n'admet pas de limite en 0.

2 Les trois formules de Taylor

Estimation : 45min
Durée :

2.1 formule de Taylor-Young

THÉORÈME :

> Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un $DL_n(x_0)$ et le $DL_n(x_0)$ est de la forme :
>
> $$f(x) \quad = \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{P_n(x)} + \underbrace{o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)}_{R_n(x)}.$$

2.2 formule de Taylor-Lagrange

Elle vient du mathématicien Brook Taylor $(1685 - 1731)$ qui l'établit en 1712.

THÉORÈME :

> Soit f une fonction $n+1$-fois dérivable sur I. Alors, $\forall (x;\ x_0) \in I^2$, il existe c compris entre x_0 et x($c \in]x_0;\ x[$ si $x > x_0$ ou $c \in]x;\ x_0[$si $x < x_0$,) tel que :
>
> $$f(x) \quad = \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{R_n(x)}.$$

REMARQUES :

(1) Lorsque $n = 0$, nous obtenons :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(c)$$

La formule de Taylor-Lagrange correspond alors à l'égalité des accroissements finis appliqué à f sur l'intervalle $[x_0;\ x]$ ou $[x;\ x_0]$.

(2) Pour $n = 1$, nous obtenons :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c).$$

(3) Si $x_0 = 0$, la formule devient :

$$f(x) \quad = \quad f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

(4) En posant $x = x_0 + h$, la formule s'écrit également :

$$f(x_0+h) \quad = \quad f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

2.3 formule de Taylor avec reste intégral

THÉORÈME :

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors, pour tout $x, x_0 \in I$, nous avons :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{P_n(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{R_n(x)}.$$

Exemples :

(1) Si $n = 0$, la formule est :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{'}(t)\, dt$$

pour f de classe C^1 sur I.

(2) Si $n = 1$, la formule est

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\, dt$$

pour f de classe C^2 sur I.

3 Utilisation des formules de Taylor

Estimation : 45min
Durée :

3.1 Taylor-Young et développements limités

PROPOSITION :

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors f admet un développement limité en x_0 de n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ donné par la formule de Taylor-Young.

conséquence : on en déduit les développements limités usuels admis dans le chapitre sur les développements limité, notamment :

- Le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle.
- Le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction cosinus.
- Le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $(1+x)^\alpha$ en 0.

3.2 Taylor-Lagrange et étude de suites définies par des sommes

PROPOSITION : (inégalité de Taylor-Lagrange)

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;\ b]$, alors :

$$\forall x \in [a;\ b], \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leq \sup_{t\in[a;\ b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple : Pour $a > 0$, la fonction exponentielle vérifie les hypothèses du théorème sur $[0; a]$. On en déduit :

$$\forall x \in [0;\ a], \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \left(\sup_{t\in[0;\ a]} \exp(t) \right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

➩ En particulier, notant $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$, nous avons : $|e^a - V_n| \leq \frac{\exp(a)}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$.

➩ Pour $a = 1$, nous obtenons la célèbre formule : $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice : On pose $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que (V_n) converge vers $\ln(2)$.

3.3 Taylor avec reste intégral et inégalités

Exercice : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in [0 :\ +\infty[,\ x - \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \leq x$;
2. $\forall x \in [0 :\ \pi],\ x - \frac{x^3}{6} \sin(x) \leq x$;

Deuxième partie .

Tests de cours, devoirs maisons et devoirs surveillés

29. Tests de cours

Nom : **Prénom :**

Test de cours 1

NOTE :

1. Complétez les pointillés par $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:
   (a) $x < 3 \ldots x \leq 3$; (b) $x^2 = 4 \ldots x = 2$; (c)$\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \ldots x = y$.
2. Développez :
   $(a-b)^3 =$ ....
   $(-2-x)^3 =$ ....
   $(-\sqrt{5}+1)^2=$ ....
3. Effectuez la division euclidienne de $x^3 + 3x^2 - 4$ par $x - 1$ ....
4. Qu'appelle-t-on domaine de définition d'une fonction f ? ....
5. On pose $f(x) = |x|$. Déterminez $f([-2;\ 1])$ ....
6. Quand dit-on qu'une fonction f est impaire sur un ensemble D ? ....
7. Quand dit-on qu'une fonction est strictement décroissante sur un ensemble D ? ....
8. Quand dit-on qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 ? ....
9. On pose $f(x) = x - 1$ et $g(x) = (x+1)^2$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ ....
10. Donnez l'équation réduite de la tangente en 1 à la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = x^2$ ....
11. On pose $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. Sans justifier que f est dérivable, calculez $f'(x)$ ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 2

NOTE :

1. Complétez par $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$: pour I un intervalle de $\mathbb{R}$: (a) f croissante sur I ... $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$;
   (b) f strictement décroissante sur I ... $\forall x \in I, f'(x) < 0$.
2. Exprimez $\ln(48)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ ....

3. Donnez l'inégalité fondamentale du logarithme ....

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, qu'appelle-t-on $\exp(x)$? ....

5. Donnez (en précisant les limites au bord) le tableau de variation de la fonction sh (on fera apparaître 0), ainsi que les équations réduites des tangentes à sa courbe représentative en 0 puis 1 ....

6. Donnez, en justifiant, une expression simple de $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)$ ....

7. Précisez, sans justifier, le sens de variation ainsi que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8. Simplifiez :
   (a) $\left(2^{16}\right)^{\frac{1}{2}} =$ ....
   (b) $2^{1+\sqrt{5}} \times 2^{1-\sqrt{5}} =$ ....

9. Qu'appelle-t'on fonction puissance d'exposant α ? Quel est son domaine de définition ? ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 3

NOTE :

1. Donnez la forme algébrique de l'inverse de $z = \dfrac{1}{1-2i}$ ……

2. Complétez par $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$: soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : (a) $z = 1+i \ldots \overline{z} = 1-i$;
(b)$z = 1+i \ldots |z| = \sqrt{2}$.

3. Calculez le module de $(3-i)^4$ ……

4. Déterminez l'autre solution de l'équation : $2z^2 - 6z + 6 + 2i = 0$ sachant que $1+i$ est solution ……

5. Déterminez la mesure principale de $-\frac{22\pi}{6}$ ……

6. Donnez la valeur de $\cos(-5\pi)$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ ……

7. Donnez une exprression simple de $\cos'$ et $\sin'$, puis donnez l'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représentative de sin ……

8. Donnez le tableau de variations (en précisant les valeurs en 0 et en π) de la fonction sin sur $[0;\ \pi]$ ……

9. Complétez par + ou − : (a) $\cos(\pi + x) = \ldots \cos(x)$; (b) $\sin(\pi - x) = \ldots \sin(x)$;
(c) $\tan(\pi - x) = \ldots \tan(x)$; (d) $\tan(\pi + x) = \ldots \tan(x)$.

10. La courbe représentative de la fonction tangente possède une symétrie : laquelle ? pourquoi ? ……

Nom : **Prénom :**

Test de cours 4

NOTE :

1. Montrez que la fonction définie par : $f(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ est périodique et déterminez sa période

2. Complétez ci-dessous :
   (a) $\cos(a+b) =$
   (b) $\sin(a-b) =$
   (c) $\tan(a+b) =$
   (d) $\cos(2x) =$
   (e) $\sin(a)\sin(b) =$
   (f) $\sin(p) + \sin(q) =$

3. On pose $z = 5 + 4i$. Calculez $|e^z|$

4. Simplifiez l'expression suivante, avec $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{\left(\overline{e^{ix}}\right)^3 \left(e^{ix+\ln(2)}\right)^2}{e^{-ix}} =$$

5. Énoncez les formules d'Euler ainsi que la formule de De Moivre

6. Mettre $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique, puis donnez une expression simple de z^6

7. (a) Complétez : pour : $\left\{\begin{array}{l} r_1 > 0 \\ r_2 > 0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{l} \theta_1 \in \mathbb{R} \\ \theta_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right., r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow$
   (b) Complétez par $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$: $z = 0 \ldots e^z = 1$.

Nom : **Prénom :**

Test de cours 5

NOTE :

1. Calculez la dérivée de la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{e^{ix^2}}{1+ix}$

2. Qu'appelle-t'on équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ?

3. Qu'appelle-t'on équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ?

4. Donnez une équation différentielle linéaire d'ordre 2 réelle homogène et à coefficients constants :
   (a) vérifiée par $f(x) = \cos(x)$
   (b) vérifiée par $g(x) = \mathrm{ch}(x)$

5. Donnez l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle linéaire à coefficients constants : $2y' + iy = 0$

6. Déterminez l'équation caractéristique, résolvez cette dernière puis déterminez l'ensemble des solutions réelles pour l'équation différentielle : $y'' + y = 0$

7. Pour les équations différentielles ci-dessous, proposez la forme d'une solution particulière réelle :
   (a) $y' + y = e^x$
   (b) $y' + y = e^{-x}$
   (c) $y'' + 2y' + y = e^x$
   (d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
   (e) $y'' - y = e^x$
   (f) $y'' - y = e^{-x}$

Nom : **Prénom :**

Test de cours 6

NOTE :

1. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + y = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

2. (a) Quand dit-on que $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

   (b) Quand dit-on que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan ?

3. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives : $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$. Donnez l'expression de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ en fonction de $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$

4. Qu'apelle-t'on bilinéarité pour le produit scalaire ?

5. Qu'appelle-t'on déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

6. On considère une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, et $\overrightarrow{v}$ le vecteur d'affixe $e^{i4\pi/3}$.

   (a) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{B}$

   (b) Déterminer la forme algébrique de l'affixe de $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$

   (c) Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $||\overrightarrow{u}||$, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

   (d) La famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme-t'elle une base du plan ? est-elle directe ?

   (e) Donnez un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$

Nom : **Prénom :**

Test de cours 7

NOTE :

1. On sait que A a pour affixe 1 et B a pour affixe $2+\sqrt{3}i$. Calculez $d(A,B)$ ....

2. Exprimez une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ en fonction des affixes z_A, z_B, z_C, z_D des points A, B, C, D ....

3. Énoncez les deux inégalités triangulaires ....

4. Qu'appelle-t-on barycentre de n points pondérés (A_1,α_1), (A_2,α_2), ..., (A_n,α_n) ? ....

5. Déterminez les coordonnées du barycentre G de $(A,1),(B,-2)$ sachant que A a pour coordonnées : $(1,3)$ et B a pour coordonnées $(2,-4)$ ....

6. Donnez, en justifiant, une équation cartésienne de (AB), avec $A(1;\ 0)$ et $B(0;\ 1)$ ....

7. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$. Déterminez les composantes d'un vecteur directeur, puis d'un vecteur orthogonal (en fonction de a et b) ....

8. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x+3y+1=0$.
   (a) Donnez une autre équation cartésienne de $\mathcal{D}$ ....
   (b) Donnez l'équation réduite de $\mathcal{D}$ ....

9. Donnez une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(a;\ b)$: ....

10. Soient $M(x_0;\ y_0)$ et $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$. Alors : $d(M;\ \mathcal{D})=$ ....

11. Donnez une équation cartésienne, puis une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(-1;\ 2)$ et de rayon 3 ....

Lycée Pierre-Paul Riquet TSI-1

Nom : **Prénom :**

Test de cours 8

NOTE :

Donnez la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)=\ldots\ldots$ (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)=\ldots\ldots$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x)=\ldots\ldots$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x=\ldots\ldots$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sqrt{2}}=\ldots\ldots$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x=\ldots\ldots$ (g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)=\ldots\ldots$ (h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x)=\ldots\ldots$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=\ldots\ldots$ (j) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}=\ldots\ldots$ (k) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x}=\ldots\ldots$ (l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=\ldots\ldots$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\ldots\ldots$ (n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=\ldots\ldots$ (o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x)=\ldots\ldots$ (p) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\ldots\ldots$

Lycée Pierre-Paul Riquet TSI-1

Nom : **Prénom :**

Test de cours 8

NOTE :

Donnez la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)=\ldots\ldots$ (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)=\ldots\ldots$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x)=\ldots\ldots$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x=\ldots\ldots$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sqrt{2}}=\ldots\ldots$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x=\ldots\ldots$ (g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)=\ldots\ldots$ (h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x)=\ldots\ldots$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=\ldots\ldots$ (j) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}=\ldots\ldots$ (k) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x}=\ldots\ldots$ (l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=\ldots\ldots$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\ldots\ldots$ (n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=\ldots\ldots$ (o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x)=\ldots\ldots$ (p) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\ldots\ldots$

Lycée Pierre-Paul Riquet TSI-1

Nom : **Prénom :**

Test de cours 8

NOTE :

Donnez la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)=\ldots\ldots$ (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)=\ldots\ldots$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x)=\ldots\ldots$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x=\ldots\ldots$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\sqrt{2}}=\ldots\ldots$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x=\ldots\ldots$ (g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)=\ldots\ldots$ (h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x)=\ldots\ldots$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=\ldots\ldots$ (j) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}=\ldots\ldots$ (k) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x}=\ldots\ldots$ (l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=\ldots\ldots$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\ldots\ldots$ (n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=\ldots\ldots$ (o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x)=\ldots\ldots$ (p) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\ldots\ldots$

Nom : **Prénom :**

Test de cours 9

NOTE :

1. Quand dit-on que la courbe représentative d'une fonction admet une asymptote :
   - horizontale en $+\infty$?
   - verticale en x_0 ?
   - oblique en $+\infty$?
2. Déterminez, en justifiant, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.
3. Quand dit-on qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{u}$ tend vers un vecteur $\overrightarrow{u_0}$ quand t tend vers a ?
4. On donne : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$. Déterminez $\overrightarrow{u}'$.
5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux fonctions vectorielles dérivables sur D. Donnez une expression simple de la dérivée de $g(t)=\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$.
6. Qu'appelle-t-on support d'une courbe plane paramétrée ?
7. On considère une courbe paramétrée $f(t)=(x(t);\ y(t))$ définie sur D symétrique par rapport à l'origine. Complétez le tableau suivant :

relation mathématique	On restreint l'étude à $D\cap\mathbb{R}^+$ et on complète ...
Si $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{cases}$	
Si $\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$	
Si $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$	
Si $\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{cases}$	
Si $\begin{cases} x(-t)=y(t) \\ y(-t)=x(t) \end{cases}$	

Nom : **Prénom :**

Test de cours 10

NOTE :

1. On considère une courbe paramétrée f définie sur D par $f(t) = (x(t);\ y(t))$ et dérivable en $t_0 \in D$. Quand dit-on que $M(x(t_0);\ y(t_0))$ est singulier ? ....

2. On considère la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^3 + t^4 \end{cases}$
   (a) Montrez que $M(0;\ 0)$ est singulier ....
   (b) Montrez que la courbe paramétrée admet une tangente en $(0;\ 0)$ dont on donnera un vecteur directeur ....

3. Précisez la nature et l'aspect local des branches infinies des courbes paramétrées dans les cas suivants :
   (a) $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = 0^+$ ....
   (b) $\lim\limits_{t\to 1} y(t) = 2^-$ et $\lim\limits_{t\to 1} x(t) = -\infty$ ....
   (c) $\lim\limits_{t\to +\infty} y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to +\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ ....
   (d) $\lim\limits_{t\to +\infty} y(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ ....

4. Déterminez l'ensemble des primitives de $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty;\ 0[$ ....

5. Déterminez l'unique primitive F de la fonction id telle que $F(1) = 2$ ....

6. Donnez une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé :
   (a) $x^2 + 2x + 3$, $I = \mathbb{R}$ ....
   (b) $\sqrt{x}$, $I = [0;\ +\infty[$ ....
   (c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0;\ +\infty[$ ....
   (d) $\frac{1}{x^3}$, $I =]0;\ +\infty[$ ....
   (e) $\sin(x)$, $I = \mathbb{R}$ ....
   (f) $\tan(x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 11

NOTE :

1. Quand dit-on qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble D ?
2. Déterminez une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé :
   (a) $\frac{1}{x+1}$, $I =]-1;\ +\infty[$
   (b) $2xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$
   (c) $\frac{x}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$
   (d) $\cos(2x)$, $I = \mathbb{R}$
3. (a) Énoncez une formule d'intégration par parties (une seule des deux au choix)
   (b) Déterminez une primitive de xe^x à l'aide d'une intégration par parties
4. On considère l'équation différentielle : $y' - xy = 0$. Donnez son ensemble de solutions S_H
5. On considère une équation différentielle (E) $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$, avec a et b continues sur I. On note S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée : $S_H = \left\{Ce^{-A(x)},\ C \in \mathbb{R}\right\}$, avec A une primitive de a sur I. Expliquez et donnez le nom de la méthode permettant de déterminer une solution particulière de (E)
6. Qu'appelle-t-on conique C de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$?
7. On note $\mathcal{R}_0$ le repère dans lequel une parabole a pour équation réduite : $Y^2 = 2pX$, avec $p > 0$. Donnez dans $\mathcal{R}_0$:
   (a) les coordonnées du foyer F
   (b) une équation de la directrice
   (c) les coordonnées du sommet S
   (d) une équation de l'axe focal
8. On considère une parabole C d'équation réduite : $y^2 = 2px$, avec $p > 0$.
   (a) Donnez une représentation paramétrique de C
   (b) Donnez l'expression de la tangente en $M_0(x_0;\ y_0)$ en C

Nom : **Prénom :**

Test de cours 12

NOTE :

1. Complétez le tableau suivant :

Ellipse d'équation : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$				
excentricité	sommets	foyers	directrices	centre
$c^2=\ldots\ldots, c>0$				

2. Qu'appelle-t-on hyperbole ? ....

3. Donnez une représentation paramétrique de l'ellipse : $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ....

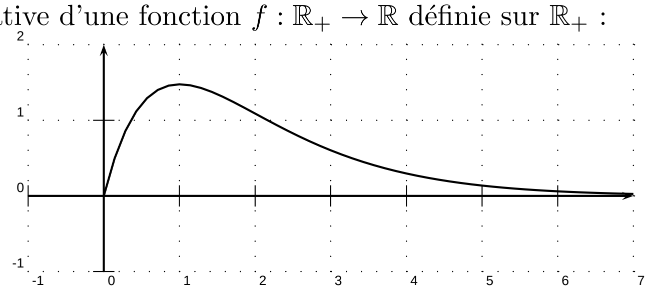
4. On considère l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Donnez l'équation de sa tangente en un de ses points $M(x_0;\ y_0)$ ....

5. On considère une ellipse de foyers F et F' et M un point quelconque de cette dernière. Que peut-on dire de $MF+MF'$? ....

6. Donnez une représentation paramétrique de la branche positive de l'hyperbole d'équation : $x^2-y^2=1$. Donnez également une équation de ses asymptotes ....

7. Quelle est la nature de l'ensemble des points M d'équation : $x^2+2x+2y^2=0$. Justifiez ....

8. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$.
   (a) Donnez l'image de 2 ....
   (b) Donnez les antécédents de 1 ....
9. On donne la courbe représentative d'une fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}_+$:



Tracez sur cette même figure $f^{-1}(]0;\ 1[)$ et précisez (en justifiant) si f est injective ....

10. On considère une application $f:E\to F$. Quand dit-on (on donnera la définition mathématique précise) que f est :
    (a) injective ? ....
    (b) surjective ? ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 14

NOTE :

1. Soient $A(1;\ 0\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ et $C(0;\ 0;\ 1)$. Proposez une formule pour calculer l'aire du triangle ABC et calculez cette aire ....

2. Qu'appelle-t-on déterminant de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$? ....

3. On donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculez $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ....
   (b) $\mathcal{B}$ forme-t-elle une base du plan, ? Si oui, est-elle directe ? Justifiez ....

4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1;\ 0\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ et $C(0;\ 0;\ 1)$ ....

5. On donne $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 4 = 0$.
   (a) Déterminer une autre équation cartésienne de $\mathcal{P}$ ....
   (b) Déterminer un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ ....
   (c) Calculer la distance de l'origine à $\mathcal{P}$ ....

6. Soients $\mathcal{P}x + 2y + 3z = 0$ et $\mathcal{P}'$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Justifier ....

7. Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 14

NOTE :

1. Soient $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ et $C(0;\ 0;\ 1)$. Proposez une formule pour calculer l'aire du triangle ABC et calculez cette aire ....

2. Qu'appelle-t-on déterminant de trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$? ....

3. On donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculez $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ....
   (b) $\mathcal{B}$ forme-t-elle une base du plan, ? Si oui, est-elle directe ? Justifiez ....

4. Soit M un point de coordonnées cartésiennes $(x_M;\ y_M;\ z_M)$. Alors :
   (a) Si (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques de M, alors $\begin{cases} x_M = \ldots\ldots \\ y_M = \ldots\ldots \\ z_M = \ldots\ldots \end{cases}$.
   (b) Si (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques de M, alors $\begin{cases} x_M = \ldots\ldots \\ y_M = \ldots\ldots \\ z_M = \ldots\ldots \end{cases}$.

5. Soit A de coordonnées cylindriques : $(1;\ \sqrt{3};\ 2)$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A ....

6. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1;\ 0\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ et $C(0;\ 0;\ 1)$ ....

7. On donne $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 4 = 0$.
   (a) Déterminer une autre équation cartésienne de $\mathcal{P}$ ....
   (b) Déterminer un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ ....
   (c) Calculer la distance de l'origine à $\mathcal{P}$ ....

8. Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 15

NOTE :

1. (a) Proposer une formule pour calculer la distance d'un point M à une droite (AB)

   (b) On considère la droite (AB), avec $A(1;\ 0;\ 0)$ et $B(1;\ 1\ 1)$. Calculer la distance de l'origine à la droite (AB)

   (c) Déterminer une équation cartésienne de la droite précédente

2. On considère une droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 4 \\ z = -t + 2 \end{cases}$

   (a) Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

   (b) Déterminer les coordonnées de l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan d'équation : $x + y + z - 1 = 0$

3. On considère une assertion $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. On souhaite prouver par récurrence à deux pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Précisez :

   (i) l'initialisation :

   (ii) l'hérédité :

4. On considère une assertion $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. On souhaite prouver par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Précisez :

   (i) l'initialisation :

   (ii) l'hérédité :

5. Soient a et b deux entiers relatifs. Quand dit-on que :

   (a) a divise b ?

   (b) a est un multiple de b ?

6. Donner les diviseurs de 12

7. Quand dit-on que p est nombre premier ?

8. Faire la division euclidienne de 18 par -4

9. Donner la décomposition en facteurs premiers de -360

10. Quand dit-on que r est un nombre rationnel ?

11. $\frac{5}{-2}$ est-il rationnel ? Justifiez

12. Qu'appelle-t-on partie entière d'un nombre réel x ?

Nom : **Prénom :**

Test de cours 16

NOTE :

1. Quand dit-on que $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$?

2. Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $A \subset E$.
   (a) Quand dit-on que $M \in E$ est un majorant de A dans E ?
   (b) Quand dit-on que le réel b est le minimum de A ?
   (c) Quand dit-on que A est bornée ?

3. $]-\infty;\ 3[$ est-il majoré ? a-t-il un maximum ? Justifiez.

4. Quand dit-on que $E \subset \mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure ?

5. Quelle est la différence fondamentale entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$?

6. On considère le système linéaire de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$(S)\ \left\{\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 & \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n & \end{array}\right., \text{ avec } a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ pour } \left\{\begin{array}{l} i \in [\![1;\ n]\!] \\ j \in [\![1;\ p]\!] \end{array}\right. .$$

   (a) Donnez l'équation de la i-ème ligne L_i
   (b) Quand dit-on que (S) est carré d'ordre n ?
   (c) Quand dit-on que (S) est homogène ?
   (d) Donnez un exemple de système linéaire de trois équations et à deux inconnues
   (e) Quand dit-on que (S) est échelonné ?
   (f) Donnez un exemple de système linéaire échelonné de trois équations et à deux inconnues.
   (g) Que peut-on dire sur le nombre de solutions d'un système linéaire quelconque ?

7. Résoudre le système linéaire : $\left\{\begin{array}{ccccl} x & +y & -z & -t & = 0 \\ & y & +z & +t & = 0 \\ & & z & -2t & = 0 \end{array}\right.$

Nom : **Prénom :**

Test de cours 17

NOTE :

1. Calculez le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & +1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la deuxième colonne (détaillez votre calcul).
2. Quand dit-on qu'un système linéaire (S) est de Cramer ?
3. On considère le système (S) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=-1 \\ 3x+y+z=3 \end{cases}$. Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$.
4. On considère (S) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=m_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=m_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=m_3 \end{cases}$ et on suppose que (S) admet une unique solution $(x;\ y;\ z)$. Complétez :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}.$$

5. Quand dit-on qu'une suite est arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$?
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$,
   (a) Proposez une expression simple de u_n en fonction de n, r et u_0
   (b) Proposez une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ toujours en fonction de n, r et u_0
7. Quand dit-on qu'une suite est géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$?
8. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$,
   (a) Proposez une expression simple de u_n en fonction de n, q et u_0
   (b) Proposez une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ toujours en fonction de n, q et u_0 quand :
   - $q = 1$
   - $q \neq 1$
9. Donnez une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
10. Complétez : (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+r} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=\dots}^{\dots} u_k$ $(r \in \mathbb{N}^*)$. (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=\dots}^{\dots} u_k$. (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \dots\dots\dots$.
11. Factorisez : $a^7 - b^7 =$
12. Énoncez le triangle de Pascal
13. Énoncez la formule du binôme de Newton

Nom : **Prénom :**

Test de cours 18

NOTE :

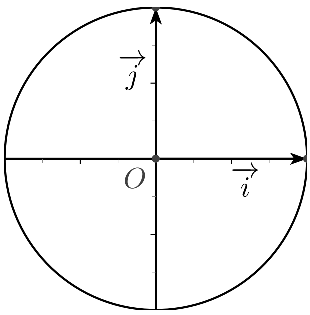
1. Complétez : (a) $\prod_{k=0}^{n} u_{k+3} = \prod_{k=\dots}^{\dots} u_k$, (b) $\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$, (c) $\prod_{k=0}^{n} \lambda u_k = \dots \prod_{k=0}^{n} u_k$.
2. Soit (u_n) une suite réelle. Quand dit-on que (u_n) :
   (a) admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$? ....
   (b) tend vers $+\infty$? ....
   (c) tend vers $-\infty$? ....
3. Quand dit-on que deux suites sont de même nature ? ....
4. Les suites définies par $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$ sont-elles de même nature ? Justifiez. ....
5. Donnez une suite extraite associée à (u_n) telle que $u_n = n$ ....
6. La suite définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet-elle une limite ? Justifiez ....
7. Quand dit-on qu'une suite réelle (u_n) est décroissante ? ....
8. Quand dit-on qu'une suite réelle (u_n) est monotone ? ....
9. Complétez les assertions ci-dessous lorsque cela est necessaire.
   (a) « Toute suite convergente et .... est bornée »
   (b) « Toute suite bornée et .... converge »
   (c) « Toute suite croissante et .... admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ »
   (d) « Toute suite minorée et .... converge »
10. Quand dit-on que deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes ? ....
11. Montrer que les suites définies par $a_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ sont adjacentes ....
12. De manière générale, que peut-on dire de deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) ? ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 19

NOTE :

1. Quand dit-on qu'une suite complexe (u_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$? ....
2. Déterminez la limite de $u_n = 1 + \frac{i}{n}$ ....
3. Soit E un ensemble. Quand dit-on que $*$ est une loi de composition interne sur E ? ....
4. Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. Quand dit-on que $*$ est :
   (a) associative ? ....
   (b) commutative ? ....
   (c) admet un élément neutre e ? ....
   (d) lorsque $*$ admet un élément neutre E, quand dit-on que x admet un symétrique x' ? ....
5. Quand dit-on que $(G, *)$ est un groupe ? ....
6. Qu'appelle-t-on racine n-ème de l'unité ? ....
7. Donnez le nombre de racines n-èmes de l'unité ainsi que leur expression ....
8. Donnez la forme exponentielle des racines 8-èmes de l'unité, puis les placer sur le cercle trigonométrique



9. Quand dit-on que f est un morphisme de groupes de $(E, *)$ vers $(G, \triangle)$? ....
10. Si $\mathcal{F}(E)$ représente l'ensemble des applications de E vers E, que peut-on dire (associativité, commutativité, neutre, groupe) de la loi de composition $\circ$ sur cet ensemble ? ....
11. (a) Quand dit-on que t est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$? ....
    (b) Si t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b, donnez la forme de l'expression complexe de t ....
12. (a) Quand dit-on que r est la rotation de centre Ω et d'angle θ ? ....
    (b) Si r est la rotation de centre Ω d'affixe w et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, donnez la forme de l'expression complexe de r ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 20

NOTE :

1. (a) Quand dit-on que h est l'homothétie de centre Ω et de rapport λ ?

   (b) Si h est l'homothétie de centre Ω d'affixe w et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, donnez la forme de l'expression complexe de h

2. On note $\mathcal{P}$ le plan usuel et on considère une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Quand dit-on que f est :

   (a) une isométrie ?

   (b) une similitude ?

   (c) une similitude directe ?

3. Les transformations usuelles suivantes sont-elles des isométries, similitudes directes ?

   (a) Symétrie orthogonale :

   (b) Homothétie :

4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Quand dit-on que :

   (a) $u_n \sim v_n$?

   (b) $u_n = o(v_n)$?

   (c) $u_n = O(v_n)$?

5. Montrer que $n + \sin(n) \sim n$

6. Donnez un équivalent simple des suites de terme généraux suivants. Justifiez.

   (a) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$:

   (b) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$:

   (c) $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$:

   (d) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$:

   (e) $\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$:

   (f) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{n^3 + n^2 + n + 1}$:

   (g) $\sqrt{n^2 + n + 1}$:

7. Complétez :

   (a) Si $u_n = O(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

   (b) Si $u_n = o(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

   (c) $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = \ldots + o(\ldots)$.

Nom : **Prénom :**

Test de cours 21

NOTE :

1. Complétez :
   (a) transitivité : $o(u_n) = \ldots\ldots$ (b) multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda o(u_n) = \ldots\ldots$
   (c) puissance $\alpha \in \mathbb{R}$: $o(u_n)^\alpha = \ldots\ldots$ (d) somme : $o(u_n) = \ldots\ldots$
2. Pour les deux suites ci-dessous, précisez à chaque fois laquelle est négligeable devant l'autre :
   (a) $u_n = a^n$, $a > 1$ et $v_n = n!$ ....
   (b) $u_n = n!$ et $v_n = n^n$ ....
   (c) $u_n = n^\alpha$, $\alpha > 1$ et $v_n = \ln(n)$ ....
   (d) $u_n = \ln(n)^\beta$, $\beta > 0$ et $v_n = n!$ ....
3. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez les matrices suivantes :
   (a) $2A - B$ ....
   (b) ${}^tA$ ....
   (c) AC ....
4. Complétez : « On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$ et $C = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{\ldots}(\mathbb{K})$. Alors $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ldots} a_{ik} b_{\ldots}$. »
5. Écrire matriciellement le système : $\begin{cases} 2x & -3y & +4z = 1 \\ x & -y & +z = 2 \\ x & & -3z = 3 \\ & 3y & +z = 4 \end{cases}$
   ....
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quand dit-on que A est :
   (a) symétrique ? ....
   (b) antisymétrique ? ....
7. Donnez un exemple de matrice carrée d'ordre 3 symétrique et un exemple de matrice carrée d'ordre 3 antisymétrique
   ....
8. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel, qui est une loi de composition interne. Énoncez les propriétés de cette loi de composition interne. ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 22

NOTE :

1. Énoncez la formule du binôme de Newton ....

2. Quand dit-on que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ? ....

3. Déterminez l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....

4. Pour A et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, complétez :
   (a) Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = \ldots\ldots\ldots$; (b) $\det(AB) = \ldots\ldots\ldots$.

5. Calculez le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ? ....

6. Quand dit-on que f admet une limite $L \in \mathbb{R}$ en x_0 ? ....

7. Pour f définie sur un ensemble D, quand dit-on que f est :
   (a) continue en $x_0 \in D$? ....
   (b) continue à gauche en $x_0 \in D$? ....

8. Donnez un exemple de fonction f continue à droite en 0 et non continue à gauche en 0. f est-elle continue en 0 ? Justifiez. ....

9. Quand dit-on que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 ? ....

10. Complétez : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{x\to\ldots} f(x) = \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$

11. Énoncez un des deux théorèmes d'encadrement au choix ....

12. Vrai ou Faux ?
    (a) « Une fonction décroissante et minorée sur $]0;\ 1[$ admet une limite finie en 0 » ....
    (b) « Une fonction monotone sur $I =]0;\ 1[$ admet une limite en tout point de I » ....
    (c) « Une fonction croissante et majorée sur $I =]0;\ 1[$ admet une limite finie en 0 » ....
    (d) « Une fonction monotone est continue » ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 23

NOTE :

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.
   (a) Quel est le domaine de définition D de la fonction f ? Justifiez.
   (b) Justifiez la continuité de f sur D.
   (c) Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera
2. On considère une fonction définie sur un intervalle I et une suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$. Rappelez :
   (a) Les hypothèses vues en cours sur f et I qui assurent la convergence de (u_n)
   (b) comment obtenir les valeurs possibles de la limite ℓ de (u_n)
3. Que peut-on dire d'une fonction continue sur un intervalle I fermé borné ?
4. On considère une fonction continue sur $I = [a;\ b]$ et telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On note (a_n) et (b_n) les deux suites définies par la méthode de dichotomie et l'on pose : $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   (a) Expliquer comment l'on définit a_1 et b_1
   (b) Que peut-on dire de la limite commune ℓ de ces deux suites ?
5. Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires.
6. Complétez : « Pour E muni d'une loi de composition interne notée « + », et d'une loi de composition externe, notée « . », on dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel lorsque :
   (i) $(E, +)$ est
   (ii) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$; $\left.\begin{array}{r}\lambda.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\}$ (distributivité mixte) ;
   .... (associativité mixte) ;
7. Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. Quand dit-on que F est un sous-espace vectoriel de E ?
8. Donnez une des deux caractérisations équivalentes d'un sous-espace vectoriel F non vide de E
9. Montrer que l'ensemble F des vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $x + 2y = 0$, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des vecteurs du plan

Nom : **Prénom :**

Test de cours 24

NOTE :

1. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x-y+z=0 \right\}$. Montrez que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

2. Soient E un espace vectoriel E de loi de composition interne notée « + »et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Qu'appelle-t'on somme de F et G ?
   (b) F et G sont supplémentaires dans E ?

3. Donnez la caractérisation équivalente de $E = F \oplus G$

4. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. Quand dit-on que f est une application linéaire ?

5. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Qu'appelle-t-on :
   (a) Noyau de f ?
   (b) Image de f ?

6. Complétez : (a) f est injective si et seulement si
   (b) f est surjective si et seulement si

7. Soit l'application : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.
   (a) Montrez que f est linéaire
   (b) Déterminez une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$
   (c) Déterminez une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$
   (d) f est-elle injective ?Justifiez.

8. Qu'appelle-t-on :
   (a) endomorphisme de E ?
   (b) automorphisme de E ?

9. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Rappelez les propriétés algébriques satisfaites par $\mathcal{L}(E)$ muni de sa loi de composition interne « $\circ$ »

Nom : **Prénom :**

Test de cours 25

NOTE :

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.
   (a) Qu'appelle-t-on projection p sur F parallèlement à G ? ....
   (b) Qu'appelle-t-on symétrie s par rapport à F et parallèlement à G ? ....
2. Donnez la caractérisation des projections et des symétries ....
3. Si l'on connaît l'expression d'une symétrie s et d'une projection p, comment détermine-t-on les éléments caractéristiques de chacune ? ....
4. Soient f et g deux fonctions réelles. Quand dit-on que :
   (a) $f \sim_a g$? ....
   (b) $f = o_a(g)$? ....
   (c) $f = O_a(g)$? ....
5. Proposez un équivalent en 0 de $x^3 - 3x^2$, puis montrez en expliquant votre démarche qu'il s'agit bien d'un équivalent ....
6. Nous avons vu en cours qu'il y avait au moins deux opérations usuelles qu'il ne fallait surtout pas faire pour déterminer des équivalents de fonctions. Pouvez-vous citer lesquelles ? ....
7. Déterminez un équivalent simple, puis la limite, aux points proposés des fonctions suivantes. Justifiez.
   (a) $\frac{\arctan(x)}{x}$, $a = 0$ ....
   (b) $\frac{\arctan(x)}{x}$, $a = +\infty$ ....
   (c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $a = +\infty$ ....
   (d) $\ln(x)$, $a = 1$ ....
8. Comparez les fonctions suivantes au voisisnage du point proposé :
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)^2$, $a = +\infty$ ....
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)^2$, $a = 0$ ....
   (c) $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$, $a = -\infty$ ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 26

NOTE :

On note E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1. Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs ($p \in \mathbb{N}^*$). Quand dit-on que :
   (a) $\mathcal{F}$ est liée ?
   (b) $\mathcal{F}$ est libre ?
2. Déterminez si $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ est libre ou liée.
3. Quand dit-on que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, ($p \in \mathbb{N}^*$), est une base de E ?
4. Énoncez la caractérisation d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ de E.
5. Quand dit-on que E est de dimension finie ?
6. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie ?
7. Donnez la base canonique de $\mathbb{K}^6$ et précisez sa dimension
8. Donnez la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et précisez sa dimension
9. Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E de dimension finie n.
   (a) Si $\mathcal{F}$ est libre, alors
   (b) Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors
10. Énoncez le théorème de la base incomplète
11. Énoncez la formule de Grassman
12. Énoncez la caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E de dimension finie

Nom : **Prénom :**

Test de cours 27

NOTE :

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.
   (a) Qu'appelle-t-on rang de f ? ....
   (b) Énoncez le théorème du rang ....
2. Quand dit-on que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes ? ....
3. Les espace vectoriels $\mathbb{K}^6$ et $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{K})$ sont-ils isomorphes ? Justifiez. ....
4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
   (a) Quand dit-on que f est une forme linéaire de E ? Donnez un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ....
   (b) On note $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrer que H est un hyperplan et déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $H = \text{Ker}(f)$ ....
5. Quand dit-on que f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n ? ....
6. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ ....
7. Donnez les déveleppements limité à l'ordre n des fonctions suivantes :

$\dfrac{1}{1-x} =$	$e^x =$	$\ln(1+x) =$ ....

8. Donnez les développements limités à l'ordre $2n+1$ des fonctions suivantes :

$\cos(x) =$	$\sin(x) =$	$\text{ch}(x) =$ ....

9. Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} =$	$\sqrt{1+x} =$	$\arcsin(x) =$ ....

10. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\cos(e^x - 1)$ ....

Nom : **Prénom :**

Test de cours 28

NOTE :

1. Soit f une fonction telle qu'en 0 : $f(x) = x - 1 + 3x^3 + o_0(x^3)$. Donnez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 et précisez la position de cette dernière par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
2. On donne la courbe paramétrée : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 e^t \end{array}\right.$.
   (a) Montrez que le point de paramètre 0 est singulier
   (b) On donne $x(t) = t^2 + o_0(t^3)$ et $y(t) = t^2 + t^3 + o_0(t^3)$. Déterminez un vecteur directeur de la tangente et l'allure de la courbe paramétrée au voisinage du point de paramètre 0
3. Qu'appelle-t-on matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ de E de dimension n ?
4. On donne $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Donnez $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$
5. Soit $f : E \to F$, avec E de dimension p et F de dimension n. Qu'appelle-t-on matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?
6. Qu'appelle-t-on application linéaire canoniquement associée à la matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$?
7. Soient f et g deux endomorphismes de E. Complétez :
   (a) $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f - g) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \dots\dots\dots\dots$; (b) $\dots\dots\dots\dots = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g)\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$.
8. On note $\mathcal{B}$ la base canonique et la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Déterminez $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$
9. On donne $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$ de vecteur colonne X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$. Donnez une relation entre X et X'
10. Énoncez les formules de changement de base pour une application linéaire $f : E \to F$

Nom : **Prénom :**

Test de cours 29

NOTE :

1. On pose : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x+y \\ -4x-y \end{pmatrix}$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, calculer $P(\lambda) = \det(f - \lambda id)$ sous la forme la plus factorisée possible
2. Quand dit-on que f est dérivable en x_0 ?
3. Quand dit-on que f est dérivable à droite en x_0 ?
4. Énoncez le théorème de Rolle
5. Énoncez l'égalité des accroissements finis
6. Quand dit-on que f est de classe C^1 sur un ensemble D ?
7. Précisez les inclusions entre les trois ensembles suivants : $\mathcal{D}(D)$, $C^1(D)$ et $C^0(D)$
8. Donnez, sans justifier, un exemple de fonction dérivable en 0 mais qui n'est pas de classe C^1 en 0
9. Montrez que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
10. Énoncez l'inégalité des accroissements finis
11. Quand dit-on que f est n-fois dérivable sur un ensemble D ?
12. Quand dit-on que f est de classe C^n sur un ensemble D ?
13. Quand dit-on que f est de classe C^∞ sur un ensemble D ?
14. Énoncez la formule de Leibniz permettant de calculer la dérivée n-ème d'un produit de fonctions

Nom : **Prénom :**

Test de cours 30

NOTE :

1. Effectuez la division euclidienne de $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 + X + 1$
2. Déterminez les racines complexes de $X^4 - 1$
3. Énoncez la formule de Taylor
4. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Quand dit-on que α est racine de P d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$?
5. Montrez que 1 est racine de $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 1$ et précisez son ordre
6. Quand dit-on que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$?
7. Donnez un exemple de polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais qui n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$
8. Quand dit-on que $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$?
9. Énoncez le théorème de d'Alembert-Gauss
10. On donne $P = X^4 - 2X^3 + X + 1$.
    (a) P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Justifiez.
    (b) Donnez la valeur de la somme de ses racines complexes.
11. Qu'appelle-t-on base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$? Précisez son nombre d'éléments
12. On donne $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = XP'(X) - P(X+1)$. On admet que φ est un endomorphisme. Déterminez sa matrice dans la base canonique
13. Décomposez en produit de polynômes irréductibles $X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$

Lycée Pierre-Paul Riquet TSI-1

Nom : **Prénom :**

Test de cours 31

NOTE :

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 e^{-3x}\,dx\,; \quad \text{(b)} \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx\,; \quad \text{(c)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,; \quad \text{(d)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}\,; \quad \text{(f)} \int_0^1 \tan(x)\,dx\,; \quad \text{(g)} \int_1^e \ln(x)\,dx\,; \quad \text{(h)} \int_0^1 \arctan(x)\,dx\,;$$

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx\,; \quad \text{(j)} \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx\,; \quad \text{(k)} \int_0^1 \mathrm{sh}(x)\,dx\,; \quad \text{(l)} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en justifiant et en faisant le changement de variable $x = t^2$.

Lycée Pierre-Paul Riquet TSI-1

Nom : **Prénom :**

Test de cours 31

NOTE :

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 e^{-3x}\,dx\,; \quad \text{(b)} \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx\,; \quad \text{(c)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,; \quad \text{(d)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}\,; \quad \text{(f)} \int_0^1 \tan(x)\,dx\,; \quad \text{(g)} \int_1^e \ln(x)\,dx\,; \quad \text{(h)} \int_0^1 \arctan(x)\,dx\,;$$

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx\,; \quad \text{(j)} \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx\,; \quad \text{(k)} \int_0^1 \mathrm{sh}(x)\,dx\,; \quad \text{(l)} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en justifiant et en faisant le changement de variable $x = t^2$.

Lycée Pierre-Paul Riquet TSI-1

Nom : **Prénom :**

Test de cours 31

NOTE :

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 e^{-3x}\,dx\,; \quad \text{(b)} \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx\,; \quad \text{(c)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,; \quad \text{(d)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}\,; \quad \text{(f)} \int_0^1 \tan(x)\,dx\,; \quad \text{(g)} \int_1^e \ln(x)\,dx\,; \quad \text{(h)} \int_0^1 \arctan(x)\,dx\,;$$

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx\,; \quad \text{(j)} \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx\,; \quad \text{(k)} \int_0^1 \mathrm{sh}(x)\,dx\,; \quad \text{(l)} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en justifiant et en faisant le changement de variable $x = t^2$.

30. Devoirs maisons

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 1.

Problème

–Étude d'une famille de fonctions–

On considère la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} + m\sqrt{-x^2-2x+3}$, où m est un paramètre réel strictement positif.

1. Déterminer le domaine de définition de f_m.
2. Justifier que f_m est dérivable sur un ensemble que l'on précisera, et montrer que sur cet ensemble : $f'_m(x) = \dfrac{(x+1)A(x)}{(-x^2-2x+3)^{3/2}}$, où A est un polynôme de degré 2 dépendant d'un paramètre réel m que l'on précisera.
3. Résoudre l'équation : $f'_m(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction $f_{1/4}$.
5. On suppose $m > \frac{1}{4}$. Dresser le tableau de variations de f_m, puis montrer que sur son domaine de définition, f_m atteint une valeur minimale dont on cherchera une expression simple.

à rendre le jeudi 30 Septembre

Lycée Pierre-Paul RIQUET **Année 2010-2011**
lundi 20 Septembre Mathématiques TSI-1

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 1.

Problème

–Étude d'une famille de fonctions–

On considère la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} + m\sqrt{-x^2-2x+3}$, où m est un paramètre réel strictement positif.

1. Déterminer le domaine de définition de f_m.
2. Justifier que f_m est dérivable sur un ensemble que l'on précisera, et montrer que sur cet ensemble : $f'_m(x) = \dfrac{(x+1)A(x)}{(-x^2-2x+3)^{3/2}}$, où A est un polynôme de degré 2 dépendant d'un paramètre réel m que l'on précisera.
3. Résoudre l'équation : $f'_m(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction $f_{1/4}$.
5. On suppose $m > \frac{1}{4}$. Dresser le tableau de variations de f_m, puis montrer que sur son domaine de définition, f_m atteint une valeur minimale dont on cherchera une expression simple.

à rendre le jeudi 30 Septembre

CORRECTION DU DM 1.

Problème :

1. Nous avons : $D_{f_m} = \left\{x \in \mathbb{R} / -x^2 - 2x + 3 > 0\right\}$. On cherche donc le signe du trinôme. On calcule : $\Delta = 16 > 0$, nous avons ainsi deux solutions simples : $x_1 = 1, x_2 = -3$. De plus $a = -1 < 0$, donc le signe du trinôme est donné par le diagramme suivant :

x		-3		1	
E	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi : $\boxed{D_{f_m} =]-3;\ 1[.}$

2. Nous avons $f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} + m\sqrt{u(x)}$. Puisque la fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u(x) > 0$ sur D_{f_m}, par composition, $g(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur D_{f_m}, et : $\forall x \in D_{f_m}, g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-(x+1)}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$. D'autre part, $\sqrt{u(x)} \neq 0$ sur D_{f_m}, donc par quotient, la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$ est dérivable sur D_{f_m}, et $h'(x) = \frac{u'(x)}{2u(x)^{(3/2)}} = \frac{-(x+1)}{(-x^2-2x+3)^{3/2}}$. Finalement, par somme, f_m est dérivable sur D_{f_m} et :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_{f_m}, \quad f_m'(x) &= -\frac{x+1}{(-x^2-2x+3)^{3/2}} + \frac{-m(x+1)}{\sqrt{-x^2-2x+3}} \\ &= -\frac{(x+1)(m(-x^2-2x+3)+1)}{(-x^2-2x+3)^{3/2}} \\ &= \boxed{\frac{(x+1)(mx^2+2mx-3m+1)}{(-x^2-2x+3)^{3/2}}}. \end{aligned}$$

Avec les notations de l'énoncé, nous avons : $A(x) = mx^2 + 2mx + 1 - 3m$, qui est bien un polynôme de degré 2, puisque m est supposé non nul.

3. On résout dans un premier temps l'équation $mx^2 + 2mx - 3m + 1 = 0$. Le discriminant de cette expression vaut : $\Delta = (2m)^2 - 4m(-3m+1) = 16m^2 - 4m = 4m(4m-1)$. Le signe de discriminant selon les valeurs de m est donné par le diagramme suivant :

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4m$		$-$	0	$+$		$+$	
$4m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-m(3m+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On distingue ainsi les cas suivants :

- si $m \in \left]0;\ \frac{1}{4}\right[$. Alors $\Delta < 0$, et l'équation $A(x) = 0$ n'admet pas de solutions. Par conséquent, $f_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$: $\boxed{S = \{-1\}}$.
- Si $m = \frac{1}{4}$. Alors $\Delta = 0$ et l'équation : $A(x) = 0$ admet une solution double $x_0 = -1$. Par conséquent,
$$\begin{aligned} f_m'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } A(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{S = \{-1\}}$.
- Si $m > \frac{1}{4}$. Alors $\Delta > 0$ et l'équation $A(x) = 0$ admet deux solutions distinctes :
$x_1 = \dfrac{-m - \sqrt{4m^2 - m}}{m} = -1 - \dfrac{\sqrt{4m^2 - m}}{m}$ ou $x_2 = \dfrac{-m + \sqrt{4m^2 - m}}{m} = -1 + \dfrac{\sqrt{4m^2 - m}}{m}$. Par conséquent,
$$\begin{aligned} f_m'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } A(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = x_1 \text{ ou } x = x_2. \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{S = \{-1;\ x_1;\ x_2\}}$.

4. Pour $m = \frac{1}{4}$, le trinôme A admet une racine double : $x_0 = -1$. Le signe du trinôme est donc donné par le coefficient dominant qui est m et qui est strictement positif. Ainsi, $\forall x \in D_{f_m}, A(x) \geq 0$. Le dénominateur étant également strictement positif, le signe de f_m' est déterminé par le signe de $x + 1$. On en déduit le tableau de variations :

x	-3		-1		1
$f_{1/4}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f_{1/4}$	‖	$\searrow$	$\underline{1}$	$\nearrow$	‖

5. Si $m > \frac{1}{4}$, puisque $m > 0$, le signe du trinôme est donné par le diagramme suivant :

x		x_1		x_2	
A	$+$	0	$-$	0	$+$

Remarquant de plus, $-3 < x_1 < -1 < x_2 < 1$, nous en déduisons le tableau de signes pour $f_m'(x)$:

x	-3		x_1		-1		x_2		1
$x+1$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	‖
$A(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	‖
$f_m'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖

Nous pouvons alors dresser le tableau de variations de f_m :

x	-3		x_1		-1		x_2		1
$f_m'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
f_m	‖	$\searrow$	m_1	$\nearrow$	$\frac{1}{2} + 2m$	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	‖

Il reste à évaluer : m_1 et m_2. Nous avons : $m_1 = \dfrac{1}{\sqrt{-x_1^2 - 2x_1 + 3}} + m\sqrt{-x_1^2 - 2x_1 + 3}$. Or, $A(x_1) = 0$, c'est à dire : $mx_1^2 + 2mx_1 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow -x_1^2 - 2x_1 = \frac{1-3m}{m}$. Par conséquent, $-x_1^2 - 2x_1 + 3 = \frac{1-3m}{m} + 3 = \frac{1}{m}$. On en déduit : $m_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m}}} + m\sqrt{\frac{1}{m}} = 2\sqrt{m}$. Le lecteur attentif aura remarqué que l'on peut faire exactement le même raisonnement pour m_2. Finalement : $\boxed{f_m \text{ atteint son minimum et } x_1 \text{ et } x_2\text{. La valeur de ce minimum est : } 2\sqrt{m}.}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n° 2.

Problème

–Étude d'une fonction–

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)e^{\sin^2(x)}$, et on note C sa courbe représentative.

1. Expliquez pourquoi il est possible de restreindre l'étude à $[0;\ \pi]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0;\ \pi]$, et calculer $f'(x)$. En déduire une équation de la tangente en $\frac{\pi}{2}$ à C.
3. (a) Résoudre l'équation : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$, puis l'inéquation $\cos^2(x) > \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $[0;\ \pi]$ (on fera apparaître $\frac{\pi}{2}$).
4. Tracer C, puis la courbe représentative de $|f|$ sur la même figure.

Exercice

–Un calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$–

1. Montrer que : $\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)$.
2. Résoudre l'équation : $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
3. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, puis montrer que : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

à rendre le lundi 11 Octobre

Lycée Pierre-Paul RIQUET **Année 2010-2011**
Jeudi 30 Septembre Mathématiques TSI-1

Devoir à la maison n° 2.

Problème

–Étude d'une fonction–

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)e^{\sin^2(x)}$, et on note C sa courbe représentative.

1. Expliquez pourquoi il est possible de restreindre l'étude à $[0;\ \pi]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0;\ \pi]$, et calculer $f'(x)$. En déduire une équation de la tangente en $\frac{\pi}{2}$ à C.
3. (a) Résoudre l'équation : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$, puis l'inéquation $\cos^2(x) > \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $[0;\ \pi]$ (on fera apparaître $\frac{\pi}{2}$).
4. Tracer C, puis la courbe représentative de $|f|$ sur la même figure.

Exercice

–Un calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$–

1. Montrer que : $\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)$.
2. Résoudre l'équation : $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
3. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, puis montrer que : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

à rendre le lundi 11 Octobre

CORRECTION DU DM 2.

Problème :

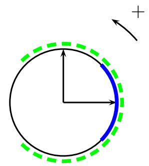
1. • D'une part, f est 2π-périodique. En effet :
$$\begin{aligned} f(x+2\pi)) &= \cos(x+2\pi)e^{\sin^2(x+2\pi)} \\ &= \cos(x)e^{\sin^2(x)} \text{ car } \cos(x+2\pi)=\cos(x) \text{ et} \sin(x+2\pi)=\sin(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$
Ainsi, il suffit de restreindre l'étude de la fonction à un intervalle de longueur $[-\pi;\ \pi]$. On en déduira la courbe représentative sur $\mathbb{R}$ en translatant la courbe représentative obtenue sur $[-\pi;\ \pi]$.

   • D'autre part, la fonction f est paire. En effet : $$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x)e^{\sin^2(-x)} \\ &= \cos(x)e^{\sin^2(-x)} \text{ car } \cos(-x)=\cos(x) \\ &= \cos(x)e^{(-\sin(x))^2} \text{ car } \sin(-x)=-\sin(x) \\ &= \cos(x)e^{\sin^2(x)} \text{ car } (-X)^2=X^2. \end{aligned}$$
Il suffit donc d'étudier la fonction sur $[0;\ \pi]$. On obtiendra alors la courbe représentative de la fonction sur $[-\pi\ :;\ \pi]$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Puisque sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, par produit, $\sin^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto e^{\sin^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Enfin, la fonction cos étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est finalement dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $f(x) = u(x)v(x)$, avec $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = e^{\sin^2(x)}$. Alors $u'(x) = -\sin(x)$, $v'(x) = 2\sin(x)\cos(x)e^{\sin^2(x)}$ et pour tout réel x : $$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \\ &= -\sin(x)e^{\sin^2(x)} + 2\cos^2(x)\sin(x)e^{\sin^2(x)} \\ &= \boxed{2\sin(x)e^{\sin^2(x)}\left(-\frac{1}{2}+\cos^2(x)\right)} \end{aligned}$$
On en déduit : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e$. Puisque : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, l' équation réduite de la tangente en $\frac{\pi}{2}$ est donc : $\boxed{y=-e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

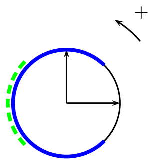
3. (a) Nous avons : $$\begin{aligned} \cos^2(x)=\tfrac12 &\Leftrightarrow \cos^2(x)-\tfrac12=0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x)-\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\cos(x)-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\left(\cos(x)+\tfrac{\sqrt2}{2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x)-\tfrac{\sqrt2}{2}=0 \text{ ou } \cos(x)+\tfrac{\sqrt2}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x)=\tfrac{\sqrt2}{2} \text{ ou } \cos(x)=\tfrac{\sqrt2}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \text{ ou } \cos(x)=\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow x=\tfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x=-\tfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x=\tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x=-\tfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]. \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{4}\ [2\pi];\ -\frac{\pi}{4}\ [2\pi];\ \frac{3\pi}{4}\ [2\pi];-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\right\}}$.

   De la même façon, nous avons : $$\begin{aligned} \cos^2(x)>\tfrac12 &\Leftrightarrow \left(\cos(x)-\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\left(\cos(x)+\tfrac{\sqrt2}{2}\right)>0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x)-\frac{\sqrt2}{2}>0\\ \cos(x)+\frac{\sqrt2}{2}>0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\cos(x)-\frac{\sqrt2}{2}<0\\ \cos(x)+\frac{\sqrt2}{2}<0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow (1)\begin{cases}\cos(x)>\frac{\sqrt2}{2}\\ \cos(x)>-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases} \text{ ou } (2)\begin{cases}\cos(x)<\frac{\sqrt2}{2}\\ \cos(x)<-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases} \end{aligned}$$
   Les solutions du système (1) s'obtiennent à l'aide du cercle trigonométrique



$$S_1 = \left]\frac{-\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right[\ [2\pi]$$

De même, les solutions du système (1) s'obtiennent à l'aide du cercle trigonométrique



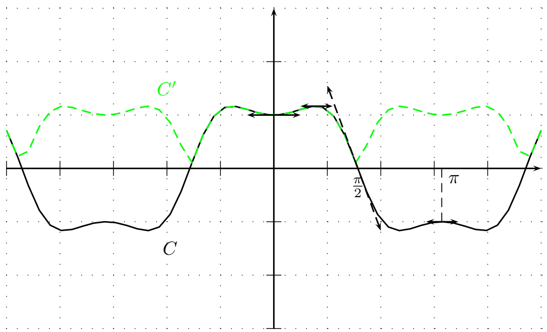
$$S_2 = \left]\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right[\ [2\pi]$$

Finalement, $\boxed{S = S_1 \cup S_2 = \left]\frac{-\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right[\ [2\pi].}$

(b) Pour obtenir les variations sur $[0;\ \pi]$, on étudie le signe de f'. L'exponentielle étant toujours positive, et puisque $\sin(x) \geq 0$ sur $[0;\ \pi]$, d'après l'expression obtenue en 2., f' est du signe de $\cos^2(x) - \frac{1}{2}$. Or, pour $x \in [0;\ \pi], \cos^2(x) - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \cos^2(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\ \pi\right]$. On en déduit alors le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-e$	$-$	0	$+$	0
f	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2e}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2e}}{2}$	$\nearrow$	1

4. On note C le courbe représentative de la fonction f, et C' la courbe représentative de $|f|$.



Exercice :

1. D'après la formule de De Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(5x)+i\sin(5x) &= (\cos(x)+i\sin(x))^5\\ &= \cos^5(x)+5\cos^4(x)i\sin(x))+10\cos^3(x)(i\sin(x))^2+10\cos^2(x)(i\sin(x))^3\\ &+5\cos(x)(i\sin(x))^4+(i\sin(x))^5\\ &= \cos^5(x)+5i\cos^4(x)\sin(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)\\ &-10i\cos^2(x)\sin^3(x)+5\cos(x)\sin^4(x)+i\sin^5(x)\\ &= \left(\cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x)\right)\\ &+i\left(5\cos^4(x)\sin(x)-10\cos^2(x)\sin^3(x)+\sin^5(x)\right).\end{aligned}$$

En identifiant les parties imaginaires, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= 5\cos^4(x)\sin(x)-10\cos^2(x)\sin^3(x)+\sin^5(x)\\ &= 5(1-\sin^2(x))^2\sin(x)-10(1-\sin^2(x))\sin^3(x)+\sin^5(x)\\ &= 5(1-2\sin^2(x)+\sin^4(x))\sin(x)-10(\sin^3(x)-\sin^5(x))+\sin^5(x)\\ &= 5\sin(x)-10\sin^3(x)+5\sin^5(x)-10\sin^3(x)+10\sin^5(x)+\sin^5(x)\\ &= \boxed{16\sin^5(x)-20\sin^3(x)+5\sin(x).}\end{aligned}$$

2. On pose $X=x^2$, on se ramène alors à l'équation : $16X^2-20X+5=0$. On calcule le discriminant $\Delta=400-320=80>$. Nous avons alors deux solutions réelles distinctes : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$; $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

Ainsi : $16x^4-20x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $x^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$
$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ ou $x=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ ou $=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ ou $=-\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Finalement, $\boxed{S=\left\{\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right\}}$.

3. En prenant $\theta=\frac{\pi}{5}$ dans l'expression trouvée au 1., nous obtenons :

$$0=\sin(\pi)=\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right)=16\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right)-20\sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right)+5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Par conséquent : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(16\sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right)-20\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+5\right)=0$.
Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$, nous avons donc la relation :

$$16\sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right)-20\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+5=0,$$

c'est à dire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation : $16x^4-20x^2+5=0$. Cette dernière a été précédemment résolue. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ correspond donc à l'une de ces expressions avec radicaux. Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$, il ne reste que deux possibilités : $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\approx 0.59$ ou $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\approx 0.95$. Pour trancher, on utilise l'encadrement $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$, ce qui donne, la fonction sinus étant strictement croissante sur $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$: $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.71$.
Par conséquent :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.}$$

La relation : $\cos(2x)=1-2\cos^2(x)$ donne par ailleurs : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{4-5+\sqrt{5}}{4}$.
Finalement :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.}$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 3.

Problème

–Inégalités géométriques–

On considère un nombre complexe z de module 1.

1. Montrer, à l'aide des inégalités triangulaires, que : $|z+1|+|z-1| \geq 2$, et étudier le cas d'égalité.
2. On pose dans cette question : $t = |1-z|$.
   (a) Toujours à l'aide des inégalités triangulaires, montrer que $0 \leq t \leq 2$.
   (b) Montrer que : $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$. En déduire une expression simple de $|z+1|$ en fonction de t.
   (c) On considère la fonction définie sur $[0;\ 2]$ par : $f(t) = t + \sqrt{4-t^2}$. Montrer que f est dérivable sur un ensemble que l'on précisera, puis calculer $f'(t)$ sur cet ensemble.
   (d) Pour $t \in [0;\ 2]$, résoudre l'inéquation : $\sqrt{4-t^2} < t$, et en déduire le tableau de variations de f sur $[0;\ 2]$.
   (e) En déduire l'inégalité : $|1+z|+|1-z| \leq 2\sqrt{2}$.
   (f) Pour quelle(s) valeur(s) de z a-t-on l'égalité : $|1+z|+|1-z| = 2\sqrt{2}$?
3. Interpréter géométriquement les deux inégalités précédentes.

à rendre le lundi 8 Novembre

Lycée Pierre-Paul RIQUET **Année 2010-2011**
Jeudi 21 Octobre Mathématiques TSI-1

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 3.

Problème

–Inégalités géométriques–

On considère un nombre complexe z de module 1.

1. Montrer, à l'aide des inégalités triangulaires, que : $|z+1|+|z-1| \geq 2$, et étudier le cas d'égalité.
2. On pose dans cette question : $t = |1-z|$.
   (a) Toujours à l'aide des inégalités triangulaires, montrer que $0 \leq t \leq 2$.
   (b) Montrer que : $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$. En déduire une expression simple de $|z+1|$ en fonction de t.
   (c) On considère la fonction définie sur $[0;\ 2]$ par : $f(t) = t + \sqrt{4-t^2}$. Montrer que f est dérivable sur un ensemble que l'on précisera, puis calculer $f'(t)$ sur cet ensemble.
   (d) Pour $t \in [0;\ 2]$, résoudre l'inéquation : $\sqrt{4-t^2} < t$, et en déduire le tableau de variations de f sur $[0;\ 2]$.
   (e) En déduire l'inégalité : $|1+z|+|1-z| \leq 2\sqrt{2}$.
   (f) Pour quelle(s) valeur(s) de z a-t-on l'égalité : $|1+z|+|1-z| = 2\sqrt{2}$?
3. Interpréter géométriquement les deux inégalités précédentes.

à rendre le lundi 8 Novembre

CORRECTION DU DM 3.

Problème :

1. D'après les inégalité triangulaires, $|(z+1)+(z-1)| \leq |z+1|+|z-1|$. Ainsi : $|z+1|+|z-1| \geq |2z|$. Enfin : $|2z| = 2|z| = 2$ car $|z| = 1$. Finalement : $\boxed{|z+1|+|z-1| \geq 2.}$

   cas d'égalité : Pour $z-1$ et $z+1$ non nuls, d'après le cas d'égalité pour les inégalités triangulaires : $|z+1|+|z-1| = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z+1 = \lambda(z-1)$. Ceci est équivalent à $\begin{cases} z = \frac{-1-\lambda}{1-\lambda} \\ \lambda \neq 1 \end{cases}$. En particulier $z \in \mathbb{R}$. De plus $|z| = 1$. Nous n'avons donc que deux possibilités :
   – $z = 1$, mais alors $z-1 = 0$, ce qui est contraire aux hypothèses ;
   – $z = -1$, mais alors $z+1 = 0$, ce qui est également contraire aux hypothèses.
   Par conséquent, si une telle égalité est vérifiée, nous avons $z-1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z+1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$. Réciproquement, si $z = 1$, nous avons $|z+1|+|z-1| = |2|+0 = 2$. De même, si $z = -1$,nous avons $|z+1|+|z-1| = 0+|-2| = 2$. Finalement : $\boxed{|z+1|+|z-1| = 2 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1.}$

2. (a) Un module étant toujours positif : $t = |1-z| \geq 0$. D'autre part, d'après les inégalités triangulaires, $t = |1-z| \leq |1|+|-z|$. Comme $|1| = 1$ et $|-z| = |z| = 1$, nous en déduisons, $t \leq 2$. Finalement : $\boxed{0 \leq t \leq 2.}$

   (b) Nous savons que $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}(\overline{z}w) + |w|^2$. Par conséquent : $|z+1|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}(\overline{z}) + 1 = 2 + 2\text{Re}(\overline{z})$, puisque $|z| = 1$. De même : $|z-1|^2 = |z|^2 - 2\text{Re}(\overline{z}) + 1 = 2 - 2\text{Re}(\overline{z})$, puisque $|z| = 1$. En sommant, nous obtenons alors : $\boxed{|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4.}$

   Comme : $|z-1| = |-(z-1)| = |1-z| = t$, nous avons la relation : $|z+1|^2 + t^2 = 4$, donc, $|z+1|^2 = 4-t^2$. Puisque $t \in [0;\ 2]$, $4-t^2 \geq 0$. De plus $|z+1| \geq 0$. Ainsi : $|z-1|^2 = 4-t^2 \Leftrightarrow \boxed{|z+1| = \sqrt{4-t^2}.}$

   (c) Pour $t \in]0;\ 2[$, $4-t^2$ est polynômiale donc dérivable et est strictement positive. Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, $t \mapsto \sqrt{4-t^2}$ est dérivable sur $]0;\ 2[$. Finalement, par somme, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;\ 2[.}$ De plus, pour $t \in]0;\ 2[$, $f'(t) = 1 + \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$, avec $u(t) = 4-t^2$. Comme $u'(t) = -2t$, on en déduit :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{4-t^2}-t}{\sqrt{4-t^2}}.} \end{aligned}$$

   (d) Puisque $4-t^2 \geq 0$ pour $t \in [0;\ 2]$, l'inéquation est définie quel que soit $t \in [0;\ 2]$. De plus $t \geq 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sqrt{4-t^2} < t &\Leftrightarrow \left(\sqrt{4-t^2}\right)^2 < t^2 \\ &\Leftrightarrow 4-t^2 < t^2 \\ &\Leftrightarrow 2t^2 - 4 > 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 2 > 0 \end{aligned}$$

   Les racines du trinôme précédent sont $\pm\sqrt{2}$. Puisque $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement positif à l'extérieur des racines. Finalement : $\boxed{S =]\sqrt{2};\ 2[.}$

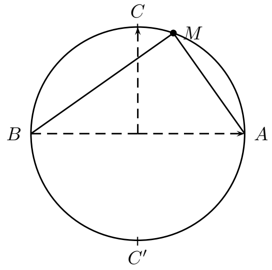
   Puisque la racine d'un nombre est strictement positive, $f'(t)$ est du signe du numérateur. Or $\sqrt{4-t^2} - t > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-t^2} > t \Leftrightarrow t \in]\sqrt{2};\ 2[$, d''après 2.(d). On en déduit le tableau de variations de f sur $]0;\ 2[$:

t	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

   (e) D'après le tableau de variations, f admet un maximum en $t_0 = \sqrt{2}$ égal à $2\sqrt{2}$. On en déduit : $f(t) \leq 2\sqrt{2}$. Enfin, $|z+1| = \sqrt{4-t^2}$ et $|z-1| = t$, avec $t \in [0;\ 2]$. Par conséquent, pour $t \in [0;\ 2]$, $|z+1|+|z-1| = f(t)$. Or $f(t) \leq 2\sqrt{2}$ pour $t \in [0;\ 2]$. Ainsi : $\boxed{|z+1|+|z-1| \leq 2\sqrt{2}.}$

   (f) D'après la question précédente,$|z+1|+|z-1| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t = |1-z| = \sqrt{2}$. On pose $z = a+ib$. Puisque $|z|^2 = 1$, nous avons : $a^2+b^2 = 1$. De plus $|1-z|^2 = 2$. Or $|1-z|^2 = |(1-a)+ib|^2 = (1-a)^2+b^2$. Ainsi, a et b vérifient les relations : $\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ (1-a)^2+b^2 = 2 \end{cases}$ D'après la première relation : $b^2 = 1-a^2$, donc $(1-a)^2+1-a^2 = 2$. Or $(1-a)^2 = 1-2a+a^2$. Ainsi : $(1-a)^2+1-a^2 = 2 \Leftrightarrow -2a+2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Donc $b^2 = 1-a^2 = 1$ ce qui donne $b = 1$ ou $b = -1$. Donc, si une telle inégalité est vérifiée, forcément : $z = \pm i$. Réciproquement, on vérifie que $|1+i|+|1-i| = 2\sqrt{2}$, ce qui prouve que l'égalité est bien vérifiée pour $z = i$ ou $z = -i$. Conclusion : $\boxed{\text{une telle égalité est vérifiée si et seulement si } z = i \text{ ou } z = -i.}$

3. On note A le point d'affixe 1, B le point d'affixe -1, C le point d'affixe i, C' le point d'affixe $-i$ et M le point d'affixe z. Puisque $|z| = 1$, M est situé sur le cercle trigonométrique. Géométriquement, $|z-1| = AM$ et $|z+1| = BM$. Ainsi : $|z-1|+|z+1| = AM+BM$. Les deux inégalités précédentes s'interprétent géométriquement comme ceci :



Lorsque M parcoure le cercle trigonométrique, nous avons toujours : $2 \leq AM+BM \leq 2\sqrt{2}$. De plus, la valeur minimale de cette longueur est atteinte lorsque M est en A ou en B (triangle ABM plat), et la valeur maximale de cette longueur est atteinte lorsque M est en C ou en C' (triangle ABM isocèle).

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir à la maison n° 4.

Problème

–Propriétés géométriques du triangle–

On considère un triangle équilatéral direct ABC tel que $AB = 2$ et M un point du plan. On note M_1 le symétrique de M par rapport à la droite (AB), M_2 le symétrique de M par rapport à la droite (BC) et M_3 le symétrique de M par rapport à la droite (AC).

1. On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
   (a) Faire une figure.
   (b) Que peut-on conjecturer sur les points M_1, M_2 et M_3 ?
2. On note dorénavant O le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OB}$ et on se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère maintenant M un point quelconque du plan. On note $(a; b)$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$.
   (a) Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des points : A, B, C, M_1.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de (BC) et montrer qu'une équation cartésienne de la perpendiculaire à (BC) passant par M est : $-x + \sqrt{3}y + a - \sqrt{3}b = 0$.
   (c) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de M sur BC, noté H_2, puis les coordonnées de M_2.
   (d) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit puis une équation cartésienne du cercle circonscrit (Rappel : dans un triangle équilatéral, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont égaux).
   (e) On donne les coordonnées de M_3 : $\left(\frac{-a+\sqrt{3}b-3}{2}; \frac{\sqrt{3}a+b+\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer $\det\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}\right)$. En déduire la propriété suivante : M_1, M_2, M_3 alignés $\Leftrightarrow$ M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

à rendre le Jeudi 18 Novembre

Lycée Pierre-Paul RIQUET **Année 2010-2011**
Lundi 8 Novembre Mathématiques TSI-1

Devoir à la maison n° 4.

Problème

–Propriétés géométriques du triangle–

On considère un triangle équilatéral direct ABC tel que $AB = 2$ et M un point du plan. On note M_1 le symétrique de M par rapport à la droite (AB), M_2 le symétrique de M par rapport à la droite (BC) et M_3 le symétrique de M par rapport à la droite (AC).

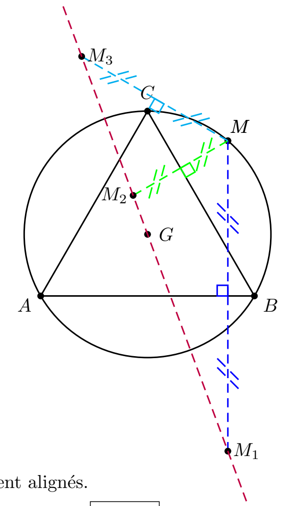
1. On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
   (a) Faire une figure.
   (b) Que peut-on conjecturer sur les points M_1, M_2 et M_3 ?
2. On note dorénavant O le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OB}$ et on se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère maintenant M un point quelconque du plan. On note $(a; b)$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$.
   (a) Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des points : A, B, C, M_1.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de (BC) et montrer qu'une équation cartésienne de la perpendiculaire à (BC) passant par M est : $-x + \sqrt{3}y + a - \sqrt{3}b = 0$.
   (c) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de M sur BC, noté H_2, puis les coordonnées de M_2.
   (d) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit puis une équation cartésienne du cercle circonscrit (Rappel : dans un triangle équilatéral, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont égaux).
   (e) On donne les coordonnées de M_3 : $\left(\frac{-a+\sqrt{3}b-3}{2}; \frac{\sqrt{3}a+b+\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer $\det\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}\right)$. En déduire la propriété suivante : M_1, M_2, M_3 alignés $\Leftrightarrow$ M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

à rendre le Jeudi 18 Novembre

CORRECTION DU DM 4.

Problème :

1.
   (a)



   (b) Les points M_1, M_2 et M_3 semblent alignés.

2. (a) • $\mathcal{R}$ étant orthonormé direct, nous avons : $\boxed{B(1,0)}$.

   • Le point O est l'origine du repère, donc $O(0;\ 0)$. De plus O est le milieu de $[AB]$, ce qui donne, notant $A(x_A;\ y_A)$, les relations : $\begin{cases} \frac{x_A+1}{2} = 0 \\ \frac{y_A+0}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -1 \\ y_A = 0 \end{cases}$. Ainsi : $\boxed{A(-1;\ 0)}$.

   • Le triangle ABC est équilatéral, donc C appartient à la médiatrice de $[AC]$, ce qui prouve que (OC) est perpendiculaire à (AB). Par conséquent : $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. Ainsi : $C(0;\ y_c)$. Par ailleurs, d'après le théorème de Pythagore, nous avons : $OC^2 + OA^2 = BC^2 = 4$, ABC étant équilatéral. Or, $OC^2 = y_C^2$ et $OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = 1$, ainsi $y_C^2 = 3 \Leftrightarrow y_C = \pm 1$. Enfin, ABC étant équilatéral **direct**, nous navons forcément : $y_c \geq 0$. Finalement : $\boxed{C(0;\ \sqrt{3})}$.

   • On note H_1 le projeté orthogonal de M sur (AB). Nous avons bien évidemment : $H_1(a;\ 0)$. Puisque H_1 est le milieu de $[MM_1]$, notant $M_1(x;\ y)$, nous avons les relations : $\frac{x+a}{2} = a \Leftrightarrow x = a$ et $\frac{y+b}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -b$. Ainsi : $\boxed{M_1(a;\ -b)}$.

   (b) • **Équation cartésienne de (BC) :**

   Pour $N(x;\ y)$, nous avons : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$. De plus, $(BC) = \{N \in \mathcal{P} / \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) = 0\}$. Or : $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -\sqrt{3} & y \end{vmatrix} = y + \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

   $\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (BC) \text{ est donc : } \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0.}$

   • **Équation cartésienne de la perpendiculaire à (BC) passant par** M **:**

   On note Δ cette droite. Pour $N(x;\ y)$, nous avons : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$. De plus, $\Delta = \{N \in \mathcal{P} / \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MN}) = 0\}$. Or : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = x - a - \sqrt{3}y + \sqrt{3}b$.

   $\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \Delta \text{ est donc : } -x + \sqrt{3}y + a - \sqrt{3}b = 0.}$

   (c) • Les coordonnées de H_2 sont solutions du système :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = \sqrt{3} & L_1 \\ -x + \sqrt{3}y = -a + \sqrt{3}b & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x - y = \sqrt{3} & L_1 \\ 4y = -\sqrt{3}a + 3b + \sqrt{3} & L_2 \leftarrow L_1 + \sqrt{3}L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3}a+3b+\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{-a+\sqrt{3}b+3}{4}. \end{cases}$$

   Ainsi : $\boxed{H_2\left(\frac{a-\sqrt{3}b+3}{4};\ \frac{-\sqrt{3}a+3b+\sqrt{3}}{4}\right)}$.

   • Puisque H_2 est le milieu de $[MM_2]$, les coordonnées $(x; y)$ de M_2 vérifient les relations :

$$\begin{cases} \frac{a-\sqrt{3}b+3}{4} = \frac{x+a}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}a+3b+\sqrt{3}}{4} = \frac{y+b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-a-\sqrt{3}b+3}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}a+b+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

   Ainsi : $\boxed{M_2\left(\frac{-a-\sqrt{3}b+3}{2};\ \frac{-\sqrt{3}a+b+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

   (d) On note $G(x_G;\ y_G)$ le centre su cercle circonscrit. D'après le Rappel, G est le centre de gravité du triangle ABC. Ainsi : $x_G = \frac{-1+1+0}{3} = 0$ et $y_G = \frac{0+\sqrt{3}+0}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Par conséquent $\boxed{G\left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$.

   Le rayon R du cercle circonscrit vérifie par ailleurs la relation : $R = GB = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Une équation cartésienne du cercle circonscrit est donc : $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\boxed{x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.}$

   (e) Nous avons $\overrightarrow{M_1M_2}\begin{pmatrix} \frac{-3a-\sqrt{3}b+3}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}a+3b+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. De même : $\overrightarrow{M_2M_3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}b-3 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}) &= \begin{vmatrix} \frac{-3a-\sqrt{3}b+3}{2} & \sqrt{3}b-3 \\ \frac{-\sqrt{3}a+3b+\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}a \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left((-3\sqrt{3}a^2 - 3ab + 3\sqrt{3}a) - (\sqrt{3}b-3)(-\sqrt{3}a + 3b + \sqrt{3})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-3\sqrt{3}a^2 - \cancel{3ab} + \cancel{3\sqrt{3}a} + \cancel{3ab} - 3\sqrt{3}b^2 - 3b - \cancel{3\sqrt{3}a} + 9b + 3\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(-3\sqrt{3}a^2 - 3\sqrt{3}b^2 + 6b + 3\sqrt{3}\right)} \end{aligned}$$

   Finalement : M_1, M_2, M_3 alignés

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3\sqrt{3}a^2 - 3\sqrt{3}b^2 + 6b + 3\sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}b^2 - 6b = 3\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{6}{3\sqrt{3}}b = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \boxed{a^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

   Par conséquent, d'après la question précédente :

   $\boxed{M_1, M_2, M_3 \text{ alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$

   Nous avons ainsi prouvé notre conjecture du 1. (ainsi que sa réciproque).

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 5.

Problème

–D'après EPITA 2005–

Dans ce problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$.
On considère dans ce contexte :
– Le cercle C de centre $\Omega(8;\ 0)$ et de rayon $R = 8$;
– La droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 2$;
– Une droite $\mathcal{D}_t$ passant par l'origine, d'équation $y = tx$ où t désigne une paramètre réel.
Dans la suite, on représentera sur une même figure les résultats obtenus au fil des questions. Cette figure fera apparaître seulement le demi-plan $x \geq 0$ et elle sera construite avec soin sur une feuille séparée en choisissant (approximativement) pour unité $1cm$.

1. **Introduction.**
   (a) Déterminer une équation cartésienne du cercle C.
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et $\mathcal{D}$.
   On notera A et B ces deux points en supposant que A est celui d'ordonnée positive.
   Représenter sur la figure le cercle C, la droite $\mathcal{D}$ et les points A et B.
   (c) Déterminer les coordonnées de $P(t)$ point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_t$.
   Déterminer les coordonnées de $Q(t)$ point d'intersection (distinct de O) de C et $\mathcal{D}_t$.
   (d) En déduire les coordonnées du milieu du segment de $[P(t)Q(t)]$.
   Déterminer les valeurs du paramètre t pour lesquelles ce milieu est égal à A ou B.

   On se propose maintenant d'étudier la courbe paramétrée : $\Gamma : t \to M(t)$ définie par :

$$x(t) = \frac{t^2+9}{t^2+1}; \quad y(t) = \frac{t(t^2+9)}{t^2+1}.$$

2. **Étude des variations des fonctions x et y.**
   (a) Comparer $x(-t)$ et $x(t)$, $y(-t)$ et $y(t)$.
   Qu'en déduit-on géométriquement pour la courbe Γ ?
   (b) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour les branches infinies de la courbe Γ ?
   (c) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et étudier le signe de ces fonctions. En déduire les coorodnnées des points U et V où la tangente est horizontale.
   On notera U et V ces deux points en supposant que U est celui d'ordonnée positive.
   En déduire les coordonnées du point I où la tangente est verticale.
   (d) Dresser un tableau de variations commun aux fonctions x et y pour $t \geq 0$.
3. **Construction de la fonction Γ.**
   (a) Représenter les points I, U, V, leurs tangentes et la branche infinie de Γ sur la figure.
   (b) Tracer avec soin la courbe représentative de Γ sur la figure.
4. **Conditions d'alignement de trois points de la courbe Γ.**
   On considère B le point de la courbe de paramètre 1, M le point de la courbe de paramètre t et N le point de la courbe de paramètre t'. On suppose B, M, N deux à deux distincts. Le but est de déterminer la valeur de t' pour laquelle B, M, N sont alignés.
   (a) Factoriser : $t^3 - 5t^2 + 9t - 5 = 0$, puis $x(t) - 5$ et $y(t) - 5$. En déduire B, M, N alignés si et seulement si : $(t+1)(t'^2 - 4t' + 5) = (t'+1)(t^2 - 4t + 5)$ (1).
   (b) En développant, puis factorisant par $t - t'$, montrer que (1) est équivalent à : $tt' + t + t' = 9$. En déduire une expression de t' en fonction de t lorsque B, M, N sont alignés.

à rendre le Lundi 6 Décembre

CORRECTION DU DM 5.

Problème :

1. **Introduction.**

(a) Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-8)^2+y^2=64$, soit $\boxed{x^2+y^2-16x=0}$.

(b) Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} x^2+y^2-16x=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2+y^2-32=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=28 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{28}=2\sqrt{7} \\ x=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-\sqrt{28}=-2\sqrt{7} \\ x=2 \end{cases}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont donc : $\boxed{A(2,2\sqrt{7})}$ et $\underline{B(2,-2\sqrt{7})}$.
(Voir la figure complète en fin de corrigé)

(c) $P(t)$ a pour coordonnées $\boxed{(2,2t)}$.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{C}$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} x^2+y^2-16x=0 \\ y=tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(tx)^2-16x=0 \\ y=tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x((1+t^2)x-16)=0 \\ y=tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=tx \end{cases} \text{ ou} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+t^2)x-16=0 \\ y=tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{1+t^2} \\ y=\frac{16t}{1+t^2} \end{cases} \text{car} 1+t^2\neq 0$$

Ainsi, $Q(t)$ a pour coordonnées $\underline{\left(\dfrac{16}{t^2+1},\dfrac{16t}{t^2+1}\right)}$.

(d) Le milieu de $P(t)$ et $Q(t)$ a pour coordonnées la demi-somme des coordonnées, soit $\underline{\left(\dfrac{t^2+9}{t^2+1},\dfrac{t(t^2+9)}{t^2+1}\right)}$.
Ce milieu est égal à A (resp. B) si et seulement si $P(t)=Q(t)=A$ (resp. B). Cela équivaut à $\boxed{t=\pm\sqrt{7}}$.

2. **Étude des variations des fonctions x et y.**

(a) La courbe Γ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Par parité de la fonction $t\mapsto t^2$, il est clair que $\boxed{x \text{ est paire et } y \text{ est impaire}}$.
On en déduit que $\boxed{\text{la courbe } \Gamma \text{ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses}}$. Par conséquent, on peut se contenter de l'étudier pour les valeurs positives de t.

(b) Quand $t\to+\infty$, on a $\underline{x(t)\to 1 \text{ et } y(t)\to+\infty}$.
On en déduit que $\boxed{\text{la courbe admet la droite } x=1 \text{ comme asymptote}}$.

(c) Par quotient, x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$x'(t) = \frac{2t(t^2+1)-(t^2+9)2t}{(t^2+1)^2} \quad \boxed{=\frac{-16t}{(t^2+1)^2}.}$$

$$y'(t) = \frac{3t^2(t^2+1)-(t^3+9t)2t}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4-6t^2+9}{(t^2+1)^2.} = \boxed{\frac{(t^2-3)^2}{(t^2+1)^2}} \text{ (identité remarquable)}$$

- Puisque $(t^2+1)^2)$ et $(t^2-3)^2$ sont toujours positifs, nous voyons que : $x'(t)$ est du signe de $-16t$, donc $\underline{\text{toujours négatif pour } t\geq 0}$, et $y'(t)$ est $\underline{\text{toujours positif}}$.
- Nous avons $y'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3}$. Or, pour ces deux valeurs de t, nous avons $x'(t)\neq 0$, donc la tangente est horizontale. Par conséquent, les points à tangente horizontale sont $\boxed{U(3,3\sqrt{3})}$ et $\boxed{V(3,-3\sqrt{3})}$.
Nous avons $x'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$. De plus $y'(0)\neq 0$, donc la tangente est verticale au point de paramètre 0, c' est à dire : $\boxed{I(9,0)}$.

(d)

t	0				$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$-4\sqrt{3}$	$+$	0
x	9	$\searrow$	3	$\searrow$	1
$y'(t)$	9	$+$	$\sqrt{3}$	$+$	1
y	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Construction de la courbe Γ.**

Voir la représentation des points I,U et V et de la courbe Γ en fin de corrigé.

4. **Conditions d'alignements de trois points de la courbe Γ.**

(a) Nous remarquons que 1 est solution évidente. Pour poursuivre la factorisation, nous effectuons une division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l} t^3 & -5t^2 & +9t & -5 & t \quad -1 \\ \cline{5-5} t^3 & -t^2 & & & t^2 \quad -4t \quad +5 \\ \cline{1-4} & -4t^2 & +9t & -5 & \\ & -4t^2 & +4t & & \\ \cline{2-4} & 0 & 5t & -5 & \\ & & 5t & -5 & \\ \cline{3-4} & & 0 & 0 & \end{array}$$

Ainsi : $\boxed{t^3-5t^2+9t-5=(t-1)(t^2-4t+5).}$

Nous avons :

$$x(t)-5 = \frac{t^2+9-5(t^2+1)}{t^2+1} = -4\frac{t^2-1}{t^2+1} = \boxed{-4\frac{(t-1)(t+1)}{t^2+1}}$$

$$y(t)-5 = \frac{t^3+9t-5(t^2+1)}{t^2+1} = -4\frac{t^3-5t^2+9t-5}{t^2+1} = \boxed{\frac{(t-1)(t^2-4t+5)}{t^2+1}}$$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x(t)-5 \\ y(t)-5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} x(t')-5 \\ y(t')-5 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

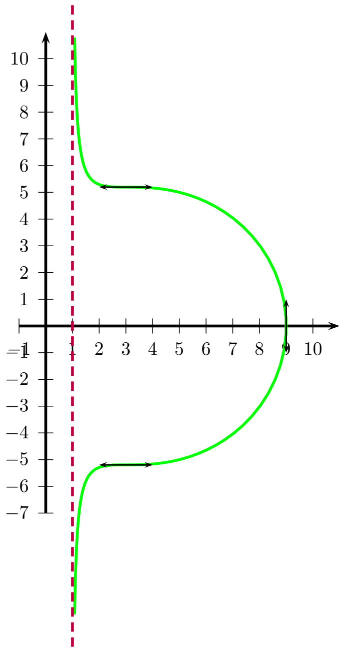
$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN})=0 &\Leftrightarrow (x(t)-5)(y(t')-5)-(x(t')-5)(y(t)-5)=0 \\ &\Leftrightarrow (x(t)-5)(y(t')-5)=(x(t')-5)(y(t)-5) \\ &\Leftrightarrow \frac{-4(t-1)(t+1)(t'-1)(t'^2-4t'+5)}{(t^2+1)(t'^2+1)} = \frac{-4(t'-1)(t'+1)(t-1)(t^2-4t+5)}{(t'^2+1)(t^2+1)} \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t'-1)(t+1)(t'^2-4t'+5)=(t-1)(t'+1)(t'+1)(t^2-4t+5) \\ &\Leftrightarrow (t+1)(t'^2-4t'+5)=(t'+1)(t^2-4t+5) \text{ car } B,M,N \text{ deux à deux distincts} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{B, M, N \text{ alignés si et seulement si } (t+1)(t'^2-4t'+5) = (t'+1)(t^2-4t+5).}$

(b) D'après précédemment :

$$\begin{aligned} B, M, N \text{ alignés} &\Leftrightarrow (t+1)(t'^2-4t'+5) = (t'+1)(t^2-4t+5) \\ &\Leftrightarrow tt'^2 - \cancel{4tt'} + 5t + t'^2 - 4t' + \cancel{5} = t't^2 - \cancel{4t't} + 5t' + t^2 - 4t + \cancel{5} \\ &\Leftrightarrow tt'^2 - t't^2 + 5(t-t') + t'^2 - t^2 - 4(t'-t) = 0 \\ &\Leftrightarrow tt'(t'-t) + (t'-t)(t'+t) - 9(t'-t) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t'-t)(tt'+t+t'-9) = 0 \\ &\leftrightarrow tt'+t+t'-9 = 0 \text{ car } B, M, N \text{ deux à deux distincts} \\ &\Leftrightarrow \boxed{tt'+t+t' = 9.} \end{aligned}$$

En conclusion, lorsque B, M, N sont alignés, nous avons : $t'(1+t) = 9-t$ soit $\boxed{t' = \dfrac{9-t}{1+t}}$, car $t+1 \neq 0$ (sinon $t = -1$ et $9-t = 0$ ce qui est impossible).



⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n^{o} 6.

Problème

–Autour d'une équation différentielle–

La but du problème est de résoudre l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad (x^2-1)y' - xy = (x^2-1)g(x),$$

pour certaines valeurs de g.

1. **Étude de (E) avec $\mathbf{g(x) = x}$.**
   On pose : $I_1 =]-\infty;\ -1[$, $I_2 =]-1;\ 1[$ et $I_3 =]1;\ +\infty[$.
   (a) Résoudre (E) sur I_3.
   (b) En vous aidant des calculs précédents, résoudre (E) sur I_1.
   (c) Résoudre (E) sur I_2.

2. **Étude de la fonction réciproque du cosinus hyperbolique.**
   (a) Montrer que la fonction ch induit une bijection de $[0;\ +\infty[$ sur $[1;\ +\infty[$. On note argch l'application réciproque associée.
   (b) Donner le domaine de définition de argch et justifier que argch est de classe C^1 sur $]1;\ +\infty[$. Montrer que pour tout $x \in]1;\ +\infty[$, $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
   (c) Pour $x > 1$ fixé, résoudre l'équation d'inconnue $u > 0$: $e^{2u} - 2xe^u + 1 = 0$. En déduire :
   $$\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$
   (d) Calculer : $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. **Étude d'une suite d'intégrales.**
   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 2$, on pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$ et $J_n(x) = \displaystyle\int_2^x t^n\sqrt{t^2-1}\,dt$.
   (a) En vous aidant du 2., calculer $I_0(x)$, puis calculer $I_1(x)$.
   (b) Montrer que $I_{n+2}(x) - I_n(x) = J_n(x)$.
   (c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
   $$I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{x^2-1} - 2^{n+1}\sqrt{3} - (n+1)J_n.$$
   (d) Déduire des questions précédentes, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n, puis calculer $I_2(x)$ et $I_3(x)$.

4. **Résolution de (E) avec $\mathbf{g(x) = x^3 - 2x^2}$.**
   On se place désormais sur $I = [2;\ +\infty[$.
   (a) En utilisant la variation de la constante, exprimer simplement une solution particulière de l'équation différentielle : $(x^2-1)y' - xy = (x^2-1)x^n$ sur I en fonction de $I_n(x)$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I, avec $g(x) = x^3 - 2x^2$.

à rendre le Lundi 3 Janvier

CORRECTION DU DM 6.

Problème :

1. **Étude de (E) avec g(x) = x.**

(a) Pour $x \in I_3$, $(x^2-1)y' - xy = (x^2-1)x \Leftrightarrow y' - \dfrac{x}{x^2-1}y = x$ car $x^2-1 \neq 0$.

- **Équation homogène :** $(\mathrm{E_H}) : y' - \dfrac{x}{x^3-1}y = 0$: $S_H = \{Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}$, avec A primitive sur I_3 de $-\dfrac{x}{x^2-1} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = x^2-1$. Nous prenons par exemple : $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-1) = -\ln(\sqrt{x^2-1})$. Ainsi : $S_H = \{C\sqrt{x^2-1}, C \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière :** On utilise la variation de la constante : on cherche y_P de la forme : $y_P(x) = C(x)\sqrt{x^2-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}
y_P \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow y_P'(x) - \tfrac{x}{x^2-1}y_P(x) = x\\
&\Leftrightarrow C'(x)\sqrt{x^2-1} + C(x)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{x^2-1}C(x)\sqrt{x^2-1} = x\\
&\Leftrightarrow C'(x)\sqrt{x^2-1} + \cancel{C(x)\frac{x}{x^2-1}} - \cancel{C(x)\frac{x}{x^2-1}} = x\\
&\Leftrightarrow C'(x) = \tfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ car } \sqrt{x^2-1} \neq 0 \text{ pour } x \in I_3
\end{aligned}$$

Ainsi : $C'(x) = \frac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, avec $u(x) = x^2-1$. Nous nprenons donc par exemple : $C(x) = \sqrt{x^2-1}$, ce qui donne : $y_P(x) = C(x)\sqrt{x^2-1} = x^2-1$.

- **Synthèse :** $\boxed{S = \left\{C\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1, C \in \mathbb{R}\right\}.}$

(b) Nous reprenons les calculs précédents, en observant les changements sur I_1 :

- **Équation homogène :** Nous avons toujours, $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ car $x^2-1>0$ pour $x \in I_1$, ce qui donne : $S_H = \{C\sqrt{x^2-1}, C \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière :** De même que précédemment : $y_P(x) = x^2-1$ convient.
- **synthèse :** $\boxed{S = \left\{C\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1, C \in \mathbb{R}\right\}.}$

(c) Nous reprenons à nouveau les calculs précédents, en observant les changements sur I_2 :

- **Équation homogène :** Ici, $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ car $x^2 - 1x0$ pour $x \in I_2$, ce qui donne : $S_H = \{C\sqrt{1-x^2}, C \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière :** Ici, pour $y_P(x) = C(x)\sqrt{1-x^2}$, nous avons : alors la relation : $C'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, donc $C(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Ainsi : $y_P(x) = C(x)\sqrt{1-x^2} = -(1-x^2) = x^2-1$.
- **synthèse :** $\boxed{S = \left\{C\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1, C \in \mathbb{R}\right\}.}$

2. **Étude de la fonction réciproque du cosinus hyperbolique.**

(a) $\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ch est continue sur } [0;\ +\infty[;\\ \bullet \text{ch est strictement croissante sur } [0;\ +\infty[\\ \bullet \text{ch}(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty\end{array}\right\}$ D'après le théorème de la bijection,

$\boxed{\text{ch induit une bijection de } [0;\ +\infty[\text{ sur } [1;\ +\infty[.}$

(b) D'après précédemment, argch est définie sur $[1;\ +\infty[$. De plus : ch est de classe C^1 sur $]0;\ +\infty[$, et $\forall x \in]0;\ +\infty[$, $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x) \neq 0$. Par conséquent, $\boxed{\text{argch est de classe } C^1 \text{ sur ch}(]0;\ +\infty[=]1;\ +\infty[,}$ et :

$\forall x \in]1;\ +\infty[, \text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\text{sh(argch(x))}}$. Or : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, donc : $\text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x) - 1$. Ainsi : $\text{sh}^2(\text{argch}(x)) = \text{ch}^2(\text{argch}(x)) - 1 = x^2 - 1$. Finalement : $\text{sh}(\text{argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$, car $x^2-1>0$ pour $x \in]1;\ +\infty[$. Nous obtenons au final : $\boxed{\forall x \in]1;\ +\infty[, \text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$

(c) On pose : $X = e^u$. L'équation devient : $X^2 - 2xX + 1 = 0$. Il s'agit d'un trinôme de discriminant : $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2-1) > 0$ car $x > 1$. Nous avons donc deux solutions réelles distinctes : $X_1 = x - \sqrt{x^2-1}$, $X_2 = x + \sqrt{x^2-1}$. Ainsi : $e^{2u} - 2xe^u + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e^u = x + \sqrt{x^2-u} \text{ ou } e^u = x - \sqrt{x^2-1}\\
&\Leftrightarrow e^u = x + \sqrt{x^2-1} \text{ car } x - \sqrt{x^2-1} < 0\\
&\Leftrightarrow \boxed{u = \ln(x + \sqrt{x^2-1}.}
\end{aligned}$$

Pour obtenir une expression de argch, on résout l'équation d'inconnue u : $\text{ch}(u) = x$ pour $u > 0$ et $x > 1$. Or :

$$\begin{aligned}
\text{ch}(u) = x &\Leftrightarrow \frac{e^u + e^{-u}}{2} = x\\
&\Leftrightarrow e^u + e^{-u} = 2x\\
&\Leftrightarrow e^u(e^u + e^{-u}) = 2xe^u \text{ car } e^u \neq 0\\
&\Leftrightarrow e^{2u} + 1 = 2xe^u \text{ (propriétés algébriques de l'exponentielle)}\\
&\Leftrightarrow e^{2u} - 2xe^u + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow u = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).}$

(d) D'après les questions précédentes, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $[2;\ 3]$ est $\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\ln(x + \sqrt{x^2-1})\right]_2^3 = \ln(3+\sqrt{8}) - \ln(2+\sqrt{3}) = \boxed{\ln\left(\frac{3+\sqrt{8}}{2+\sqrt{3}}\right).}$

3. **Étude d'une suite d'intégrales.**

(a)
- De même que précédemment : $\boxed{I_0(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3}).}$
- Une primitive sur $[2;\ x]$ de $\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est $\sqrt{t^2-1}$. Ainsi : $I_1(x) = \left[\sqrt{t^2-1}\right]_2^x = \boxed{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{3}.}$

(b)
$$\begin{aligned}
I_{n+2}(x) - I_n(x) &= \int_2^x \frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt - \int_2^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\\
&= \int_2^x \left(\frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{t^n}{\sqrt{t^2-1}}\right)dt\\
&= \int_2^x t^n\frac{t^2-1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\\
&= \int_2^x t^n\sqrt{t^2-1}\,dt\\
&= \boxed{J_n(x).}
\end{aligned}$$

(c) $I_{n+2}(x) = \displaystyle\int_2^x \underbrace{t^{n+1}}_{u}\underbrace{\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}_{v'}\,dt$. Posons : $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \sqrt{t^2-1}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[2;\ x]$ et : $\forall t \in [2;\ x], u'(t) = (n+1)t^n$. Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I_{n+2}(x) &= \left[t^{n+1}\sqrt{t^2-1}\right]_2^x - \int_2^x (n+1)t^n\sqrt{t^2-1}\,dt\\
&= x^{n+1}\sqrt{x^2-1} - 2^{n+1}\sqrt{3} - (n+1)\int_2^x t^n\sqrt{t^2-1}\,dt\\
&= \boxed{x^{n+1}\sqrt{x^2-1} - 2^{n+1}\sqrt{3} - (n+1)J_n.}
\end{aligned}$$

(d) Des deux questions précédentes, nous déduisons : $I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{x^2-1} - 2^{n+1}\sqrt{3} - (n+1)[I_{n+2}(x) - I_n(x)]$. Ainsi : $(n+2)I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{x^2-1} - 2^{n+1}\sqrt{3} + (n+1)I_n(x)$, donc :

$$\boxed{I_{n+2}(x) = \frac{1}{n+2}\left(x^{n+1}\sqrt{x^2-1} - 2^{n+1}\sqrt{3} + (n+1)I_n(x)\right).}$$

En particulier :

- Pour $n=0$, $I_2(x) = \boxed{\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{3} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3});}$
- pour $n=1$, $I_3(x) = \frac{1}{3}(x^2\sqrt{x^2-1} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{3}) = \boxed{\sqrt{x^2-1}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}\right) - 2\sqrt{3}.}$

4. **Résolution de (E) avec $\mathbf{g(x) = x^3 - 2x^2}$.**
Nous remarquons que pour $x \in I, (x^2-1)y' - xy = (x^2-1)x^n \Leftrightarrow y' - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}y = x^n$.

(a) L'équation homogène a déjà été déterminée en **1.**. On cherche une solution particulière à l'aide de la variation de la constante : $y_P(x) = C(x)\sqrt{x^2-1}$. Ainsi, des calculs similaires au **1.**, montrent que y_P solution de (E) $\Leftrightarrow C'(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}}$. La fonction C est donc une primitive quelconque de $\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}}$ sur I. Puisque I_n est la primitive de $\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}}$ qui s'annule pour $x=2$, nous pouvons prendre par exemple : $C(x) = I_n(x)$. Une solution particulière est donc : $\boxed{y_P(x) = I_n(x)\sqrt{x^2-1}.}$

(b) En utilisant le principe de superposition, une solution particulière de l'équation proposée est donc $y_P(x) = \sqrt{x^2-1}(I_3(x) - 2I_2(x))$. D'après **2.**, $I_3(x) - 2I_2(x) = \sqrt{x^2-1}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}\right) - 2\sqrt{3} - (x\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{3} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3}) = \frac{x^2-3x+2}{3}\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + \ln(2+\sqrt{3})$. Ainsi : $y_P(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)(x^2-3x+2) - \sqrt{x^2-1}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + \ln(2+\sqrt{3})\sqrt{x^2-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
S &= \left\{\underbrace{(C+\ln(2+\sqrt{3})}_{A})\sqrt{x^2-1} + \tfrac{1}{3}(x^2-1)(x^-3x+2) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}, C \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\left(A\sqrt{x^2-1} + \tfrac{1}{3}(x-1)(x+1)\underbrace{(x-1)(x-2)}_{x^2-3x+2} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)\sqrt{x^2-1}, A \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \boxed{\left\{\left(A - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{3}(x-1)^2(x+1)(x-2), A \in \mathbb{R}\right\}.}
\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n° 7.

Exercice

–

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, on considère les plans Q_1 et Q_2 d'équations :

$$Q_1 \quad : \quad x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad Q_2 \quad : \quad x - y + 2z - 2 = 0$$

1. Montrer que $Q_1 \cap Q_2$ est une droite D dont on précisera une représentation paramètrique.
2. Pour tout réel m, on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation

$$(x + 2y - z + 1) + m(x - y + 2z - 2) = 0.$$

   Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m est un plan.
3. Que dire de la droite D vis-à-vis du plan P_m ? Justifier proprement la réponse.
4. Parmi les plans P_m, en existe-t-il un qui soit perpendiculaire à Q_1 ? Si oui, lequel ?
5. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Vérifier que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
6. Pour tout réel m, calculer la distance d_m du point Ω au plan P_m.
7. Existe-t-il des plans P_m qui soient tangents à la sphère S ? Si oui, combien ?
8. Justifier que $P_1 \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre ω et le rayon r.

à rendre le Lundi 17 Janvier

Lycée Pierre-Paul RIQUET **Année 2010-2011**
Jeudi 6 Janvier Mathématiques TSI-1

Devoir à la maison n° 7.

Exercice

–

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, on considère les plans Q_1 et Q_2 d'équations :

$$Q_1 \quad : \quad x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad Q_2 \quad : \quad x - y + 2z - 2 = 0$$

1. Montrer que $Q_1 \cap Q_2$ est une droite D dont on précisera une représentation paramètrique.
2. Pour tout réel m, on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation

$$(x + 2y - z + 1) + m(x - y + 2z - 2) = 0.$$

   Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m est un plan.
3. Que dire de la droite D vis-à-vis du plan P_m ? Justifier proprement la réponse.
4. Parmi les plans P_m, en existe-t-il un qui soit perpendiculaire à Q_1 ? Si oui, lequel ?
5. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Vérifier que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
6. Pour tout réel m, calculer la distance d_m du point Ω au plan P_m.
7. Existe-t-il des plans P_m qui soient tangents à la sphère S ? Si oui, combien ?
8. Justifier que $P_1 \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre ω et le rayon r.

à rendre le Lundi 17 Janvier

CORRECTION DU DM 7.

Exercice :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{n}_1(1,2,-1)$ et $\overrightarrow{n}_2(1,-1,2)$ sont des vecteurs orthogonaux à Q_1 et Q_2.
Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (3,-3,-3)$ est non nul donc $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ sont non colinéaires. Ainsi, les plans Q_1 et Q_2 sont non parallèles. Ils se coupent donc en une droite D dirigée par $\overrightarrow{u}$ passant un point commun à Q_1 et Q_2, ici $A(0,0,1)$ convient.
$$\boxed{D \quad : \quad \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -3\lambda + 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$
2. On a
$$(x+2y-z+1) + m(x-y+2z-2) = 0 \Longleftrightarrow (1+m)x + (2-m)y + (2m-1)z + 1 - 2m = 0$$
Pour tout m, le vecteur $\overrightarrow{u}_m(1+m, 2-m, 2m-1)$ est non nul, donc
$\boxed{P_m \text{ est un plan orthogonal à } \overrightarrow{u}_m(1+m,2-m,2m-1) \text{ passant par } A(0,0,1)}$
3. Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de $D = Q_1 \cap Q_2$, on a $x_0 + 2y_0 - z_0 + 1 = 0$ et $x_0 + y_0 + 2z_0 - 2 = 0$. On a donc $(x_0 + 2y_0 - z_0 + 1) + m(x_0 + y_0 + 2z_0 - 2) = 0$, le point M appartient à P_m, d'où $\boxed{D \subset P_m}$
4. Pour que P_m soit perpendiculaire à Q_1, il faut et il suffit que $\overrightarrow{u}_m$ et $\overrightarrow{n_1}$ soient orthogonaux, soit
$$\overrightarrow{u}_m \cdot \overrightarrow{n_1} = (1+m) + (2-m)2 + (2m-1)(-1) = 6 - 3m = 0.$$
Solution unique $m = 2$. $\boxed{\text{Le plan } P_m \text{ est perpendiculaire à } Q_1 \text{ pour une seule valeur : } m = 2}$
5. On a
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+1)^2 + (y-2)^2 + z = 2^2.$$
L'ensemble des solutions de cette équation est un ensemble non réduit à un point ou au vide.
$\boxed{\mathcal{S} \text{ est une sphère de centre } \Omega(-1,2,0) \text{ et de rayon } R = 2}$
6. En utilisant l'équation cartésienne de P_m, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M(x,y,z), P_m) &= \frac{|(1+m)x + (2-m)y + (2m-1)z + 1 - 2m|}{\sqrt{(1+m)^2 + (2-m)^2 + (2m-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{|(1+m)x + (2-m)y + (2m-1)z + 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 - m + 1}}. \end{aligned}$$
On en déduit
$$\boxed{d_m = \mathrm{d}(\Omega, P_m) = \frac{|4-5m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2 - m + 1}}}$$
7. Le plan P_m est tangent à la sphère $\mathcal{S}$, si et seulement si $d_m = \mathrm{d}(\Omega, P_m) = R$, soit
$$\frac{(4-5m)^2}{6(m^2 - m + 1)} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 - 16m - 8 = 0.$$
Les racines de cette équation sont $m = 8 \pm 6\sqrt{2}$. On conclut que
$\boxed{\text{Le plan } P_m \text{ est tangent à la sphère } \mathcal{S} \text{ seulement pour deux valeurs : } m = 8 \pm 6\sqrt{2}}$

8. On a $d_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} < 2$. L'ensemble $\mathcal{S} \cap P_1$ est donc un cercle de rayon $r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{23}{6}}$. Le centre ω de ce cercle est un point de P_1 et il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\Omega\omega} = \lambda \overrightarrow{u}_1(2,1,1)$. On a donc
$$\begin{cases} x_\omega = -1 + 2\lambda \\ y_\omega = 2 + \lambda \\ z_\omega = \lambda \end{cases} \qquad \text{et} \quad 2x_\omega + y_\omega + z_\omega - 1 = 0.$$
On en déduit $\lambda = \frac{1}{6}$ et $\omega(-\frac{2}{3}, \frac{13}{6}, \frac{1}{6})$. On conclut
$\boxed{P_1 \cap \mathcal{S} \text{ est un cercle du plan } P_1 \text{ de centre } \omega(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{13}{6}, \tfrac{1}{6}). \text{ et de rayon } r = \sqrt{\tfrac{23}{6}}}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n° 8.

Exercice

–Une technique pour calculer des sommes–

Pour $x \in]0;\ 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Donner une expression simple de $f(x)$ en fonction de n et x.
2. Montrer que $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k$.
3. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
4. **application.** En vous aidant des questions précédentes, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$. Montrer que cette expression admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

Problème

–valeurs approchées de $\sqrt{2}$–

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}. \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1 et v_1, puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(u_n - v_n)^2}{u_n + v_n}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq u_n$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
   (d) En raisonnant par récurrence, déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{1}{3}$.
   (e) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note dans la suite l leur limite commune.
   (f) Montrer que $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$, puis $u_n v_n = 2$ pour tout entier naturel n.
   (g) En déduire $l = \sqrt{2}$.
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - l \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{1}{3}$.
   (b) Pour $\varepsilon > 0$, on dit que u_n est une valeur approchée de l à ε près lorsque l'inégalité : $|u_n - l| \leq \varepsilon$ est vérifiée. Proposer une valeur de n_0 pour laquelle u_{n_0} est une valeur approché de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près et calculer la valeur de u_{n_0} correspondante.

à rendre le Lundi 14 Février

Lycée Pierre-Paul RIQUET **Année 2010-2011**
Lundi 14 Février Mathématiques TSI-1

CORRECTION DU DM 8.

Exercice :

1. La suite de terme général x^k est une suite géométrique de premier terme 1 de raison $x \neq 1$ ($x \in]0;\ 1[$). Ainsi :
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1.\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \boxed{\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.}$$
2. Pour $k \in [\![0;\ ]\!]$, la fonction f_k définie sur $]0;\ 1[$ par $f_k(x) = x^k$ est dérivable sur $]0;\ 1[$ et $\forall x \in]0;\ 1[$, $(f_k)'(x) = kx^{k-1}$. Par linéarité de la dérivation, f est dérivable sur $]0;\ 1[$ et $\forall x \in]0;\ 1[$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} (f_k)'(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k} \quad \text{(glissement d'indice).} \end{aligned}$$
3. La fonction définie sur $]0;\ 1[$ par $f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ est dérivable sur $]0;\ 1[$ par opérations élémentaires (quotient) et, $\forall x \in]0;\ 1[$, $f'(x) = \dfrac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$. Finalement, d'après la question 2, nous en déduisons l'égalité :
$$\forall x \in]0;\ 1[, \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.}$$
4. L'égalité précédente pour $x = \frac{1}{2} \in]0;\ 1[$ et au rang suivant donne :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} = \frac{\frac{(n+1)}{2^{n+2}} - \frac{(n+2)}{2^{n+1}} + 1}{\frac{1}{4}} = \frac{(n+1)}{2^n} - \frac{(n+2)}{2^{n-1}} + 4.$$
D'autre part, par linéarité, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$ (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$).

Nous déduisons des deux égalités précédentes la relation :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + 2 - \frac{1}{2^n} = \frac{(n+1)}{2^n} - \frac{(n+2)}{2^{n-1}} + 4 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{(n+2)}{2^n} - \frac{(n+2)}{2^{n-1}} + 2.$$
En simplifiant davantage ($2^n = 22^{n-1}$), nous obtenons au final :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.}$$
Pour finir, par produit, $\dfrac{n+2}{2^n} \sim \dfrac{n}{2^n}$. Or $n = o(2^n)$ (croissances comparées), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Par conséquent, par somme : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2.}$

Problème :

1. (a) Nous avons : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $v_1 = \frac{4}{3}$.

   Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ »est vraie pour tout entier naturel n.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

     Nous avons : $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $u_n + v_n > 0$ et en multipliant par $\frac{1}{2}$, $u_{n+1} > 0$.
     De même, $v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ avec $u_n + v_n > 0$ et $u_nv_n > 0$, donc $v_{n+1} > 0$. Ceci prouve l'hérédité.

   Par récurrence, pour tout entier naturel n $\boxed{u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.}$

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \\ &= \frac{(u_n+v_n)^2 - 2u_nv_n}{2(u_n+v_n)} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\frac{(u_n-v_n)^2}{u_n+v_n}.} \end{aligned}$$
2. (a) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(u_n-v_n)^2}{u_n+v_n}$. Puisque $u_n > 0$ et $v_n > 0$, nous avons $u_n + v_n > 0$. Or, un carré est toujours positif, donc : $u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout entier naturel n, nous en déduisons : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq u_n.}$

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Or $v_n \leq v_n$ d'après précédemment, donc $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n+u_n}{2} = u_n$. Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

   Puisque $v_n > 0$, alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2u_n}{u_n+v_n}$. De plus $v_n \leq u_n$, donc $2u_n = u_n + u_n \geq u_n + v_n$ et $\dfrac{2u_n}{u_n+v_n} \geq 1$.
   Par conséquent $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

   (c) D'après précédemment, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(u_n-v_n)^2}{u_n+v_n}$. Or : $u_n - v_n \leq u_n \leq u_n + v_n$ puisque $v_n > 0$.
   Par conséquent $\dfrac{u_n-v_n}{u_n+v_n} < 1$, d'où en multipliant par $\frac{1}{2}(u_n - v_n)$:
   $$\boxed{u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n).}$$
   Enfin, d'après 2.(a), nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq u_n$ donc $v_{n+1} \leq u_{n+1}$ et $\boxed{0 \leq u_{n+1} - v_{n+1}.}$

   (d) Montrons par récurence que $\mathcal{P}(n)$ « $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{3}$ »est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - **Initialisation.** pour $n = 1$, $u_1 - v_1 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \leq (\frac{1}{2})^1\frac{1}{3}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{3}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3}$.
     Nous avons, d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$. Par hypothèse de récurrence, $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{3}$. Ainsi, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{3}}$. Ceci prouve l'hérédité.

   Ainsi, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{3}$.
   Enfin, l'inégalité $0 \leq u_n - v_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après 2.(a), d'où :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{0 \leq u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{3}.}$$

(e) • D'après 2.(b), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ;

• Par opérations élémentaires, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{3}=0$. Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite de terme général u_n-v_n converge vers 0.

BILAN : Ces deux suites sont adjacentes et convergent par conséquent vers une même limite, notée l.

(f) Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous avons : $u_{n+1}v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}=u_nv_n$. La suite de terme général u_nv_n est donc constante. Ainsi $\boxed{u_nv_n=u_0v_0=2.}$

(g) Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=l^2$. En passant à la limite dans l'égalité précédente nous obtenons $l^2=2\Leftrightarrow l=\sqrt{2}$ ou $l=-\sqrt{2}$. De plus, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$, par passage à la limite, nous avons $l\geq 0$. Finalement $\boxed{l=\sqrt{2}.}$

3. (a) Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît vers l, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $l\geq v_n$, donc $\boxed{u_n-l\leq u_n-v_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{3}.}$.

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{3}\leq 10^{-6} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 3.10^{-6}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\leq\ln\left(3.10^{-6}\right)\quad\text{(la fonction logarithme est strictement croissante)}\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right)\leq\ln(3)-6\ln(10)\\
&\Leftrightarrow -n\ln(2)\leq\ln(3)-6\ln(10)\\
&\Leftrightarrow n\geq\underbrace{\frac{6\ln(10)-\ln(3)}{\ln(2)}}_{N}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n\geq N\approx 18,34$, nous avons : $|u_n-l|=u_n-l\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{3}\leq 10^{-6}$. Finalement, pour $\boxed{n_0=19,\ u_{n_0}\text{ est une valeur approchée de }\sqrt{2}\text{ à }10^{-6}\text{ près.}}$

Pour obtenir la valeur approchée u_{19}, on peut par exemple créer la procédure MAPLE™ suivante, que l'on appellera suite :

```
[>  suite:=proc(n)                                  nom du programme et arguments
[>  local k;                                        variables locales
[>  u[0]:=1;v[0]:=2;                                initialisation
[>  for k from 1 to n do;                           boucle « for »
[>  u[k]:=(u[k-1]+v[k-1])/2:                        définition de u_k
[>  v[k]:=2*u[k-1]*v[k-1]/(u[k-1]+v[k-1]):          définition de v_k
[>  od:                                             fin de boucle
[>  u[n];                                           affiche la valeur u_n
[>  end:                                            fin du programme
```

Une valeur approchée de u_{19} s'obtient donc en saisissant :

`[> evalf(suite(19));`

ce qui donne : `1.414213562`

Pour finir on remarque qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ donnée par MAPLE™ est exactement la même jusqu'à cette décimale. Ceci suggère qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ est donnée par un terme plus petit que u_{19}, bref que la majoration $u_n-v_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{3}$ est vraie, mais n'est pas assez « fine ».

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n° 9.

Exercice

–Équivalent d'une suite explicite–

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$.

1. Montrer que : $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.
2. Montrer que : $\sqrt{\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n\ln(n)}$.
3. En déduire un équivalent simple de (u_n), puis la limite de (u_n).

Problème

–Étude d'une suite définie par une relation de récurrence–

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+(n+1)u_n^2}}$.

1. **Généralités.**
   (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   (c) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) converge.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. **Équivalent de $(\mathbf{u_n})$.**

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = n+1$. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$.
   (b) En vous aidant de la question précédente, montrer que $u_n^2 = \dfrac{2}{n^2+n+2}$.
   (c) En déduire un équivalent simple de (u_n).
3. **Développement de $(\mathbf{u_n})$.**

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = u_n - \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n^2 - \dfrac{2}{n^2} = -\dfrac{2(n+2)}{n^2(n^2+n+1)}$.
   (b) Montrer que $u_n + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \sim \dfrac{2\sqrt{2}}{n}$.
   (c) En déduire : $R_n \sim \dfrac{-1}{\sqrt{2}n^2}$.
   (d) Déterminer alors les réels a et b tels que : $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

à rendre le Jeudi 18 Mars

CORRECTION DU DM 9.

Exercice :

1. On étudie la limite du quotient $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$. Pour ceci, nous remarquons que $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$. Par opérations élémentaires (quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$. Ceci prouve : $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

2. D'après précédemment, $\sqrt{\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}} = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1\right)}_{=v_n\to 0}}$. Par conséquent, $\sqrt{\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}} - 1 = \sqrt{1+v_n} - 1 \sim \dfrac{1}{2}v_n$ puisque (v_n) admet 0 pour limite. D'autre part : $v_n = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$. Nous remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Par produit $\frac{1}{2}v_n \sim \frac{1}{2n\ln(n)}$. Enfin, par transitivité :

$$\boxed{\sqrt{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}} - 1 \sim \frac{1}{2n\ln(n)}.}$$

3. On écrit $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} = \sqrt{\ln(n)}\left(\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{\sqrt{\ln(n)}} - \frac{\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{\ln(n)}}\right) = \sqrt{\ln(n)}\left(\sqrt{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}} - 1\right)$. Par conséquent, par produit et d'après la question précédente : $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} \sim \frac{\sqrt{\ln(n)}}{2n\ln(n)}$, c'est à dire : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n\sqrt{\ln(n)}}.}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n\sqrt{\ln(n)}} = 0$, nous avons : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Problème :

1. (a) $\boxed{u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{\sqrt{7}}{7}.}$

   (b) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ « $u_n > 0$ »est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $u_n > 0$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} > 0$.

     Nous avons : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+(n+1)u_n^2}}$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$. De plus $\sqrt{1+(n+1)u_n^2} \geq \underbrace{\sqrt{1}}_{=1} > 0$ (fonction racine carrée strictement croissante). Ainsi, par quotient, $u_{n+1} > 0$. Ceci prouve l'hérédité.

   Par récurrence, pour tout entier naturel, n $\boxed{u_n > 0.}$

   (c) Puisque $u_n > 0$, $u_{n+1} - u_n \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. On estime donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(n+1)u_n^2}}$. Or, nous avons déjà remarqué que $\sqrt{1+(n+1)u_n^2} \geq 1$. Par passage à l'inverse (fonction strictement déroissante sur $\mathbb{R}_+*$), $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

   (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente. On note l sa limite.

   (d) Nous avons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{1+nu_{n-1}^2}}$. Or, $\sqrt{1+nu_{n-1}^2} \geq \underbrace{\sqrt{nu_{n-1}^2}}_{=u_{n-1}\sqrt{n}}$. Par passage à l'inverse, $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Nous avons donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par passage à la limite $0 \leq l \leq 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

2. (a) Nous avons

$$
\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \\
&= \frac{1+(n+1)u_n^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} \\
&= \frac{\cancel{1}}{\cancel{u_n^2}} + (n+1) - \frac{\cancel{1}}{\cancel{u_n^2}} \\
&\boxed{= n+1.}
\end{aligned}
$$

   Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{(glissement d'indice)} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{(somme usuelle).}
\end{aligned}
$$

   (b) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \frac{1}{u_n^2} - 1$. Nous déduisons donc de la question précédente l'égalité :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u_n^2} - 1 = \frac{n(n+1)}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{u_n^2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{u_n^2} = \frac{n^2+n+2}{2} \\
&\Leftrightarrow \boxed{u_n^2 = \frac{2}{n^2+n+2}.} \quad \text{car } u_n^2 \neq 0.
\end{aligned}
$$

   (c) Nous avons $n^2+n+2 \sim n^2$ (équivalents de suite polynômiales) donc par quotient $u_n^2 \sim \dfrac{2}{n^2}$. Enfin, puisque $u_n > 0$, nous avons $u_n = \sqrt{u_n^2}$, donc par passage à la puissance, $u_n \sim \sqrt{\frac{2}{n^2}}$, c'est à dire $\boxed{u_n \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n}.}$

3. (a) Nous avons :

$$
\begin{aligned}
u_n^2 - \tfrac{2}{n^2} &= \frac{2}{n^2+n+2} - \frac{2}{n^2} \\
& \frac{2n^2}{n^2(n^2+n+2)} - \frac{2(n^2+n+2)}{n^2(n^2+n+2)} \\
& \boxed{\frac{-2(n+2)}{n^2+n+2}.}
\end{aligned}
$$

4. Nous avons : $\dfrac{u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}}{2\sqrt{2}n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n}{\frac{\sqrt{2}}{n}} + 1\right)$. Or $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = 1$. Ainsi, par opérations élémentaires, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}}{2\sqrt{2}n} = 1$. Ceci entraîne : $\boxed{u_n + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \sim \dfrac{2\sqrt{2}}{n}.}$

5. Nous avons : $R_n = u_n - \frac{\sqrt{2}}{n}$
$$= \frac{(u_n - \frac{\sqrt{2}}{n})(u_n + \frac{\sqrt{2}}{n})}{u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$
$$= \frac{u_n^2 - \frac{2}{n^2}}{u_n + \frac{\sqrt{2}}{n}}.$$
D'après 3. (a), et par quotient $u_n^2 - \frac{2}{n^2} \sim \frac{-2}{n^3}$.
D'après 3. (b) $u_n + \frac{\sqrt{2}}{n} \sim \frac{2\sqrt{2}}{n}$.

Par quotient, $R_n \sim \frac{\frac{-2}{n^3}}{\frac{2\sqrt{2}}{n}}$. Ceci nous donne après simplifications : $\boxed{R_n \sim \frac{-1}{\sqrt{2}n^2}.}$

6. D'après la question précédente, $R_n \sim \frac{-1}{\sqrt{2}n^2} \Leftrightarrow R_n = \frac{-1}{\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{-1}{\sqrt{2}n^2}\right)$
$$\Leftrightarrow R_n = \frac{-1}{\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow u_n - \frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{-1}{\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow u_n = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$
Au final, nous avons $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $\boxed{a = \sqrt{2}}$ et $\boxed{b = \frac{-1}{\sqrt{2}}.}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 10.

Problème

–Étude d'une suite définie par une relation de récurrence–

On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \sqrt{u_n}$.
On note ci-dessous : f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ et $I = [0;\ 1]$.

1. **Étude de f.**
   (a) Justifier que f est continue sur son domaine de définition, dérivable sur un ensemble que l'on précisera puis dresser le tableau de variations de f.
   (b) Montrer que I est un intervalle stable pour f.
   (c) Montrer que f possède un unique point fixe α dans I dont on précisera la valeur exacte.
2. **Étude de $g = f \circ f$.**
   On note $g = f \circ f$ définie sur I.
   (a) Justifier que g est continue sur I, croissante sur I et que I est un intervalle stable pour g.
   (b) Déterminer les points fixes de g sur I. (*On pourra montrer que ses points fixes sont racines d'un polynôme de degré 4 qui possède deux racines évidentes.*)
3. **Étude de suites extraites de (u_n).**
   On considère les deux suites extraites (v_n) et (w_n) de (u_n) définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) En vous aidant de la fonction g, justifier les points suivants :
      (i) Pour tout entier naturel n, $v_n \in I$ et $w_n \in I$;
      (ii) (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
   (b) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et préciser les valeurs possibles de leurs limites respectives.
   (c) Montrer précisément que $u_0 \leq \alpha \leq u_1$, puis par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.
   (d) En déduire que (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite.
4. **Comportement de (u_n).**
   (a) En vous aidant des résultats précédents, montrer que la suite (u_n) converge vers α.
   (b) Écrire un algorithme en langage Maple permettant de déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Donner la valeur de n_0 correspondante.
5. **Comparaison avec l'algorithme de dichotomie.**
   (a) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $x + \sqrt{x} - 1 = 0$ sur I.
   (b) On note (a_n) et (b_n) les deux suites définies par la méthode de dichotomie. Donner la plus petite valeur n_1 de n pour laquelle (a_{n_1}) ou (b_{n_1}) est une valeur approché de α à 10^{-3} près . Comparer avec la suite (u_n).

Exercice

–Un projecteur–

On pose $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ /\ x + y + z = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = -y = z \right\}$.

1. Montrer que E et F sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

CORRECTION DU DM 10.

Problème :

1. (a)
   - La fonction f est définie si et seulement si $x \geq 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
   - La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynômiale. Par somme, $\boxed{f \text{ est continue sur son ensemble de définition.}}$
   - De la même façon $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynômiale. Par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;\ +\infty[.}$ De plus, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par opérations élémentaires, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
f	1 $\searrow$	$-\infty$

   (b) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc (théorème de la bijection)
$$f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1].$$
   Nous avons bien $f(I) \subset I$ donc $\boxed{I \text{ est un intervalle stable pour } f.}$

   (c) Pour tout $x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} f(x) = x \Longleftrightarrow 1-\sqrt{x} = x \quad &\Longleftrightarrow \sqrt{x} = 1-x \\ &\Longleftrightarrow x = (1-x)^2 \quad \text{car } 1-x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$
   On a écarté la racine $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ car $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 > 1$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ possède bien un unique point fixe } \alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ dans } [0,1]}$

2. (a)
   - Par composition de fonctions continues, $\boxed{g \text{ est continue sur } I.}$
   - $g(I) = f(\underbrace{f(I)}_{=I}) = f(I) = I$. Ainsi, $\boxed{I \text{ est un intervalle stable pour } g.}$
   - $$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \quad \text{car } f \text{ est décroissante} \\ &\Leftrightarrow f(f(x)) \leq f(f(y)) \quad \text{car } f \text{ est décroissante} \\ &\Leftrightarrow g(x) \leq g(y) \end{aligned}$$
     Ainsi, $\boxed{g \text{ est croissante sur } I.}$

   (b) Pour tout $x \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{1-\sqrt{x}} = x &\Longleftrightarrow 1-\sqrt{x} = (1-x)^2 \quad \text{car } 1-x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x} = x(2-x) \\ &\Longleftrightarrow x = x^2(2-x)^2 \quad \text{car } x(2-x) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left\{0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right\} \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{les points fixes de } f \circ f \text{ dans } [0,1] \text{ sont } \{0, \alpha, 1\}}$

3. (a) Nous avons : $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(v_n)$. De même, $w_{n+1} = g(w_n)$. La fonction g est continue, croissante sur I qui est un intervalle fermé borné stable pour g. De plus $v_0 = \frac{1}{4} \in I$ et $w_0 = f(v_0) \in I$ puisque I est un intervalle stable pour f. Nous en déduisons les deux points suivants :
   (i) Pour tout entier naturel n, $v_n \in I$ et $w_n \in I$;
   (ii) Les suites (v_n) et (w_n) sont monotones. On obtient alors le sens de variation en comparant les premiers termes :
   - $v_0 = \frac{1}{4}$ et $v_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$. Ainsi : $v_0 < v_1$ et $\boxed{(v_n) \text{ est croissante.}}$
   - $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_1 = 1 - \sqrt{v_1} \approx 0.46$. Ainsi $w_1 < w_0$ et $\boxed{(w_n) \text{ est décroissante.}}$

   (b)
   - La suite (v_n) est croissante et majorée par 1 puisque $v_n \in I$, donc elle converge.
   - De même, la suite (w_n) est décroissante et minoorée par 0 puisque $w_n \in I$, donc elle converge.
   - Enfin, puisque g est continue sur I, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. On sait que les deux suites convergent vers les points fixes de g sur I. Ainsi, d'après 2(b), les valeurs possibles pour leurs limites sont $0, \alpha, 1$.
     De plus, (v_n) est croissante et minorée par 0, $\boxed{\text{les valeurs possibles pour la limite de } (v_n) \text{ sont donc } \alpha \text{ et } 1.}$
     De même, (w_n) est décroissante et majorée par 1. $\boxed{\text{Les valeurs possibles pour la limite de } (w_n) \text{ sont donc } 0 \text{ et } \alpha.}$

   (c)
   - On a $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_1 = 1 - \sqrt{u_0} = \dfrac{1}{2}$. On veut donc montrer :
$$\frac{1}{4} \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{5}{4} \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq -1 \Longleftrightarrow -\frac{5}{2} \leq -\sqrt{5} \leq -2 \Longleftrightarrow 2 \leq \sqrt{5} \leq \frac{5}{2}$$
     On peut vérifier cette dernière inégalité entre nombres positifs en mettant au carré :
$$2 \leq \sqrt{5} \leq \frac{5}{2} \Longleftrightarrow 4 \leq 5 \leq \frac{25}{4}$$
     Donc on a bien $\boxed{u_0 \leq \alpha \leq u_1}$
   - Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.
     - Initialisation : c'est la question précédente.
     - Hérédité : on suppose que, pour un entier n, on a $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$. Appliquons la fonction $f \circ f$, qui est croissante sur $[0,1]$ car composée de deux fonctions décroissantes, à cette inégalité en utilisant que α est un point fixe de f et donc de $f \circ f$:
$$f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(\alpha) \leq f \circ f(u_{2n+1}) \Longleftrightarrow f(u_{2n+1}) \leq \alpha \leq f(u_{2n+2}) \Longleftrightarrow u_{2n+2} \leq \alpha \leq u_{2n+3}$$
       c'est l'inégalité souhaitée au rang $n+1$.
       Donc d'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}}$

   (d)
   - On note ℓ la limite de (v_n). Puisque nous avons $\frac{1}{4} \leq v_n \leq \alpha$, par passage à la limite nous obtenons $\frac{1}{4} \leq \ell \leq \alpha$. Or $\ell \in \{\alpha;\ 1\}$ d'après la question précédente. Donc, forcément, $\ell = \alpha$.
   - On note ℓ' la limite de (w_n). Puisque nous avons $\alpha \leq w_n \leq \frac{1}{2}$, par passage à la limite nous obtenons $\alpha \leq \ell' \leq \frac{1}{2}$. Or $\ell' \in \{\alpha;\ 0\}$ d'après la question précédente. Donc, forcément, $\ell' = \alpha$.

   Finalement $\boxed{\ell = \ell' = \alpha.}$

4. (a) On vient de démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite donc d'après le théorème des suites extraites (u_n) converge vers cette limite commune.
   Finalement $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$

   (b) On commence par écrire une procédure qui définit notre suite, que l'on va appeler « suite » :

```
[> suite:=proc(n)              nom du programme et arguments
[> local k,u;                  variables locales
[> u[0]:=1/4;                  initialisation
[> for k from 1 to n do        boucle « for »
[> u[k]:=1-sqrt(u[k-1]);
[> od;                         fin de boucle
[> evalf(u[n]);                valeur approchée de u_n
[> end :                       fin du programme
```

Ensuite, nous définissons α puis écrivons la commande nous permettant de déterminer la valeur de n_0 demandée :

```
[>  alpha:=(1-sqrt(5))/2;
[>  n:=0;while evalf(abs(suite(n)-alpha))>10^(-3) do n:=n+1;od;
```

Nous obtenons $\boxed{n_0 = 24.}$

5. (a) Nous avons : $x+\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x)=x$. Or $f(x)=x$ admet une unique solution sur I, donc $\boxed{\text{l'équation } x+\sqrt{x}-1=0 \text{ admet une unique solution sur } I.}$

   (b) On prend $a_0=0$ et $b_0=1$. On cherche n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{b_0-a_0}{2^n} \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow -n\ln(2) \leq -3\ln(10) \quad \text{car ln est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \approx 9,96 \end{aligned}$$

Nous obtenons $\boxed{n_1 = 10}$. Notre suite semble donc être plus lente que la dichotomie, alors que cette dernière est déjà bien lente, bref c'est un mauvais algorithme pour déterminer une valeur approchée de α.

Exercice :

1. • On remarque que $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3} \in E$, donc en particulier E est non vide. soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ appartoient à E. Nous avons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{x+\lambda x'}_{X} \\ \underbrace{y+\lambda y'}_{Y} \\ \underbrace{z+\lambda z'}_{Z} \end{pmatrix}$.

   Or $X+Y+Z = x+y+z+\lambda(x'+y'+z')$. De plus $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ donc $x+y+z=0$. Pour les mêmes raisons, $x'+y'+z'=0$. Ainsi, $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in E$ donc, d'après la caractérisation,

   $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ et donc un espace vectoriel.}}$

   • Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \in F &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{car} \left\{ \begin{array}{l} x=-y \\ z=-y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   Ainsi : $\boxed{F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$. En particulier, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ donc un espace vectoriel.}}$

2. • Soit $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \in E \cap F &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=-y \\ z=-y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y=0 \\ x=-y \\ z=-y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ x=-y=0 \\ z=-y=0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}.}$

   • On commence par déterminer une famlle génératrice de E.

   Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \in E &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \quad \text{car } z=-x-y \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   Ainsi : $E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Par conséquent : $E+F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

   En développant par rapport à la première colonne, nous obtenons, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ forme donc une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$. Ainsi : $\boxed{E+F = \mathbb{R}^3.}$

   BILAN : Des deux points précédents,nous en déduisons que $\boxed{E \text{ et } F \text{ sont supplémentaires.}}$

3. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On cherche $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \text{ avec} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} \in E \\ \overrightarrow{v} \in F \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=a-v \\ y=b+v \\ z=-a-b-v \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=a-v \\ x+y=a+b \\ z=-a-b-v \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-y-z \\ b=\underbrace{x+y-a}_{=x+2y+z} \\ v=-x-y-z \end{array} \right.$$

   Ainsi, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -y-z \\ x+2y+z \\ y+z-x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ x+2y+z \\ -x-y \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\overrightarrow{u} = p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -y-z \\ x+2y+z \\ -x-y \end{pmatrix}}$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 11.

Exercice

–Étude d'un endomorphisme–

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ défini par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y-t \\ 2x-3y-z-4t \\ x-y-t \\ -2x+3y+z+4t \end{pmatrix}$. Pour un espace vectoriel E, on notera ci-dessous :

- id_E l'application identité de E vers E ;
- $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}}$.

1. (a) Calculer le rang de la famille : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis déterminer $\mathrm{rg}(f)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.
   (d) Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^4})$.
2. Sans calculer f^2, montrer les inclusions suivantes :
$$\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^4}) \subset \mathrm{Ker}((f - id_{\mathbb{R}^4})^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$
   En déduire les valeurs possibles pour $\dim(\mathrm{Ker}((f - id_{\mathbb{R}^4})^2))$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\left((f - id_{\mathbb{R}^4})^2\right) = \mathrm{Im}(f)$.
   (b) En déduire $f^3 - 2f^2 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$ (*on pourra écrire $x = u + v$, avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Im}(f)$ puis en déduire $f^3(x) - 2f^2(x) + f(x) = 0_{\mathbb{R}^4}$.*)
4. Plus généralement, montrer que si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $f^3 - 2f^2 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

Problème

–Étude d'une fonction–

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition D et justifier que f est dérivable sur D.
2. Étudier la continuité à droite et à gauche de -1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ?
3. En vous aidant de la fonction auxiliaire : $g(x) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right) - \dfrac{x}{1+(x+1)^2}$, déterminer les variations de f sur D.
4. Déterminer les limites au bord de D de f puis dresser son tableau de variations.
5. Montrer que la courbe représentative de f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique dont on déterminera une équation cartésienne. Préciser la position de la courbe réprésentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

à rendre le Lundi 16 Mai

CORRECTION DU DM 11.

Exercice :

1. (a) On étudie la liberté de la famille :

$$\underbrace{a\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}}_{u_1}+\underbrace{b\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\3\end{pmatrix}}_{u_2}+\underbrace{c\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_3}+\underbrace{d\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\\4\end{pmatrix}}_{u_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrrl} a & -b & & -d & =0\\ 2a & -3b & -c & -4d & =0\\ a & -b & & -d & =0\\ -2a & +3b & +c & +4d & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrrl} a & -b & & -d & =0\\ 2a & -3b & -c & -4d & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrrl} a & -b & & -d & =0\\ & -b & -c & -2d & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-c-d\\ b=-c-2d\end{array}\right.$$

Pour $c=1$ et $d=0$ nous obtenons la relation de liaison : $-u_1-u_2+u_3=0\Leftrightarrow u_3=u_1+u_2$. On en déduit : $\text{vec}(u_1,u_2,u_3,u_4)=\text{vect}(u_1,u_2,u_4)$.

On étudie maintenant la liberté de $\mathcal{F}=(u_1,u_2,u_4)$. On réutilise le système précédent : $au_1+bu_2+du_4=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-1\\ b=-2\end{array}\right.$ Pour $d=1$, nous obtenons la relation de liaison$-u_1-2u_2+u_4=0\Leftrightarrow u_4=u_1+2u_2$. On en déduit : $\text{vec}(u_1,u_2,u_4)=\text{vect}(u_1,u_2)$.

Pour finir, u_1,u_2 forment une famille libre car ils sont non nuls et non colinéaires. Ainsi, $\text{rg}(u_1,u_2)=2$.
Par conséquent : $\text{rg}(\mathcal{F})\ =\dim(\text{vect}(u_1,u_2,u_3,u_4))\ =\dim(\text{vect}(u_1,u_2))\ =\text{rg}(u_1,u_2)\ \boxed{=2.}$

(b) $u\in\text{Im}(f)\quad\Leftrightarrow u=\begin{pmatrix}x-y-t\\2x-3y-z-4t\\x-y-t\\-2x+3y+z+4t\end{pmatrix}.$

$$\Leftrightarrow u=xu_1+yu_2+zu_3+tu_4$$

Ainsi : $\text{Im}(f)=\text{vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ donc $\boxed{rg(f)=\text{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4)=2}$. D'après précédemment, $\text{Im}(f)=\text{vect}(u_1,u_2)$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}'=(u_1,u_2)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Cette dernière est par ailleurs libre, cf. 1. donc $\boxed{\mathcal{F}'\text{ est une base de Im}(f).}$

$\boxed{\text{rg}(f)\neq 4\text{ donc }f\text{ n'est ni injective, ni surjective, donc non bijective.}}$

(c) • $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\text{Ker}(f)\cap\text{Im}(f)\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u\in\text{Ker}(f)\\ u\in\text{Im}(f)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y-t=0\\ 2x-3y-z-4t=0\\ u=au_1+bu_2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y-t=0\\ 2x-3y-z-4t=0\\ z=x\\ t=-y\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ z=0\\ 3y=-4t\\ y=-t\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ z=0\\ y=0\\ t=0\end{array}\right.$$

On en déduit $\text{Ker}(f)\cap\text{Im}(f)=\{0\}$.

• De plus, $\dim(\text{Ker}(f))+\dim(\text{Im}(f))=\dim(\text{Ker}(f))+\text{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^4)$ d'après le théorème du rang.

• Les deux points précédents entraînent : $\boxed{\mathbb{R}^4=\text{Ker}(f)\oplus\text{Im}(f).}$

(d) $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\text{Ker}(f-id_{\mathbb{R}^4})\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrrl} & -y & & -t & =0\\ 2x & -4y & -z & -4t & =0\\ x & -y & -z & -t & =0\\ -2x & +3y & +z & +3t & =0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & -z & -t & =0\\ 2x & -4y & -z & -4t & =0\\ -2x & +3y & +z & +3t & =0\\ & -y & & -t & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & -z & -t & =0\\ & y & -z & +t & =0\\ & -y & & -t & =0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ z=0\\ y=-t\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow u=t\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi : $\text{Ker}(f-id_{\mathbb{R}^4})=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Ce dernier est donc une droite vectorielle et $\boxed{\dim(\text{Ker}(f-id_{\mathbb{R}^4}))=1.}$

2. • On pose : $u=f-id_{\mathbb{R}^4}$. Montrons $\text{Ker}(u)\subset\text{Ker}(u^2)$. Pour ceci, considérons $x\in\text{Ker}(u)$ et montrons que $x\in\text{Ker}(u^2)$. Par hypothèse : $u(x)=0$ donc $u(u(x))=u(0)=0$ c'est à dire $u^2(x)=0$. Ceci prouve $\boxed{\text{Ker}(u)\subset\text{Ker}(u^2).}$

• On procède de façon similaire. Soit $x\in\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2)$. Alors $(f-id_{\mathbb{R}^4})\circ(f-id_{\mathbb{R}^4})(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+x=0$. Ainsi : $x=2f(x)-f^2(x)=f(2x-f(x))=f(u)$ avec $u=2x-f(x)$. Ceci prouve $x\in\text{Im}(f)$ donc $\boxed{\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2)\subset\text{Im}(f).}$

• Puisque $\text{Ker}(f-id_{\mathbb{R}^4})\subset\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2)$ on en déduit $1\leq\dim(\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2))$ d'après 1. (d). De même, l'autre inclusion donne : $\dim(\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2))\leq\text{rg}(f)$.

Finalement, d'après la question 1., $\boxed{1\leq\dim(\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2)\leq 2.}$

3. (a) Nous avons $\text{Im}(f)=\text{vect}(u_1,u_2)$. Un petit calcul donne $(f-id_{\mathbb{R}^4})^2(u_1)=0$. De même pour u_2. Donc u_1 et u_2 appartiennent à $\text{Ker}((f-id_{\mathbb{R}^4})^2)$. Ce dernier étant un sous-espace vectoriel, on en déduit

vect$(u_1, u_2) \subset \mathrm{Ker}((f - id_{\mathbb{R}^4})^2)$, c'est à dire : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}((f - id_{\mathbb{R}^4})^2)$. Nous avons également l'autre inclusion d'après la question précédente, donc par double inclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}((f - id^2_{\mathbb{R}^4})}$.

(b) D'après les questions précédentes, on peut décomposer $x = u + v$, avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}((f - id_{\mathbb{R}^4})^2)$. Alors, f étant linéaire, $f(x) = f(u) + f(v) = f(v)$ car $f(u) = 0$. De même $f^2(x) = f^2(v)$ et $f^3(x) = f^3(v)$. On en déduit : $f^3(x) - 2f^2(x) + f(x) = f^3(v) - 2f^2(v) + f(v) = f(f^2(v) - 2f(v) + v) = 0$ car $f^2(v) - 2f(v) + v = ((f - id_{\mathbb{R}^4})^2)(v) = 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur x, on en déduit $\boxed{f^3 - 2f^2 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}}$.

4. • $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ x = f(u) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^2(u) = 0 \\ x = f(u) \end{cases}$$

Alors $f^3(u) = 0$ et donc $f^3(u) + f^2(u) + f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

- D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- Les deux conditions précédentes entraînent $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.}$

Problème :

1. La fonction f est définie si et seulement si $x \neq -1$, donc $\mathcal{D} =]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$.

   La fraction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur D et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ est dérivable sur D. Ainsi, par produit, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } D.}$

2. Nous avons : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ (composition des limites) $\lim\limits_{x \to 1^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, par produit : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

   De même : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Ces deux limites étant différentes, f n'a pas de limite en -1.

   $\boxed{\text{On ne peut donc prolonger cette dernière par continuité en } -1.}$

3. • La fonction f est dérivable sur D et pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{-1}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2} \\ &= 2x\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{-1}{1 + (x+1)^2} \\ &= \boxed{xg(x)} \end{aligned}$$

- Pour obtenir le signe de f', on étudie le signe de g et pour obtenir le signe de g, on trace le tableau de variations de g.

  Par opérations élémentaires g est dérivable sur D' et
$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} - \frac{1 + (x+1)^2 - 2x(x+1)}{(1 + (x+1)^2)^2} \\ &= -\frac{(x+2)^2 + 2}{(1 + (1+x)^2)^2} < 0 \end{aligned}$$

  La fonction g est donc strictement décroissante sur D. D'après 1., nous obtenons que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 1 - \pi$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 1 + \pi$.

  Toujours par composition des limites, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$.

  On en déduit le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g	0	↘	$1 - \pi$ ‖ $1 + \pi$	↘	0

Du tableau de variations de g, nous en déduisons son signe : Pour $x \in]-\infty;\ -1[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]-1;\ +\infty[, g(x) > 0$.

- Nous obtenons le signe de $f'(x) = xg(x)$ à l'aide du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$-$	‖	$+$		$+$	
x	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Finalement : $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-1;\ 0] \text{ et croissante sur }]-\infty;\ -1[\cup[0;\ +\infty[.}$

4. Les limites à droite et à gauche de f en -1 ont déjà été calculées auparavant. On regarde leslimites en $\pm\infty$. Puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, nous avons : $\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x+1} \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x}$. Ainsi par produit : $f(x) \sim_{\pm\infty} x$. En particulier $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.}$ Nous avons toutes les informations réunies pour donner le tableau de variations de f :

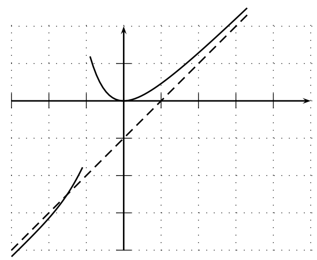
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

5. On pose $x = u$. L'expression $f(x)$ devient alors : $g(u) = \frac{1}{u^2}\arctan\left(\frac{u}{u+1}\right)$. On fait un développement limité de $\arctan\left(\frac{u}{u+1}\right)$ à l'ordre 3. Noux avons : $\dfrac{u}{1+u} = u\dfrac{1}{1+u} = u - u^2 + u^3 + o_0(u^3)$. On pose $X = u - u^2 + u^3 + o_0(u^3)$. Alors :
$\arctan(X) = X - \frac{X^3}{3} + u_0(u^3)$. Or $x^3 = \left(u - u^2 + u^3 + o_0(u^3)\right)^3 = u^3\left(1 - u + u^2 + o_0(u^2)\right)^3 = u^3 + o_0(u^3)$.
Ainsi, par somme : $\arctan\left(\frac{u}{u+1}\right) = u - u^2 + \frac{2}{3}u^3 + o_0(u^3)$, donc : $g(u) = \frac{1}{u} - 1 + \frac{2}{3}u + o_0(u)$. Finalement :

$$\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = x - 1 \text{ est donc asymptote oblique}}$. La courbe est au-dessus au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

6.



⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Devoir à la maison n° 12.

Problème

–D'après CCP 2010–

Ce problème comporte trois parties. Les parties A et B peuvent se traiter de façon indépendante. On peut utiliser certains rédultats de la partie B pour traiter la partie C.

Définitions

- On dit qu'un vecteur colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ses coefficients vaut 1. Par exemple, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ est stochastique car $0,3 \geq 0$, $0,6 \geq 0$, $0,1 \geq 0$ et $0,3+0,6+0,1=1$.
- On dit qu'une matrice carrée est **stochastique** lorsque chacune de ses colonnes l'est.
- Si $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on appelle **trace de A**, et on note $\mathrm{Tr}(A)$ le nombre réel : $\mathrm{Tr}(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Partie A : Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par : $x_0=y_0=\frac{1}{2}$, $z_0=0$ et pour tout entier naturel n :

$$(R)\left\{\begin{array}{lllll} x_{n+1} & = & \frac{7}{10}x_n & +\frac{2}{5}y_n & +\frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{3}{10}x_n & & +\frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} & = & & \frac{3}{5}y_n & +\frac{2}{5}z_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (R) s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1}=AX_n$, avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.
2. Justifier que la matrice carrée A est stochastique.
3. Écrire un programme dans le langage `Maple` ou `Mathematica` qui calcule le vecteur colonne X_{2010}.
4. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$. *On pourra utiliser la calculatrice.* La matrice A est-elle inversible ?
5. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $P(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)$. Montrer que les solutions de $P(\lambda)=0$ sont 0, $\frac{1}{10}$ et 1.
   (b) Déterminer trois vecteurs non nuls U_1, U_2, U_3 tels que : $U_1 \in \mathrm{Ker}(A)$, $U_2 \in \mathrm{Ker}(A-\frac{1}{10}I_3)$ et $U_3 \in \mathrm{Ker}(A-I_3)$. et montrer que $\mathcal{B}=(U_1,U_2,U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ P inversible telle que $A=PDP^{-1}$, avec $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels que l'on déterminera.
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n=PD^nP^{-1}X_0$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Exprimer X_n en fonction de n.
   (b) Montrer que le vecteur X_n est stochastique.
8. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n) et (z_n)) converge vers une limite, notée l_x (respectivement l_y et l_z).
9. Prouver que le vecteur colonne $L=\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est stochastique et calculer AL. Que remarque-t-on ?

Partie B : Cas de la dimension 2

On considère dans cette partie A une matrice carrée stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et (X_n) une suite de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^2$ tels que X_0 est stochastique et $X_{n+1} = AX_n$.

1. Montrer qu'il existe a et b deux réels de $[0,1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

   On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n est stochastique. *Il s'agit d'établir que* $x_n \geq 0$*,* $y_n \geq 0$ *et* $x_n + y_n = 1$.
3. Montrer que $0 \leq \mathrm{Tr}(A) \leq 2$.
4. (a) On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
   Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut A^2 ? Que se passe t-il pour la suite (X_n) ?

   (b) On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 2$.
   Que vaut A ? Que se passe t-il pour la suite (X_n) ?

   On suppose désormais $0 < \mathrm{Tr}(A) < 2$.
5. Montrer que $-1 < a - b < 1$.
6. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que $AV = qV$ avec q que l'on exprimera en fonction de a et b.

   (b) Montrer que $|q| < 1$.
7. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(A - I_2) \oplus \mathrm{Ker}(A - qI_2)$.
8. *On pourra admettre le résultat demandé ici pour traiter la suite.*
   Établir qu'il existe un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$, $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ et un réel λ vérifiant :
   $$AL = L \text{ et } X_0 = L + \lambda V.$$
   On ne cherchera pas à calculer l_x, l_y et λ.
9. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = L + q^n \lambda V$.
10. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n)) est convergente vers l_x (respectivement l_y).
11. En déduire que le vecteur colonne L est stochastique. *On pourra utiliser* B.2.
12. Soit T un vecteur colonne stochastique de $\mathbb{R}^2$ tel que $AT = T$. Montrer que $T = L$.

Partie C : Un cas particulier

On reprend les notations de la partie B.
Dans cette partie, on suppose de plus que la matrice A n'est pas inversible.

1. Montrer que la matrice A est de rang 1.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0;\ 1]$ tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$.
3. Établir que $A^2 = A$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = AX_0$.
   Soit f l'endomorphisme de E canoniquement associé à A.
5. Montrer que l'application linéaire f est un projecteur.
6. Donner une équation de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ dans la base canonique.
   On dit qu'une projection $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est orthogonale lorsque $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
7. Montrer que f est orthogonale si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.
8. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u}(\theta)$ le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
   Établir que $||f(\overrightarrow{u}(\theta))||^2 = ((2\alpha-1)^2+1)\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$.
9. En déduire les valeurs de $\frac{||f(\overrightarrow{i})||}{||\overrightarrow{i}||}$ et $\frac{||f(\overrightarrow{j})||}{||\overrightarrow{j}||}$ en fonction de α, où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
10. Démontrer que f est une pojection orthogonale si et seulement si pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$, on a $||f(\overrightarrow{x})|| \leq ||\overrightarrow{x}||$.

à rendre le Lundi 30 Mai

CORRECTION DU DM 12.

Problème :

Partie A.

1. $(R) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$, avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.}$

2. Les coefficients de la matrice sont tous positifs. De plus : $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} + 0 = 1$. De même pour les deux autres colonnes. Ceci prouve que $\boxed{A \text{ est stochastique.}}$

3.
```
[> with(linalg);
[> X[0]:=matrix(3,1,[1/2,1/2,0]);
[> A:=matrix(3,3,[7,4,5,3,0,1,0,6,4])/10;
[> for k from 1 to 2010 do
[> X[k]:=evalm(A&*X[k-1]):
[> od:
[> print(X[2010]);
```

4. $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \frac{11}{10}}$ et $\boxed{\det(A) = 0}$. La matrice A $\boxed{\text{n'est pas inversible}}$ puisque $\det(A) \neq 0$.

5. (a) On calcule $P(\lambda) = \left| \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7-10\lambda & 4 & 5 \\ 3 & -10\lambda & 1 \\ 0 & 6 & 4-10\lambda \end{pmatrix} \right|$

$$= \frac{1}{10^3}\left((7-10\lambda) \begin{vmatrix} -10\lambda & 1 \\ 6 & 4-10\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 4-10\lambda \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{10^3}\left((7-10\lambda)(100\lambda^2 - 40\lambda - 6) - 3(16 - 40\lambda - 30)\right)$$

$$= \frac{1}{10^3}\left(-10^3\lambda^3 + 1100\lambda^2 - 220\lambda - \cancel{42} + 120\lambda + \cancel{42}\right)$$

$$= \frac{1}{10^3}\left(-10^3\lambda^3 + 1100\lambda^2 + 100\lambda^2\right)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - \tfrac{11}{10}\lambda + \tfrac{1}{10})$$

Le discriminant du trinôme $\lambda^2 + \frac{11}{10}\lambda + \frac{1}{10}$ est $\Delta = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2$. On en déduit deux solutions distinctes : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{10}$

La factorisation complète est donc : $\boxed{P(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{10}\right).}$ En particulier :

$$\boxed{P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{10}.}$$

(b) • $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + z = 0 \\ 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y + 5z = 0 \\ -12y - 8z = 0 \\ 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y + 5z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{car } -2L_3 = L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = -\frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On prend par exemple : $\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.}$

• $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \frac{1}{10}I_3) \Leftrightarrow (A - \frac{1}{10}I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y + 5z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y + 5z = 0 \\ -6y - 3z = 0 \quad L_2 \to 2L_2 - L_1 \\ 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y + 5z = 0 \\ 6y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{car } -L_3 = L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. On prend par exemple : $\boxed{U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.}$

- $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \quad \Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -3x & +4y & +5z & = 0 \\ 3x & -10y & +z & = 0 \\ & 6y & -6z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -3x & +4y & +5z & = 0 \\ & -6y & +6z & = 0 \\ & 6y & -6z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -3x & +4y & +5z & = 0 \\ & 6y & -6z & = 0 \end{array} \right. \quad \text{car } -L_3 = L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ y = z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow u = z \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On prend par exemple : $\boxed{U_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique. Alors $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Nous remarquons que $\det(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Cette dernière est donc inversible, ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(c) On peut utiliser les formules de changement de base pour les applications linéaires. Plus rapidement, nous avons :

- $f(U_1) = 0$ donc a pour vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.
- $(f - \frac{1}{10} id)(U_2) = 0 \Leftrightarrow f(U_2) = \frac{1}{10} U_2$ donc a pour vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.
- $(f - id)(U_3) = 0 \Leftrightarrow f(U_3) = U_3$ donc a pour vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

(d) On prend la base $\mathcal{B}' = (U_3, U_2, -U_1)$. Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$. En posant $\boxed{P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$, d'après les formules de changement de base pour les applications linéaires : $D = P^{-1}AP$. En multipliant cette égalité par P à gauche et par P^{-1} à droite, nous en déduisons :

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

6. On considère $\mathcal{P}(n)$ « $X_n = PD^nP^{-1}X_0$ ». On veut montrer par récurence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **initialisation.** Pour $n = 0$, $D^0 = I_3$ donc $PD^0P^{-1}X_0 = I_3X_0 = X_0$. Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **hérédité.** On suppose $X_n = PD^nP^{-1}$. Alors : $X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}$. Ceci prouve l'hérédité.

Ainsi, $\boxed{\text{par récurrence, pour tout entier naturel } n,\ X_n = PD^nP^{-1}X_0.}$

7. (a)
   - Pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car D est diagonale.
   - On calcule l'inverse de P. Nous obtenons $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.
   - On en déduit, à l'aide de la question précédente,

$$X_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 - 5.10^{-n} \\ 2 - 5.10^{-n} \\ 2 + 10.10^{-n} \end{pmatrix}.}$$

(b) Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, $10^{-n} \leq \frac{1}{10}$. Ainsi $6 - 5.10^{-n} \geq 6 - \frac{1}{2} \geq 0$. De la même façon, les autres coefficients sont positifs. D'autre part : $\frac{1}{10}(6 - 5.10^{-n} + 2 - 5.10^{-n} + 2 + 10^{-n}) = \frac{1}{10}.10$. Ainsi, $\boxed{X_n \text{ est stochastique.}}$

8. Nous avons : $x_n = \frac{1}{10}(6 - 5.10^{-n})$, $y_n = \frac{1}{10}(2 - 5.10^{-n})$ et $z_n = \frac{1}{10}(2 + -10.10^{-n})$. Or $10^{-n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < \frac{1}{10} < 1$. Par combinaison linéaire, $\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}.}$ De la même façon, $\lim_{n \to +\infty} y_n = \boxed{\frac{1}{5}.}$ et $\lim_{n \to +\infty} z_n = \boxed{\frac{1}{5}.}$

9. Nous avons $L = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   La somme des coefficients donne : $\frac{1}{5}(1+3+3) = 1$. Ils sont d'autre part positifs. Ainsi, $\boxed{L \text{ est stochastique}}$. Un calcul donne $\boxed{AL = L.}$ L est donc un $\boxed{\text{élément de } \mathrm{Ker}(A - I_3).}$ (ou encore un vecteur fixe de $A \ldots$).

Partie B.

1. On écrit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Puisque A est stochastique, $a + c = 1$ donc $c = 1 - a$. De même $d = 1 - b$. Les coefficients étant positifs, nous avons $a \geq 0$ et $1 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$. Ainsi, $a \in [0, 1]$. De même, $b \in [0, 1]$. Il existe donc bien deux réels a et b de $[0, 1]$ tels que : $\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}.}$
2. On considère $\mathcal{P}(n)$ « $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$ ».On veut montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
   - **initialisation.** X_0 est stochastique par hypothèse donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **hérédité.** On suppose $x_n \geq 0, y_n \geq 0, x_n + y_n = 1$. Puisque $X_{n+1} = AX_n$, on en déduit : $x_{n+1} = ax_n + by_n$ et $x_{n+1} = (1 - a)x_n + (1 - b)y_n$. Comme $a \geq 0$ et $x_n \geq 0$, $ax_n \geq 0$. De même $by_n \geq 0$, donc par somme $x_{n+1} = ax_n + by_n \geq 0$. De la même façon, $a \leq 1$ donc $(1 - a) \geq 0$. Ceci entraîne $y_{n+1} \geq 0$. Enfin : $x_{n+1} + y_{n+1} = ax_n + by_n + (1 - a)x_n + (1 - b)y_n = x_n + y_n = 1$. Ceci prouve l'hérédité.

   Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ X_n \text{ est stochastique.}}$
3. Nous avons $\mathrm{Tr}(A) = 1 + a - b$. Comme $0 \leq 1$, $1 - b \leq 1 + a - b \leq 2 - b$. De plus $b \geq 0$ donc $2 - b \leq 2$. De même $1 - b \geq 0$. Ainsi, $0 \leq 1 + a - b \leq 2$, c'est à dire $\boxed{0 \leq \mathrm{Tr}(A) \leq 2.}$

4. (a) Nous avons $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow b = 1 + a$. Ceci donne : $A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$. D'autre part, A est stochastique, donc $a \geq 0$ et $-a \geq 0$, ceci n'est possible que pour $a = 0$. Alors $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

Un calcul donne $A^2 = I_2$. Nous en déduisons donc pour tout entier naturel p, $\boxed{X_{2p} = X_0 \text{ et } X_{2p+1} = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.}$

Il s'agit donc d'une suite périodique.

(b) Nous avons $\mathrm{Tr}(A) = 2 \Leftrightarrow a = 1 + b$. Ceci donne : $A = \begin{pmatrix} 1+b & -b \\ a & 1-a \end{pmatrix}$. D'autre part, A est stochastique, donc $b \geq 0$ et $-b \geq 0$, ceci n'est possible que pour $b = 0$. Alors $\boxed{A = I_2.}$

Nous en déduisons donc pour tout entier naturel n, $\boxed{X_n = X_0.}$ Il s'agit donc d'une suite constante.

5. Nous avons $0 < \mathrm{Tr}(A) < 2 \Leftrightarrow 0 < 1 + a - b < 2 \Leftrightarrow \boxed{-1 < a - b < 1.}$

6. (a) Un calcul donne $AV = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\boxed{AV = qV}$ avec $\boxed{q = a - b}$

(b) Puisque $-1 < a - b < 1$, nous avons $-1 < q < 1$ donc $\boxed{|q| < 1.}$

7. • Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - I_2) \cap \mathrm{Ker}(A - qI_2)$. Alors $AX = X$ et $AX = qX$ donc $X = qX \Leftrightarrow (q-1)X = 0 \Leftrightarrow X = 0$ puisque $q \neq 1$ ($|q|< 1$). Ainsi $\mathrm{Ker}(A - I_2) \cap \mathrm{Ker}(A - qI_2) = \{0\}$.

• On trouve un vecteur non nul dans $\mathrm{Ker}(A - I_2)$: $V_1 = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$. Alors : $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_2)) \geq 1$. Pour les mêmes raisons $\dim(\mathrm{Ker}(A - qI_2)) \geq 1$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_2)) + \dim(\mathrm{Ker}(A - qI_2)) \geq 2$. D'autre part, en utilisant les relations de Grassman, nous obtenons, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_2)) + \dim(\mathrm{Ker}(A - qI_2)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_2) + \mathrm{Ker}(A - qI_2)) - \dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(A - I_2) \cap \mathrm{Ker}(A - qI_2)}_{=\{0\}}) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_2) + \mathrm{Ker}(A - qI_2)) \leq 2$ car $\mathrm{Ker}(A - I_2) + \mathrm{Ker}(A - qI_2) \subset \mathbb{R}^2$. Des deux inégalités précédentes, nous en déduisons : $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_2) + \dim(\mathrm{Ker}(A - qI_2) = 2$.

BILAN : $\boxed{\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(A - I_2) \oplus \mathrm{Ker}(A - qI_2).}$

8. $\mathcal{B} = (V_1, V)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ d'après la question précédente. On peut donc écrire $\boxed{X_0 = \underbrace{\lambda_1 V_1}_{=L} + \lambda V}$.

Nous avons $L = \lambda_1 V_1 \in \mathrm{Ker}(A - I_2)$, donc $\boxed{AL = L.}$

9. On considère $\mathcal{P}(n)$ « $X_n = L + q^n \lambda V$ ». On veut montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

• **initialisation.** Pour $n = 0$, $L + q^0 \lambda V = L + \lambda V = X_0$. Ainsi la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **hérédité.** On suppose $X_n = L + q^n \lambda V$. Alors $X_{n+1} = AX_n = A(L + q^n \lambda V) = AL + q^n \lambda AV$. Or $AV = qV$ et $AL = L$. Donc : $X_{n+1} = L + q^{n+1} \lambda V$. Ceci prouve l'hérédité.

BILAN : Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{X_n = L + q^n \lambda V.}$

10. D'après la question précédente, $x_n = l_x + \lambda q^n$ et $y_n = l_y - \lambda q^n$. Puisque $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc par combinaison linéaire $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l_x}$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = l_y.}$

11. Pour tout entier naturel n, $x_n \geq 0$. Par passage à la limite, $l_x \geq 1$. De même $l_y \geq 0$. Enfin $x_n + y_n = 1$ donne par passage à la limite $l_x + l_y = 1$. Ainsi $\boxed{L \text{ est stochastique.}}$

12. Si T vérifie $AT = T$, alors $T \in \mathrm{Ker}(A - I_2)$, donc $T = \lambda L$. Par ailleurs, si T est stochastique, alors $\lambda(\underbrace{l_x + l_y}_{=1}) = 1$. Ceci donne $\lambda = 1$ et finalement, $\boxed{T = L.}$

Partie C.

1. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A est non inversible, donc $\mathrm{rg}(A) < 2$. De plus, la matrice nulle n'est pas stochastique, donc $\mathrm{rg}(A) > 0$. Par conséquent, le rang étant un entier naturel, nous avons $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a - ab - b - ab = 0 \Leftrightarrow a = b$. Par conséquent $\boxed{A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}}$, avec $\alpha \in [0, 1]$.

3. Il s'agit d'un simple calcul.

4. D'après la question précédente, nous obtenons par récurrence immédiate : $A^n = A$. Ainsi, pour $n \geq 1$, $X_n = A^n X_0 = \boxed{AX_0}$ qui est donc stationnaire pour $n \geq 1$

5. La relation $A^2 = A$ se traduit par $f \circ f = f$. Comme f est linéaire, on en déduit que $\boxed{f \text{ est un projecteur.}}$

6. • Nous avons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x+y) = 0 \\ (1-\alpha)x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$ car au moins un des deux nombres α et $1 - \alpha$ est non nul. $\boxed{\text{Une équation de } \mathrm{Ker}(f) \text{ est donc } x + y = 0.}$

• Les deux colonnes de A étant identiques, nous avons $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}}_{u_0}\right)$. Nous avons donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \det(u, u_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{(1-\alpha)x - \alpha y = 0.}$

7. Un vecteur directeur de la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$ est $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de $\mathrm{Im}(f)$ est $u_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$. Ainsi, le noyau et l'image sont orthogonaux si et seulement si $u_1.u_0 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}.}$

8. Nous avons $f(\overrightarrow{u}(\theta) = A\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \\ (1-\alpha)(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \end{pmatrix}$. Ainsi, $||f(\overrightarrow{u}(\theta)||^2 = \alpha^2(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 + (1-\alpha)^2(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2$.
D'autre part, $\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2$. Ainsi,

$$\boxed{||f(\overrightarrow{u}(\theta)||^2 = (4\alpha^2 - 4\alpha + 1)\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = ((2\alpha - 1)^2 + 1)\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).}$$

9. Nous avons $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{u}(0)$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ainsi, d'après la formule précédente,

$$\boxed{\frac{||f(\overrightarrow{i})||}{||\overrightarrow{i}||} = \sqrt{\frac{(2\alpha - 1)^2 + 1}{2}}}$$

et

$$\boxed{\frac{||f(\overrightarrow{j})||}{||\overrightarrow{j}||} = \sqrt{\frac{(2\alpha - 1)^2 + 1}{2}}}$$

10. • Supposons que f est une projection orthogonale. On écrit alors $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\ x_2 = f(x) \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$.
Puisque $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux, d'après le théorème de Pythagore, nous avons donc : $||x||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2$. Ainsi :$||x_1||^2 \leq ||x||^2 \Leftrightarrow ||f(x)||^2 \leq ||x||^2$.

• Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $||f(x)|| \leq ||x||$. Alors, en particulier $||f(\overrightarrow{u}(\theta))|| \leq ||\overrightarrow{u}(\theta)|| \Leftrightarrow ||f(\overrightarrow{u}(\theta))|| \leq 1$. Alors $||f(\overrightarrow{u}(\theta))||^2 \leq 1$. D'après C.8, on en déduit en prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$ l'inégalité : $(2\alpha - 1)^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 \leq 0$. Un carré étant toujours positif, cette dernière condition est vraie si et seulement si $(2\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. Alors f est orthogonale d'après C.7

BILAN : $\boxed{f \text{ est une projection orthogonale si et seulement si pour tout } x \in \mathbb{R}^2,\ ||f(x)|| \leq ||x||.}$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

31. Devoirs surveillés

Devoir surveillé n° 1.

Consignes générales :
– *La durée de l'épreuve est de 2 heures ;*
– *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
– *Calculatrice et documents interdits ;*
– *Le sujet est composé de deux exercices que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
– *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–Équations, inéquations, signes d'expressions–

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

   (a) $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$; (b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{x+2}$;

   (c) $m(m+1)x^2 + mx + 1 = 0$, où m est un paramètre réel ; (d) $\sqrt{2x+1} = x - 2$;

   (e) $\sqrt{x+1} > 2 - x$; (f) $\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right) > \dfrac{1}{2}$.

2. Résoudre l'équation $-X^2 - 4X + 1 = 0$. En déduire une factorisation de $-x^4 - 4x^2 + 1$, puis le signe de cette expression.

Exercice 2

–Dérivées et domaines de définitions–

Pour les fonctions ci-dessous :
(1) Déterminer le domaine de définition ;
(2) Justifier que f est dérivable sur un ensemble que l'on précisera ;
(3) Déterminer l'expression la plus factorisée possible de sa dérivée sur l'ensemble précédent.

(a) $x(\ln(x))^2$; (b) $e^{\sqrt{x^2+3x+4}}$;

(c) $\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; (d) $\sqrt{\dfrac{1-\ln(x)}{1+\ln(x)}}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

CORRECTION DU DS 1.

Exercice 1:

1. (a) 2 est solution évidente de l'équation, on factorise donc par $x-2$ à l'aide d'une division euclidienne :

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & -4x^2 & +8 & x\ \ -2 \\ \hline x^3 & -2x^2 & & x^2\ -2x\ -4 \\ \hline & -2x^2 & +8 & \\ & -2x^2\ +4x & & \\ \hline & -4x & +8 & \\ & -4x & +8 & \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

Ainsi, $x^3-4x^2+8=(x-2)(x^2-2x-4)$.
On résout maintenant l'équation $x^2-2x-4=0$. Il s'agit d'un trinôme. On calcule alors le discriminant $\Delta=20=(2\sqrt{5})^2>0$. L'équation précédente admet donc deux solutions distinctes : $x_1=\frac{2-2\sqrt{5}}{2}=1-\sqrt{5}$, $x_2=\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$.

On en déduit donc : $x^3-4x^2+9=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-4)=0$
$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x^2-2x-4=0$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=1-\sqrt{5}$ ou $x=1+\sqrt{5}$.

Ainsi : $\boxed{S=\{2;\ 1-\sqrt{5};\ 1+\sqrt{5}\}.}$

(b) Les valeurs interdites sont 0, -1 et -2. Nous avons :

pour $x\neq 0,-1$ et -2, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}>0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)}+\frac{x(x+2)}{x(x+1)(x+2)}-\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+2}{x(x+1)(x+2)}>0$$

Pour obtenir le signe du numérateur, on calcule son discriminant : $\Delta=8=(2\sqrt{2})^2>0$. Nous avons donc deux solutions simples : $x_1=-2-\sqrt{2}$, $x_2=-2+\sqrt{2}$. Puisque $a=1>0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines, et négatif sinon. On fait alors un tableau de signes pour conclure :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{2}$		-2		-1		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
x^2+4x+2	$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x	$-$		$-$	‖	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$x+1$	$-$		$-$	‖	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
$x+2$	$-$		$-$	‖	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
$\dfrac{x^2+4x+2}{x(x+1)(x+2)}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Ainsi, $\boxed{S=]-2-\sqrt{2};\ -2[\cup]-1;\ -2+\sqrt{2}[\cup]0;\ +\infty[.}$

(c) On distingue trois cas :
- $\underline{m=-1}$: L'équation devient alors : $-x+1=0\Leftrightarrow x=1$: $\boxed{S=\{1\}.}$
- $\underline{m=0}$: L'équation devient alors : $1=0$: $\boxed{S=\emptyset.}$
- $\underline{m\neq -1 \text{ et } 0}$: On calcule le discriminant du trinôme : $m(m+1)x^2+mx+1=0$: $\Delta=m^2-4m(m+1)=-m(3m+4)$. Le signe du discriminant s'obtient à l'aide du tableau de signes suivant :

m	$-\infty$	$-4/3$		0		$+\infty$
$-m$	$+$		$+$	0	$-$	
$3m+4$	$-$	0	$+$		$+$	
$-m(3m+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On poursuit donc le raisonnement selon le signe du discriminant :
- $m\in]-\infty;\ -4/3[\cup]0;\ +\infty[$. Alors $\Delta<0$, donc l'équation n'admet pas de solutions réelles : $\boxed{S=\emptyset}$;
- $m=-4/3$. Alors $\Delta=0$. L'équation admet donc une solution double : $x_0=\frac{-m}{2m(m+1)}=-\frac{1}{2(m+1)}=-\frac{1}{-2/3}=\frac{3}{2}$: $\boxed{S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}.}$;
- $m\in]-4/3,0[$. Alors $\Delta>0$. L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$$x_1=\boxed{\frac{-m-\sqrt{-m(4m+3)}}{2m(m+1)}},\quad x_2=\boxed{\frac{-m+\sqrt{-m(4m+3)}}{2m(m+1)}}.$$

Ainsi, $\boxed{S=\{x_1;\ x_2\}.}$

(d) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si $2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$.
Pour $x\geq -\frac{1}{2}$, $\sqrt{2x+1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x+1}=x-2\\ x-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1=(x-2)^2\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1=x^2-4x+4\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-6x+3=0\\ x\geq 2\end{cases}.$

On résout alors l'équation $x^2-6x+3=0$. On calcule le discriminant $\Delta=24=(2\sqrt{6})^2$. L'équation précédente admet donc deux solutions distinctes : $x_1=3-\sqrt{6}$ et $x_2=3+\sqrt{6}$. Parmi les deux solutions précédentes, seule $x_2\geq 2$. Ainsi : $\boxed{S=\{3+\sqrt{6}\}.}$

(e) Pour commencer, les termes de l'inéquation sont définis si et seulement si $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$. De plus, le signe de $2-x$ est donné par le diagramme suivant :

	2		x
$+$	0	$-$	$2-x$

On distingue alors les deux cas suivants :
- si $x\leq 2$. Alors $2-x\geq 0$. Ainsi, pour $x\geq -1$, $\sqrt{x+1}>2-x \Leftrightarrow x+1>(2-x)^2$ car $2-x\geq 0$
$\Leftrightarrow x+1>4-4x+x+x^2$
$\Leftrightarrow x^2-5x+3<0$.
On étudie alors le signe du trinôme : x^2-5x+3. Pour cela, nous calculons le discriminant $\Delta=13>0$. On obtient alors deux solutions simples pour l'équation $x^2-5x+3=0$: $x_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$. Puisque $a=1>0$, le signe du trinôme est donc donné par le diagramme suivant :

-1	x_1	2	x_2		x
	$+$ 0	$-$	0	$+$	x^2-5x+3

On en déduit $S_1=]x_1;\ 2]$.
- Si $x>2$. Alors $2-x<0$. Ainsi, pour $x\geq -1$, l'inégalité $\sqrt{x+1}>2-x$ est toujours vérifiée puisque la racine carrée d'un nombre est toujours positive. On en déduit $S_2=]2;+\infty[$.

Finalement, $\boxed{S=]x_1,+\infty[.}$

(f) Pour commencer, les termes de l'inéquation sont définis si et seulement si $\frac{x-3}{x+2} > 0$. Le signe de cette expression est donné par le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{x+2}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Les termes de l'inéquation sont donc définis si et seulement si $x \in]-\infty;\ -2[\cup]3;\ +\infty[$.

Pour $x \in]-\infty;\ -2[\cup]3;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) > \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} > e^{1/2} \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante}\\
&\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} - \sqrt{e} > 0\\
&\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{e})x - (3+2\sqrt{e})}{x+2} > 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sqrt{e})x - (3+2\sqrt{e}) < 0 \text{ car } x+2<0 \text{ pour } x \in]-\infty;\ -2[\cup]3;\ +\infty[\\
&\Leftrightarrow (1-\sqrt{e})x < 3+2\sqrt{e}\\
&\Leftrightarrow x > \frac{3+2\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}} \text{ car } 1-\sqrt{e} < 0\\
&\Leftrightarrow x > -\frac{3+2\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S = \left]-\frac{3+2\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1};\ -2\right[}$.

2. Le discriminant de cette expression est $\Delta = 20 = (2\sqrt{5})^2 > 0$. L'équation admet donc deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{4-2\sqrt{5}}{-2} = \sqrt{5}-2, x_2 = x_1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}-2$. Ainsi, $\boxed{S = \{x_1;\ x_2\}}$.
Posons $X = x^2$. L'expression devient alors : $-X^2 - 4X + 1$. D'après précdemment, la factorisation est : $a(X-x_1)(X-x_2) = -(X-x_1)(X-X_2)$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
-x^4 - 4x^2 + 1 \quad &= -(x^2-x_1)(x^2-x_2)\\
&= -(x^2-(\sqrt{5}-2))(x^2+\sqrt{5}+2)\\
&= \boxed{-\left(x-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(x+\sqrt{\sqrt{5}-2})(x^2+\sqrt{5}+2\right)} \text{ car } \sqrt{5}-2>0.
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de l'expression E ci-dessus, on fait alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$+\infty$
$x-\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{\sqrt{5}-2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2+\sqrt{5}+2$		$+$		$+$		$+$	
E		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2:
On note D le domaine de définition des fonctions à étudier pour chaque exemple ci-dessous.

(a) $D = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\} =]0;\ +\infty[$. Posons $f(x) = x(\ln(x))^2$. Nouas avons $f(x) = xu(x)$, avec $u(x) = \ln(x)^2$. Par produit de fonctions dérivables, u et f sont dérivables sur D, et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in D,\quad f'(x) \quad &= u(x) + xu'(x)\\
&= (\ln(x))^2 + x(\tfrac{2}{x}\ln(x)) \text{ car } u'(x) = \tfrac{2}{x}\ln(x)\\
&= (\ln(x))^2 + 2\ln(x)\\
&= \boxed{\ln(x)(\ln(x)+2)}.
\end{aligned}$$

(b) $D = \{x \in \mathbb{R}/x^2+3x+4 \geq 0\}$. On calcule le discrimant du trinôme : $\Delta = -7$. Puisque $a = 1 > 0$, le trinôme est toujours srictement positif, d'où $\boxed{D = \mathbb{R}}$. Posons $f(x) = e^{\sqrt{x^2+3x+4}}$. Nous avons : $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$. Puisque le trinôme ne s'annule jamais, par composition, u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+4}}$. Toujours par composition, f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) \quad &= u'(x)e^{u(x)}\\
&= \boxed{\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+4}}e^{\sqrt{x^2+3x+4}}}.
\end{aligned}$$

(c) $D = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0\right\}$. Puisque $x^2+1>0$, le signe du quotient est donné par le signe du numérateur, qui est un trinôme très classique : il est strictement positif à l'extérieur des racines qui sont -1 et 1. Ainsi : $\boxed{D =]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[}$. Posons $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$. Alors $f(x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Puisque $x^2+1>0$, par quotient u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Par composition, f est dérivable sur D et :
$$\begin{aligned}
\forall x \in D,\quad f'(x) \quad &= \frac{u'(x)}{u(x)}\\
&= \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}\\
&= \boxed{\frac{4x}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}}.
\end{aligned}$$

(d) $D = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{1-\ln(x)}{1+\ln(x)} \geq 0\right\}$. Les termes de l'inéquation précédente sont définis si et seulement si $x > 0$.
Nous avons de plus : $1-\ln(x) > 0 \quad \Leftrightarrow 1 > \ln(x)$
$\Leftrightarrow e > x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
En raisonnant exactement de la même façon : $1+\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$. On fait alors un tableau de signes :

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$1+\ln(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$		$+$	
$\frac{1-\ln(x)}{1+\ln(x)}$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{D =]1/e;\ e]}$.

Posons $f(x) = \sqrt{\frac{1-\ln(x)}{1+\ln(x)}}$. Nous avons $f(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{1-\ln(x)}{1+\ln(x)}$. Puisque $1+\ln(x) \neq 0$ pour $x \in D$, par quotient de fonctions dérivables, u est dérivable sur D, et :
$\forall x \in D, u'(x) = \frac{-(1/x)\times(1+\ln(x)) - (1-\ln(x))\times(1/x)}{(1+\ln(x))^2} = -\frac{2}{x(1+\ln(x))^2}$.

De plus, pour $x \in D \setminus \{e\}, u(x) > 0$. Ainsi, par composition, f est dérivable sur $D' =]\frac{1}{e};\ e[$,et : $\forall x \in D'$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \boxed{\sqrt{\frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}} \times \frac{-1}{x(1+\ln(x))^2}}.$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2.

Consignes générales :
- *La durée de l'épreuve est de 3 heures ;*
- *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
- *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
- *Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
- *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–Questions en vrac–

Les 6 questions sont indépendantes

1. Résoudre l'inéquation : $e^{x^2} > 4e^{-x}$.
2. Résoudre l'équation : $\mathrm{ch}(x) = 3$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$ et pour tout $x \leq 0, \sin(x) \geq x$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.
4. Résoudre l'équation : $z^2 - (8+6i)z - 38 = 0$.
5. On pose : $B = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{13}}{(\sqrt{3}-3i)^{14}}$.
   (a) Mettre B sous forme algébrique.
   (b) Résoudre : $e^z = B$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $A = \dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$.
   (a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles A est définie.
   (b) Soit x tel que A soit définie. On note : $\mathrm{Re}(A)$ la partie réelle de A, et $\mathrm{Im}(A)$ la partie imaginaire de A. Montrer que ;
   $$\mathrm{Re}(A) = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}; \quad \mathrm{Im}(A) = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
   (c) En déduire la partie réelle de : $Z = \dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}e^{ix}$.

Exercice 2

–Un calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$–

1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ (Rappel : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$).
2. Résoudre l'équation : $16x^4 - 16x^2 + 2 - \sqrt{3} = 0$.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.
4. En déduire : $\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$.

T.S.V.P

Problème 1

–Étude d'une fonction trigonométrique–

On considère la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{-\cos(x) + \sqrt{3}}$.

1. **(Question préliminaire)** Déterminer r et θ tels que : $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = r\cos(\theta)$, puis résoudre l'inéquation : $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$.
2. Déterminer le domaine de définition de f.
3. Expliquer pourquoi il est possible de restreindre l'étude de f sur $[-\pi;\ \pi]$.
4. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis donner une expression de $f'(x)$ sous la forme la plus factorisée possible.
5. À l'aide la question préliminaire, en déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi;\ \pi]$.
6. Déterminer une équation réduite de la tangente en 0, puis tracer le plus précisément possible la courbe représentative de f.

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆

CORRECTION DU DS 2.

Exercice 1:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $e^{x^2} > 4e^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(e^{x^2}\right) > \ln(4e^{-x})$, car ln est strictement croissante
$\Leftrightarrow x^2 > \ln(4) + \ln(e^{-x})$, (propriétés algébriques du logarithme)
$\Leftrightarrow x^2 > \ln(4) - x$
$\Leftrightarrow x^2 + x - \ln(4) > 0.$
On étudie le trinôme précédent : le discriminant est : $\Delta = 1 + 4\ln(4) > 0$, nous avons donc deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4\ln(4)}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4\ln(4)}}{2}$. Puisque $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement positif à l'extérieur des racines, donc $\boxed{S =]-\infty;\ x_1[\cup]x_2;\ +\infty[}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $\mathrm{ch}(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 3$
$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 6$
$\Leftrightarrow e^x(e^x + e^{-x}) = 6e^x$ car $e^x \neq 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 6e^x$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x + 1 = 0.$
Posons $X = e^x$, l'équation précédente devient alors : $X^2 - 6X + 1 = 0$. On résout le trinôme. Le discriminant $\Delta = 32 > 0$. Nous avons donc deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) = 3 &\Leftrightarrow e^x = \underbrace{3-2\sqrt{2}}_{>0} \text{ ou } e^x = 3+2\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(3-2\sqrt{2}\right) \text{ ou } \ln(e^x) = \ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \text{ car ln est strictement croissante}\\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(3-2\sqrt{2}\right) \text{ ou } x = \ln\left(3+2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S = \left\{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right);\ \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right\}}$.

3. (a) Posons : $f(x) = x - \sin(x)$. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ car $\cos(x) \leq 1$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,
   - pour $x \geq 0$, nous avons : $f(x) \geq \underbrace{f(0)}_{=0} \Leftrightarrow \boxed{\sin(x) \leq x}$;
   - pour $x \leq 0$, nous avons : $f(x) \leq \underbrace{f(0)}_{=0} \Leftrightarrow \boxed{\sin(x) \geq x}$;

   (b) L'inégalité $\cos(x) \leq 1$ est claire. Pour démontrer l'autre inégalité, posons $f(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie sur R et est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x) + x$. Le signe de la dérivée a été étudié précédemment, nous avons donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

   Nous en déduisons donc que pour tout réel x, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)}$.

4. On calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 180 + 96i$. On cherche alors $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = \Delta$. Pour ceci, nous posons : $w = x + iy$n, avec $(x;\ y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}w^2 = \Delta &\Leftrightarrow \begin{cases} w^2 = \Delta \\ |w^2| = |\Delta| \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 180 + 96i \\ x^2 + y^2 = 204 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 180 \\ x^2 + y^2 = 204 \\ 2xy = 96 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 384 \\ 2y^2 = 24 \\ xy = 48 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 192 \\ y^2 = 12 \\ xy = 48 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8\sqrt{3} \text{ ou } x = -8\sqrt{3} \\ x = 2\sqrt{3} \text{ ou } x = -2\sqrt{3} \\ xy = 48 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 8\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ car } xy > 0\end{aligned}$$

Nous prenons donc par exemple : $w = 2\sqrt{3}(4+i)$. Les solutions du trinôme sont donc : $z_1 = \frac{-b-w}{2a} = 4 - 4\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})$, $z_2 = \frac{-b+w}{2a} = 4 + 4\sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})$.
Finalement : $\boxed{S = \left\{4 - 4\sqrt{3} + i(3-\sqrt{3});\ 4 + 4\sqrt{3} + i(3+\sqrt{3})\right\}}$.

5. (a) On met dans un premier temps sous forme trigonométrique : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 3i$. Le numérateur est classique : $z_1 = 2e^{i5\pi/6}$. Pour le deuxième, le module est $2\sqrt{3}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/3}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}B &= \frac{z_1^{13}}{z_2^{14}}\\ &= \frac{2^{13}e^{i65\pi/6}}{(2\sqrt{3})^{14}e^{-i14\pi/3}}\\ &= \frac{e^{i93\pi/6}}{2.3^7}\end{aligned}.$$

   On cherche la mesure principale de $\frac{93\pi}{6}$. Pour ceci, $\frac{93\pi/6}{2\pi} = \frac{93}{12} = 7,75$. Le nombre de tours est donc 8. Ainsi : $\frac{93\pi}{6} - 8 \times 2\pi = \frac{(93-96)\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$. Par conséquent : $B = \frac{1}{3^7}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2.3^7}i}$.

   (b) On pose $z = a + ib$, avec $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$. Alors la forme trigonométrique de e^Z est : $e^a e^{ib}$. Par identification des formes trigonométriques, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}e^z = B &\Leftrightarrow e^a = \frac{1}{2.3^7}e^{-i\pi/2}.\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(e^a) = \ln\left(\frac{1}{2.3^7}\right) \\ b = \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \text{ car ln est strictement croissante}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -7\ln(3) - \ln(2) \\ b = \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \text{ (propriétés algébriques du logarithme).}\end{aligned}$$

   Finalement, $\boxed{S = \left\{-7\ln(3) - \ln(2) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

6. (a) A n'est pas définie lorsque : $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x = 0[2\pi]$. Ainsi, A est définie pour $\boxed{x \neq 0[2\pi]}$.

(b) On factorise par l'angle moitié :
$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{inx/2}\left(e^{inx/2}-e^{-inx/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)} \\ &= \frac{e^{inx/2}2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{e^{ix/2}2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \text{(formules d'Euler)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i(n-1)x/2} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right) + i\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Re}(A) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right),\ \mathrm{Im}(A) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right).}$

(c) $Z = (\mathrm{Re}(A)+i\mathrm{Im}(A))(\cos(x)+i\sin(x)) = \mathrm{Re}(A)\cos(x)-\mathrm{Im}(A)\sin(x)+i(\mathrm{Im}(A)\cos(x)+\mathrm{Re}(A)\sin(x))$.
Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Re}(Z) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\cos(x) - \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin(x).}$$

Exercice 2:

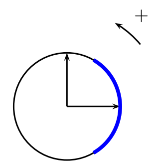
1. D'après la formule de De Moivre :
$$\begin{aligned} \cos(4x)+i\sin(4x) &= (\cos(x)+i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)i\sin(x)) + 6\cos^3(x)(i\sin(x))^2 + 4\cos^2(x)(i\sin(x))^3 + (i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 5i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x) \\ &= \left(\cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)\right) + i\left(4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)\right). \end{aligned}$$
En identifiant les parties réelles, nous obtenons alors :
$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2 \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x) + 6\cos^4(x) + 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x) \\ &= \boxed{8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.} \end{aligned}$$
2. On pose $X = x^2$, on se ramène alors à l'équation : $16X^2 - 16X + 2 - \sqrt{3} = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 64(2+\sqrt{3}) > 0$. Nous avons alors deux solutions réelles distinctes : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$; $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

   Ainsi :
$$\begin{aligned} 16x^4 - 16x^2 + 2 - \sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow x^2 = \tfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} \text{ ou } x^2 = \tfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \text{ ou } x = -\tfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \text{ ou } x = \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \text{ ou } x = -\tfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}. \end{aligned}$$
   Finalement, $\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2};\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2};\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2};\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\right\}.}$
3. En prenant $x = \frac{\pi}{24}$ dans l'expression trouvée au 1., nous obtenons :
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(4\frac{\pi}{24}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + 1.$$
   Par conséquent : $8\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow 16\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - 16\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + 2 - \sqrt{3} = 0$.

   Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ est solution de l'équation : $16x^4 - 16x^2 + 2 - \sqrt{3} = 0$. Cette dernière a été précédemment résolue. $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ correspond donc à l'une des quatre expressions avec radicaux obtenues en 2.. Or, $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$. Il ne reste donc que deux possibilités : $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \approx 0,99$ ou $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \approx 0,13$. Pour trancher, on utilise l'encadrement $0 < \frac{\pi}{24} < \frac{\pi}{6}$, ce qui donne, la fonction cosinus étant strictement décroissante sur $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right]$: $\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\approx 0,87} < \frac{\pi}{24} < 1$. Par conséquent :
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}.}$$
4. Pour calculer, $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$, nous utilisons la relation fondamentale : $\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = 1$, ce qui donne $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)}$ (car $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$). Ainsi :
$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{\pi}{24}\right) &= \sqrt{1 - \tfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}} \\ &= \sqrt{\tfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}} \\ &= \tfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \\ &= \tfrac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4} \\ &= \tfrac{\sqrt{4(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}}{4} \\ &= \tfrac{\sqrt{8-4\sqrt{2+\sqrt{3}})}}{4} \\ &= \tfrac{\sqrt{8-2\sqrt{4(2+\sqrt{3}))}}}{4} \\ &= \tfrac{\sqrt{8-2\sqrt{8+4\sqrt{3}))}}}{4} \end{aligned}$$
   On remarque enfin que $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$, ce qui prouve que $\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$, puisque $\sqrt{8+4\sqrt{3}} > 0$. Finalement, nous obtenons :
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}}{4}.}$$

Problème 1:

1. $$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \tfrac{1}{2}\sin(x)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right) \\ &= \boxed{2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}. \end{aligned}$$
   D'après précédemment : $$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 &\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) > 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) > \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$
   On pose $X = x + \frac{\pi}{6}$. L'inéquation devient alors : $\cos(X) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Graphiquement :



$$S_1 = \left]\tfrac{-\pi}{3};\ \tfrac{\pi}{3}\right[\ [2\pi]$$

   Ainsi, $$\begin{aligned} \cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &\Leftrightarrow x + \tfrac{pi}{6} \in \left]\tfrac{-\pi}{3};\ \tfrac{\pi}{3}\right[\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \in \left]\tfrac{-\pi}{3} - \tfrac{\pi}{6};\ \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{6}\right[\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \in \left]\tfrac{-\pi}{2};\ \tfrac{\pi}{6}\right[\ [2\pi] \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{S = \left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right[\quad [2\pi].}$

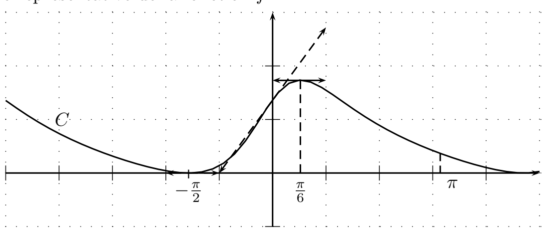
2. Puisque $-\cos(x) > -1$, nous avons : $-\cos(x)+\sqrt{3} > 2$. Ainsi, le dénominateur ne s'annule jamais, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
3. f est 2π-périodique. En effet :
$$\begin{aligned} f(x+2\pi)) &= \frac{\sin(x+2\pi)+1}{-\cos(x+2\pi)+\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sin(x)+1}{-\cos(x)+\sqrt{3}} \text{ car } \cos(x+2\pi)=\cos(x) \text{ et} \sin(x+2\pi)=\sin(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$
Ainsi, il suffit de restreindre l'étude de la fonction à un intervalle de longueur π : $[-\pi;\ \pi]$. On en déduira la courbe représentative sur $\mathbb{R}$ en translatant la courbe représentative obtenue sur $[-\pi;\ \pi]$.
4. Pour tout réel x, nous avons $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = \sin(x)+1$ et $v(x) = -\cos(x)+\sqrt{3}$. Par somme, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$et $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$. De plus, v ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)(-\cos(x)+\sqrt{3})-\sin(x)(\sin(x)+1)}{(-\cos(x)+\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-\cos^2(x)+\sqrt{3}\cos(x)-\sin^2(x)-\sin(x)}{(-\cos(x)+\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-\underbrace{(\cos^2(x)+\sin^2(x))}_{=1}}{(-\cos(x)+\sqrt{3})^2} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-1}{(-\cos(x)+\sqrt{3})^2}}. \end{aligned}$$
5. Pour obtenir les variations sur $[0;\ \pi]$, on étudie le signe de f'. Un carré étant toujours positif, d'après l'expression obtenue en 2., f' est du signe de $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-1$. Or, pour $x \in [-\pi;\ \pi]$, $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos(x)-\sin(x) > 1 \Leftrightarrow x \in \left[0;\ \frac{\pi}{6}\right[$. On en déduit alors le tableau de variations :

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	↘	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

6. L'équation de la tangente en 0 est de la forme : $y = f'(0)x + f(0)$. Ici, $f'(0) = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. De plus, $f(0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Par conséquent,

$\boxed{\text{l' équation de la tangente à la courbe représentative en 0 est : } y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(x+2).}$

On note C le courbe représentative de la fonction f.



⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir surveillé n^o 3.

Consignes générales :
- *La durée de l'épreuve est de 3 heures ;*
- *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
- *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
- *Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
- *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–Deux exercices indépendants–

1. On considère le problème de Cauchy : (S) $\begin{cases} y''+2y'+2y = x(-x+\frac{1}{2})e^{-x} \\ y(0)=a \\ y'(0)=b \end{cases}$, avec a et b deux réels fixés.
   (a) Résoudre (S).
   (b) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(4+x-2x^2)e^{-x}$, puis calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. On considère le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et M un point point d'affixe z. Soit le nombre complexe : $Z = \dfrac{z-4-2i}{z+2+i}$. Préciser la nature de l'ensemble des points du plan tels que (a) Z est réel ; (b) Z est imaginaire pur ; (c) $|Z| = 2$.

Exercice 2

–Un exemple de droite de Simson–

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points : $A(4;\ 6)$, $B(5;\ 5)$ et $C(6;\ 2)$.

1. (a) Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (AC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ puis les coordonnées de leur point d'intersection.
   (c) Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est à dire le cercle de centre le point d'intersection des médiatrices et passant par A, B et C.
2. Soit $M(a;\ b)$ un point du plan. On note H_1 le projeté orthogonal de M sur (AB), H_2 le projeté orthogonal de M sur (AC) et H_3 le projeté orthogonal de M sur (AC).
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (AB) passant par M en fonction de a et b. En déduire les coordonnées de H_1.
   (b) En effectuant des calculs similaires, nous obtenons : $H_2\left(\frac{a-2b+28}{5};\ \frac{-2a+4b+14}{5}\right)$ et $H_3\left(\frac{a-3b+60}{10};\ \frac{-3a+9b+20}{10}\right)$. Calculer det $\left(10\overrightarrow{H_1H_2}, 10\overrightarrow{H_2H_3}\right)$ en fonction de a et b. En déduire H_1, H_2, H_3 alignés $\Leftrightarrow$ M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Problème 1

–D'après concours ATS 2009–

On note $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation cartésienne $y = \dfrac{1}{x}$ dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan. On souhaite déterminer les coordonnées (a, b) du centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ qui passe par O et qui est tangent en un point $M\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$, à $(\mathcal{H})$.

Dire que le cercle est tangent au point M à l'hyperbole $(\mathcal{H})$, c'est dire que $M \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{H})$ et que la normale $(\mathcal{N})$ à $(\mathcal{H})$ au point M contient le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$.

1. (a) Donner les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{T}$ tangent à $(\mathcal{H})$ au point $M\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$.

   (b) En déduire une équation cartésienne de la normale $(\mathcal{N})$ à $(\mathcal{H})$ au point $M\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$.

   (c) Écrire que le point $\Omega(a, b)$ appartient à $(\mathcal{N})$ et en déduire qu'une relation (1) liant a, b et t est :
   $(1) : at^3 - bt = t^4 - 1$
2. Écrire que $O\Omega^2 = M\Omega^2$ et en déduire qu'une relation (2) liant a, b et t est :
   $(2) : at^3 + bt = \dfrac{1}{2}\left(t^4 + 1\right)$
3. Déduire des relations (1) et (2) une représentation paramétrique des centres Ω quand t varie.
4. On souhaite étudier la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :
   $$x(t) = \frac{3t^4 - 1}{4t^3} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{-t^4 + 3}{4t} \text{ avec } t \in \mathbb{R}^*$$
   (a) Montrer que la courbe (Γ) admet une symétrie de centre O.

   (b) Calculer $x\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et $y\left(\dfrac{1}{t}\right)$. En déduire une nouvelle symétrie pour la courbe (Γ).

   (c) Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier les variations de $x(t)$, $y(t)$ quand le paramètre t appartient à l'intervalle $]0;\ 1]$.
5. Donner le tableau des variations conjointes de $x(t)$, $y(t)$ pour $t \in]0;\ 1]$. Donner les coordonnées du point $A = (x(1), y(1))$, en déduire celles de $B = (x(-1), y(-1))$.
6. Voici (fig. 1) dans le repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ les graphes de $(\mathcal{H})$ en pointillé et de (Γ) en gras, et les première et deuxième bissectrices.
   Les deux branches de (Γ) sont divisées par la première bissectrice en 4 parties (Γ_1), (Γ_2) limitées par A, (Γ_3), (Γ_4) limitées par B.

   (a) Préciser, en le justifiant, la partie de (Γ) obtenue quand $t \in]0;\ 1]$.

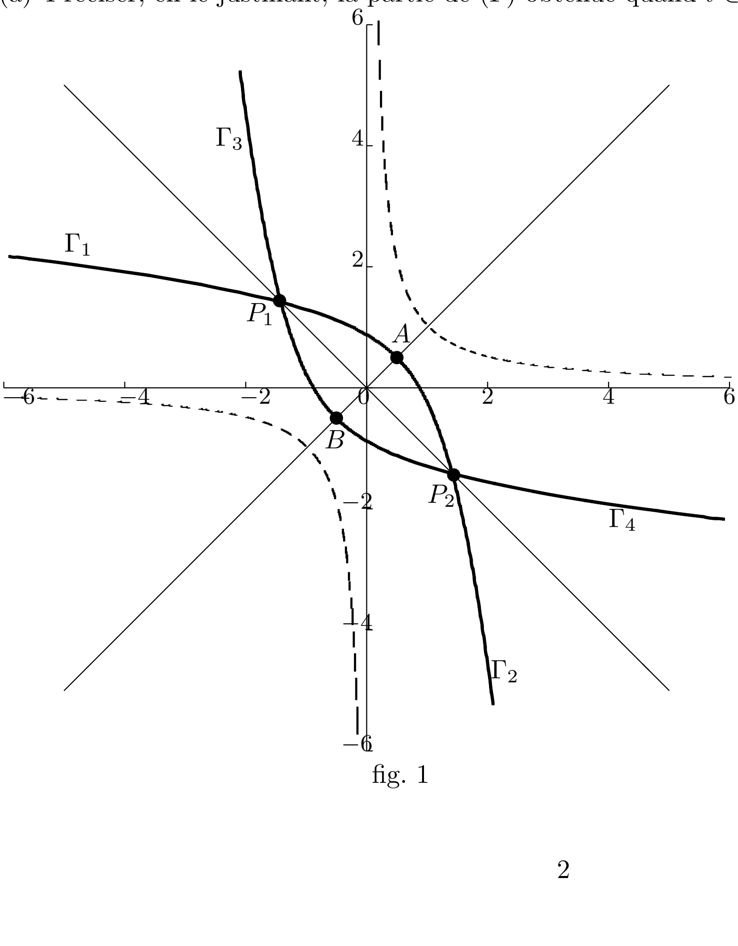


fig. 1

   (b) Déterminer les paramètres t_1 et t_2 des points doubles P_1 et P_2, (utiliser le fait qu'ils sont invariants si on change t en $-\dfrac{1}{t}$). On ramènera leur recherche à la résolution de l'équation
   $$T^3 - 3T^2 - 3T + 1 = 0,$$
   de racine évidente -1, et on justifiera qu'il n'y a que deux points doubles, et que $t_2 = \dfrac{1}{t_1}$.

   (c) Déterminer les coordonnées de P_1 (on pourra calculer d'abord $y(t_1)$ puis $y(t_1)^2$ pour trouver une simplification).

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

CORRECTION DU DS 3.

Exercice 1:

1.
(a) • **Équation homogène :** L'équation caractéristique est : $r^2+2r+2=0$. Le discriminant est égal à $-4<0$. Nous avons donc deux solutions complexes conjuguées : $r_1=-1-i$, $r_2=-1+i$. Par conséquent :

$$\boxed{S_H=\left\{(A\cos(x)+B\sin(x))\,e^{-x},(A;\ B)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

• **Solution particulière :** On cherche y_P de la forme : $y_P(x)=\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{Q(x)}e^{-x}$, avec $(a;\ b;\ c)\in\mathbb{R}^3$. Nous avons ainsi :

$$\begin{array}{ll} y_P \text{ solution} & \Leftrightarrow y_P''(x)+2y_P'(x)+2y_Px)=x(-x+\frac{1}{2})e^{-x} \\ & \Leftrightarrow (Q''(x)-2Q'(x)+Q(x))e^{-x}+2(Q'(x)-Q(x))e^{-x}+2Q(x)e^{-x}=x(-x+\frac{1}{2})e^{-x} \\ & \Leftrightarrow Q''(x)+Q(x)=-x^2+\frac{1}{2}x \text{ car } e^{-x}\neq 0 \\ & \Leftrightarrow ax^2+bx+(2a+c)=-x^2+\frac{1}{2}x \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-2a=2 \end{array}\right. \end{array}.$$

Une solution particulière est donc : $\boxed{y_P(x)=\left(-x^2+\dfrac{1}{2}x+2\right)e^{-x}.}$

• **Synthèse :** L'ensemble des solutions S de l'équation différentielle $y''+2y'+2y=x(-x+\frac{1}{2})e^{-x}$ est donc : $\boxed{S=\left\{\left(A\cos(x)+B\sin(x)-x^2+\dfrac{1}{2}x+2\right)e^{-x},(A;\ B)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$

• **Problème de Cauchy :** D'après précédemment :

$$\begin{array}{ll} (S) & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x)=\left(A\cos(x)+B\sin(x)-x^2+\frac{1}{2}x+2\right)e^{-x} \\ y(0)=a \\ y'(0)=b \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x)=\left(A\cos(x)+B\sin(x)-x^2+\frac{1}{2}x+2\right)e^{-x} \\ A+2=a \\ y'(0)=b \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x)=\left(A\cos(x)+B\sin(x)-x^2+\frac{1}{2}x+2\right)e^{-x} \\ A+2=a \\ -A+B-\frac{3}{2}=b \end{array}\right. \\ & \text{car } y'(x)=((-A+B)\cos(x)-(B+A)\sin(x)+x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2})e^{-x} \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x)=\left(A\cos(x)+B\sin(x)-x^2+\frac{1}{2}x+2\right)e^{-x} \\ A=a-2 \\ B=b+a-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \boxed{y(x)=\left((a-2)\cos(x)+\left(b+a-\dfrac{1}{2}\right)\sin(x)-x^2+\dfrac{1}{2}x+2\right)e^{-x}.} \end{array}$$

(b) D'après la question précédente, l'unique solution du problème de Cauchy est $f(x)=(-x^2+\frac{1}{2}x+2)e^{-x}$ si et seulement si : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-\frac{3}{2} \end{array}\right..}$

• **Limite en $+\infty$:** Nous avons $f(x)=x^2e^{-x}\left(-1+\frac{1}{2x}+\frac{2}{x^2}\right)$. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$, et par opérations élémentaires, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=-1$, donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.}$

• **Limite en $-\infty$:** Nous avons $f(x)=\frac{1}{e^x}x^2\left(-1+\frac{1}{2x}+\frac{2}{x^2}\right)$. D'une part : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$, donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=-1$. Ainsi, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.}$

2. Nous remarquons que Z est défini si et seulement si $z\neq-2-i$. On pose $z=a+ib$ avec $(a;\ b)\in\mathbb{R}^2$. On met Z sous forme algébrique :

$$\begin{array}{rl} Z & =\dfrac{a+ib-4-2i}{a+ib+2+i} \\ & =\dfrac{(a-4)+i(b-2)}{(a+2)+i(b+1)} \\ & =\dfrac{(a-4)+i(b-2))((a+2)-i(b+1)}{(a+2)^2+(b+1)^2} \\ & =\dfrac{(a-4)(a+2)-i(a-4)(b+1)+i(b-2)(a+2)+(b-2)(b+1)}{(a+2)^2+(b+1)^2} \\ & =\dfrac{(a^2-2a-8+b^2-b-2)+i(-(ab+a-4b-4)+(ab+2b-2a-4))}{(a+2)^2+(b+1)^2} \\ & =\dfrac{a^2+b^2-2a-b-10}{(a+2)^2+(b+1)^2}+i\dfrac{-3a+6b}{(a+2)^2+(b+1)^2} \end{array}$$

(1) Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est à dire si et seulement si : $\left\{\begin{array}{l} -3a+6b=0 \\ (a;\ b)\neq(-2;\ -1) \end{array}\right.\Leftrightarrow$ $M(a;\ b)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne : $x-2y=0$, puisque $(-2;\ -1)$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

(2) Z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est à dire si et seulement si : $\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2-2a-b=10 \\ (a;\ b)\neq(-2;\ -1) \end{array}\right.\Leftrightarrow M(a;\ b)$ appartient à l'ensemble d'équation : $x^2+y^2-2x-y=10$ privé du point $(-2;\ -1)$. De plus : $x^2+y^2-2x-y=10\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$. L'ensemble des points M du plan tels que Z est imaginaire pur est donc le $\boxed{\text{cercle de centre } \Omega(1;\ \frac{1}{2}) \text{ et de rayon } R=\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ privé du point } (-2;\ -1).}$

(3) D'après précédemment, $Z=\dfrac{a-4+i(b-2)}{a+2+i(b+1)}$. Les propriétés algébriques du module entraînent : $|Z|=\dfrac{|a-4+i(b-2)|}{|a+2+i(b+1)|}=\dfrac{\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2}}{\sqrt{(a+2)^2+(b+1)^2}}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rl} |Z|=2 & \Leftrightarrow |Z|^2=4 \text{ car } |Z|\geq 0 \\ & \Leftrightarrow (a-4)^2+(b-2)^2=4(a+2)^2+4(b+1)^2 \\ & \Leftrightarrow a^2-8a+16+b^2-4b+4=4a^2+16a+16+4b^2+8b+4 \\ & \Leftrightarrow 3a^2+3b^2+24a+12b=0 \\ & \Leftrightarrow a^2+b^2+8a+4b=0 \\ & \Leftrightarrow (a+4)^2+(b+2)^2=20 \end{array}$$

L'ensemble recherché est donc le $\boxed{\text{cercle de centre } A\,(-4;\ -2) \text{ et de rayon } 2\sqrt{5}.}$

Exercice 2:

1. (a) • **Équation cartésienne de (AB) :**
$(AB)=\{M\in\mathcal{P}\ /\ \det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB})=0\}$. Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, nous avons : $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB})=(x-4)\times(-1)-(y-6)=-x-y+10$. Une équation cartésienne de (AB) est donc : $\boxed{x+y-10=0.}$

- **Équation cartésienne de (AC) :**
  $(AC) = \{M \in \mathcal{P} \ / \ \det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AC}) = 0\}$. Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, nous avons : $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AC}) = (x-4)\times(-4) - 2(y-6) = -4x - 2y + 28$. Une équation cartésienne de (AC) est donc : $\boxed{2x + y - 14 = 0.}$

(b) - **Équation cartésienne de la médiatrice de (AB) :**
  Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : $(\frac{9}{2};\ \frac{11}{2})$. La médiatrice de (AB) est par définition l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$. Comme $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-\frac{9}{2} \\ y-\frac{11}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, nous avons : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = (x-\frac{9}{2})\times(-1) + (y-\frac{11}{2}) = -x+y+1$. Une équation cartésienne est donc : $\boxed{-x+y-1=0.}$

- **Équation cartésienne de la médiatrice de (AC) :**
  Le milieu J de $[AC]$ a pour coordonnées : $(5;\ 4)$. La médiatrice de (AC) est par définition l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AC} = 0$. Comme $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, nous avons : $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AC} = (x-5)\times 2 + (y-4)\times(-4) = 2x - 4y + 6$. Une équation cartésienne est donc : $\boxed{-x+2y-3=0.}$

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites, s'il existe, sont les solutions du système : $\begin{cases} -x+y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$ Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} -x+y=1 \\ -y=-2 \end{cases}$ (la deuxième ligne de ce système s'obtient en faisant la différence des deux lignes du premier système). Ainsi le système admet une unique solution, ce qui prouve que les deux droites sont sécantes et que le point d'intersection $\boxed{\Omega \text{ a pour coordonnées : } (1;\ 2).}$

(c) Par définition, Ω est le centre du cercle circonscrit. Le rayon du cercle est égal à $\Omega A = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^3} = 5$. Une équation cartésienne est donc : $\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.}$

2. (a) - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à notre droite. Une équation cartésienne de cette dernière est donc de la forme : $x - y + c = 0$. Comme M appartient à cette droite, nous en déduisons : $c = -(a-b)$. Une équation cartésienne est donc de la forme : $\boxed{x - y - (a-b) = 0.}$
   - Les coordonnées de H_1 sont solutions du système :

$$\begin{cases} x+y=10 \\ -x+y=-a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ 2y=-a+b+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-a+b+10}{2} \\ x=\frac{10+a-b}{2}. \end{cases}$$

   Ainsi : $\boxed{H_1\left(\frac{10+a-b}{2};\ \frac{10+b-a}{2}\right).}$

(b) -
$$\begin{aligned} \det(10\overrightarrow{H_1H_2}, 10\overrightarrow{H_2H_3}) &= \begin{vmatrix} -3a+b+6 & -a+b+4 \\ a+3b-22 & a+b-8 \end{vmatrix} \\ &= -3a^2 + ba + 6a - 3ab + b^2 - 8b + 24a + 6b - 48 \\ &\quad -(-a^2 + ba + 4a - 3ab + 3b^2 + 12b + 22a - 22b - 88) \\ &= -2a^2 - 2b^2 + 4a + 8b + 40 \\ &= \boxed{-2(a^2 + b^2 - 2a - 4b - 20).} \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} H_1, H_2, H_3 \text{ alignés} &\Leftrightarrow \det(10\overrightarrow{H_1H_2}, 10\overrightarrow{H_2H_3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 4b - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 25 \\ &\boxed{\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.}} \end{aligned}$$

Problème 1:

1. (a) On pose : $x(t) = t$ et $y(t) = \frac{1}{t}$. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$ et dérivables sur ce même ensemble par opérations élémentaires, et : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $x'(t) = 1$, $y'(t) = -\frac{1}{t^2}$. Un vecteur $\overrightarrow{T}$ tangent à l'hyperbole en M est donc $\boxed{\overrightarrow{T}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}}$.

(b) $(\mathcal{N}) = \left\{N(x;\ y) \in \mathcal{P} \ / \ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{T} = 0\right\}$. Puisque : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x-t \\ y-\frac{1}{t} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\begin{aligned} N(x;\ y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow x - t - \tfrac{1}{t^2}(y - \tfrac{1}{t}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \tfrac{y}{t^2} + \tfrac{1}{t^3} - t = 0 \end{aligned}$$

Quitte à multiplier par $t^3 \neq 0$, une équation cartésienne de $(\mathcal{N})$ est donc : $\boxed{t^3x - ty + 1 - t^4 = 0.}$

(c) On note $\Omega(a;\ b)$. Puisque $\Omega \in (\mathcal{N})$, nous avons : $t^3a - bt + 1 - t^4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{at^3 - bt = t^4 - 1}$: (1).

2. Puisque Ω et O appartiennent à $(\mathcal{C})$, nous avons : $\Omega O^2 = \Omega M^2 \Leftrightarrow O\Omega^2 = M\Omega^2$. Dans le repère orthonormé considéré : $O\Omega^2 = a^2 + b^2$ et $M\Omega^2 = (a-t)^2 = (b - \frac{1}{t})^2 = a^2 + b^2 - 2at - 2\frac{b}{t} + t^2 + \frac{1}{t^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} O\Omega^2 = M\Omega^2 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2at - 2\tfrac{b}{t} + t^2 + \tfrac{1}{t^2} \\ &\Leftrightarrow 2at + 2\tfrac{b}{t} = t^2 + \tfrac{1}{t^2} \\ &\Leftrightarrow 2at^3 + bt = t^4 + 1 \ \text{ (on multiplie par} t^2 \neq 0 \text{)} \\ &\Leftrightarrow \boxed{at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1)} \ (2) \end{aligned}$$

3. En sommant (1) et (2), nous obtenons : $2at^3 = \frac{1}{2}(3t^3 - 1) \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{3t^3 - 1}{4t^3}}$. De la même façon, en faisant (2)-(1), nous obtenons : $2bt = \frac{1}{2}(-t^4 + 3) \Leftrightarrow \boxed{b = \frac{-t^4 + 3}{4t}.}$

4. (a) $\begin{cases} x(-t) = \frac{3(-t)^4 - 1}{4(-t)^3} = \frac{3t^4 - 1}{-4t^3} = -x(t) \\ y(-t) = \frac{-(-t)^4 + 3}{4(-t)} = \frac{-t^4 + 3}{-4t} = -y((t) \end{cases}$. Nous avons donc une symétrie de centre l'origine.

   (b) $x(\frac{1}{t}) = \frac{3/t^4 - 1}{4/t^3} = \frac{3 - t^4}{4t}$ (on multiplie par t^4 au numérateur et au dénominateur). Ainsi, $x(\frac{1}{t}) = y(t)$. De même, nous obtenons : $y(\frac{1}{t}) = x(t)$. Nous avons donc une symétrie de la courbe paramétrée par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

   (c) - Puisque : $t \in]0;\ +\infty[\Leftrightarrow -t \in]-\infty;\ 0[$, d'après (a), nous pouvons restreindre l'étude à $]0;\ +\infty[$, puis on complètera le tracé du support par symétrie par rapport à l'origine ;
   - Puisque : $t \in]0;\ 1] \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in [1;\ +\infty[$, d'après (b), nous pouvons restreindre l'étude à $\boxed{]0;\ 1]}$, puis on complètera le tracé par symétrie par raport à la droite d'équation $y = x$.

5. x et y sont des fractions rationnelles, donx dérivables sur leur domaine de définition qui est $\mathbb{R}^*$. De plus, $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{12t^3 \times 4t^3 - (3t^4 - 1) \times 12t^2}{(4t^3)^2} \\ &= \frac{12t^2(4t^4 - 3t^4 + 1)}{16t^6} \\ &= \boxed{\frac{3(t^4 + 1)}{4t^4}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{-4t^3 \times 4t - (-t^4 + 3) \times 4\times}{(4t)^2} \\ &= \frac{4(-4t^4 + t^4 - 3)}{16t^2} \\ &= \boxed{\frac{-3(t^4 + 1)}{4t^2}} \end{aligned}$$

Il nous reste à étudier le signe de $x'(t)$. Puisque $t^4 \geq 0$, $t^2 \geq 0$ et $t^6 \geq 0$, nous avons $\forall t \in]0;\ 1], x'(t) > 0$. De même, $y'(t) < 0$. Nous en déduisons le tableau de variations :

t	0		1
$x'(t)$		$+$	$\frac{3}{2}$
x	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$		$-$	$-\frac{3}{2}$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Limites en 0^+ : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 0^+}(3t^4-1)=-1\\ \lim\limits_{t\to 0^+}4t^3=0^+\end{array}\right\}$ (par quotient) $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+}x(t)=-\infty.}$

De la même façon, nous obtenons : $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+}y(t)=+\infty.}$

Enfin, $x(1)=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ et $y(1)=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$, donc : $\boxed{A\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).}$ Par symétrie de centre l'origine :

$B(x(-1);\ y(-1))=(-x(1);\ -y(1))$: $B\boxed{\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right).}$

6. (a) Nous avons : $\lim\limits_{t\to 0^+}x(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}y(t)=+\infty$. Nous avons donc une branche infinie en 0^+ située sur la partie du plan délimitée par : $x<0$ et $y>0$. La branche obtenue ne peut donc être que Γ_1 ou Γ_3. De plus, cette dernière passe par A. Par conséquent, lorsque $t\in]0;\ 1]$, $\boxed{\text{la branche correspondante est } \Gamma_1.}$

(b) Nous constatons graphiquement la présence de deux uniques points doubles P_1 et P_2. Nous remarquons par ailleurs qu'ils se situent sur la droite d'équation : $y=-x$. Par conséquent, si $(x(t);\ y(t))$ représentent les coordonnées de P_1 ou P_2, nous avons : $x\left(-\frac{1}{t}\right)=-x\left(\frac{1}{t}\right)=-y(t)=x(t)$. De la même façon : $y\left(-\frac{1}{t}\right)=y(t)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} y\left(-\tfrac{1}{t}\right)=y(t) &\Leftrightarrow \frac{-\left(\frac{-1}{t}\right)^4+3}{-\frac{4}{t}}=\frac{-t^4+3}{4t}\\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{t^4}-3}{\frac{4}{t}}=\frac{-t^4+3}{4t}\\ &\Leftrightarrow 4t\left(\frac{1}{t^4}-3\right)=\frac{4}{t}\left(-t^4+3\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{t^3}-3t=-t^3+\frac{3}{t}\\ &\Leftrightarrow 1-3t^4=-t^6+3t^2 \ \text{ car } t^3\neq 0\\ &\Leftrightarrow t^6-3t^4-3t^2+1=0.\end{aligned}$$

Posons : $T=t^2$. L'équation devient : $T^3-3T^2-3T+1=0$. Nous constatons que -1 est racine évidente. Nous faisons alors une division euclidienne de $T^3-3T^2-3T+1=0$ par $T+1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} T^3 & -3T^2 & -3T & +1 & T\quad +1\\ \cline{5-5} T^3 & +T^2 & & & T^2\ -4T\ +1\\ \cline{1-2} & -4T^2 & -3T & +1 & \\ & -4T^2 & -4T & & \\ \cline{2-3} & 0 & T & +1 & \\ & & T & +1 & \\ \cline{3-4} & & 0 & 0 & \end{array}$$

Ainsi : $T^3-3T^2-3T+1=(T+1)(T^2-4T+1)$.
Nous calculons le discriminant $\Delta=12$ du trinôme : T^2-4T+1. Ce dernier est positif, nous avons donc deux solutions réelles distinctes : $T_1=2-\sqrt{3}$, $T_2=2+\sqrt{3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y\left(-\tfrac{1}{t}\right)=y(t) &\Leftrightarrow t^2=-1 \text{ ou } t^2=T_1 \text{ ou } t^2=T_2\\ &\Leftrightarrow t=\sqrt{2-\sqrt{3}}(\approx 0,51) \text{ ou } t=-\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ ou } t=\sqrt{2+\sqrt{3}}(\approx 1,93) \text{ ou } t=-\sqrt{2+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Finalement, si l'on note : t_1 le paramètre de P_1 appartenant à $]0;\ 1]$, et t_2 le paramètre de P_2 appartenant à $[1;\ +\infty[$, nous avons forcément : $\boxed{t_1=\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ et } t_2=\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Nous vérifions par ailleurs : $t_1t_2=\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2^2-3}=1$, donc $\boxed{t_2=\frac{1}{t_1}.}$

(c) Suivons les indications. Nous avons :

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \frac{-(2-\sqrt{3})^2+3}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}\\ &= \frac{-(7-4\sqrt{3})+3}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}\\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} y(t_1)^2 &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= 2\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $y(t_1)>0$, nous en déduisons : $y(t_1)=\sqrt{2}$. De plus : $x(t_1)=-y(t_1)$. Finalement : $\boxed{P_1\left(\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right).}$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir surveillé n° 4.

Consignes générales :
- *La durée de l'épreuve est de 4 heures ;*
- *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
- *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
- *Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
- *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–D'après mines sup 2006-

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$ et $g(z) = |z-2i|^2 f(z) + z^3$.

1. On considère le plan muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on identifie $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $\mathcal{R}$. Si M est un point $\mathcal{P}$, on appelle affixe de M le nombre complexe associé à M. On note Γ l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $g(z)$ est imaginaire pur.
   (a) Montrer que l'ensemble des points du plan tels que : $x^2 - y^2 - 2y = 0$ est une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques. Tracer C dans $\mathcal{R}$.
   (b) Soit z un nombre complexe appartenant à D de partie réelle x et de partie imaginaire y. Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de z. Montrer en particulier que la partie réelle de $g(z)$ est $2x^3 - 2xy^2 - 4xy$.
   (c) En déduire que Γ est inclus dans la réunion d'une droite Δ et d'une conique C. Préciser Γ.
2. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8-6i$. En déduire tous les antécédents de $1+i$ par f.
   (b) Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.
   (c) Déterminer l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f. La fonction f est-elle une application surjective de D dans $\mathbb{C}$?
   (d) f est-elle une application injective de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$?

Problème 1

–Étude d'une équation différentielle–

On considère l'équation différentielle (E) : $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$.

1. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty;\ 0[$, $I_2 =]0;\ 1[$, et $I_3 =]1;\ +\infty[$.
2. **Résolution de (E) sur I_2**
   (a) Donner le domaine de définition, le domaine de dérivablilité et l'expression de la dérivée de la fonction argth.
   (b) Pour $x \in I_2$, on pose $u(x) = \sqrt{x}$. Calculer $\dfrac{u'(x)}{1-u(x)^2}$.
   (c) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sur I_2. On exprimera cette solution avec des fonctions usuelles.

(d) En déduire toutes les solutions de (E) sur l'intervalle I_2.

3. **Résolution de (E) sur I_1**

   (a) Donner le domaine de définition, le domaine de dérivablilité et l'expression de la dérivée de la fonction arctan.

   (b) Pour $x \in I_1$, on pose $v(x) = \sqrt{-x}$. Calculer $\dfrac{v'(x)}{1+v(x)^2}$.

   (c) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sur I_1. On exprimera cette solution avec des fonctions usuelles.

   (d) En déduire toutes les solutions de (E) sur l'intervalle I_1.

4. **Un préliminaire avant d'étudier (E) sur I_3 : étude de la fonction coth**

   (a) La fonction coth est définie par la relation $\coth(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$. Déterminer son domaine de définition, puis exprimer coth avec les fonctions sh et ch.

   (b) Etudier la parité de coth puis déterminer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

   (c) Justifier que coth est dérivable sur son ensemble de définition puis exprimer $\coth'$ en fonction de sh uniquement, puis en fonction de coth uniquement.

   (d) Etudier les variations de coth, dresser son tableau de variations et tracer sa courbe représentative.

   (e) Etablir que coth réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur $]1;\ +\infty[$. On note argcoth la fonction réciproque associée à coth sur $]0;\ +\infty[$.

   (f) Justifier que argcoth est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et démontrer que

$$\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \ \operatorname{argcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

5. **Résolution de (E) sur I_3**

   (a) Expliquer pourquoi la solution particulière de (E) trouvée à la question 3.(c) ne peut pas être solution de (E) sur I_3.

   (b) En utilisant la question 5. et la question 3.(b) déterminer une solution particulière de (E) sur I_3.

   (c) En déduire toutes les solutions de (E) sur I_3.

Problème 2

–Étude d'une fonction–

Le but du problème est de faire l'étude détaillée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\arctan(x) + x + 1.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\arctan(x) + \dfrac{2x+1}{x^2+1} + 1$.

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer $g'(x)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

   (c) Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$ et que $a \in]-1;\ 0[$.

2. **Tableau de variations de f**

   (a) Montrer que f est dérivable sur un ensemble D que l'on précisera, et calculer $f'(x)$.

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in D$, et calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) En déduire le tableau de variations de f.

3. **Étude des asymptotes**

(a) Montrer que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} x \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \to -\infty} x \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(b) En dérivant la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que f admet une asymptote oblique en $+\infty$, ainsi qu'en $-\infty$, et donner une équation réduite de chacune.

4. **Courbe représentative de f**

Tracer le plus précisément la courbe représentative de la fonction f. On prendra commes valeurs approchées : -0.5 le point où la fonction f atteint son minimum, et 0.5 la valeur du minimum en ce point.

5. **Un calcul d'aire**

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

(c) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{1-\ln(2)}{2}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

CORRECTION DU DS 4.

Exercice 1:

1. (a) $$\begin{aligned} x^2-y^2-2y=0 &\Leftrightarrow x^2-(y^2+2y)=0\\ &\Leftrightarrow x^2-(y+1)^2+1=0\\ &\Leftrightarrow (y+1)^2-x^2=1\\ &\Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \text{ avec } \begin{cases} X=y+1\\ Y=x\end{cases} \text{ et } \begin{cases} a=1\\ b=1\end{cases}.\end{aligned}$$

Nous reconnaissons l'équation réduite d'une hyperbole. On détermine les éléments caractéristiques dans $\mathcal{R}$:

- $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$.
- $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$?
- foyers $F, F' \pm(\sqrt{2};\ 0)$.
- sommets $S, S'(\pm 1;\ 0)$.
- directrices : $X=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- asymptotes : $Y=\pm\frac{b}{a}X=\pm X$.

Pour finir, les coordonnées du centre dans $\mathcal{R}$ sont $\Omega(0;\ -1)$. Nous en déduisons la figure suivante :

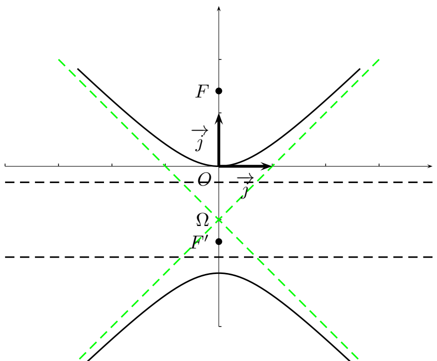


FIG. 1 – tracé de C dans $\mathcal{R}$

(b) Posons : $z=x+iy\neq 2i$. Alors : $$\begin{aligned} g(z) &= |z-2i|^2 f(z)+z^3\\ &= \cancel{(z-2i)}(\overline{z-2i})\frac{z^2}{\cancel{z-2i}}+z^3\\ &= (\overline{z}+2i)z^2+z^3\\ &= z^2\left(x-i(y-2)+x+iy\right)\\ &= (x^2-y^2+2ixy)(2x+2i)\\ &= 2x^3-2xy^2-4xy+i(2x^2-2y^2+2x^2y).\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Re}(g(z))=2x^3-2xy^2-4xy.}$

(c) Nous avons : $$\begin{aligned} g(z) \text{ imaginaire pur } &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(g(z))=0\\ &\Leftrightarrow 2x^3-2xy^2-4xy=0\\ &\Leftrightarrow x(x^2-y^2-2y)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2-y^2-2y=0.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $(x;\ y)\neq(0;\ 2)$, $(x;\ y)\in\Gamma \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-y^2-2y=0$. L'ensemble des points du plan tels que $x=0$ est une droite verticale et l'ensemble des points du plan tels que $x^2-y^2-2y=0$ est une conique C. Enfin on vérifie que le point de coordonnées $(0;\ 2)$ appartient à la droite précédente, ce qui donne au final que $\boxed{\Gamma \text{ est inclus dans la réunion d'une droite et de la conique } C.}$

2. (a) Notant $z=x+iy$, nous avons :
$$\begin{aligned} z^2=8-6i &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=|8-6i|+8\\ 2y^2=|8-6i|-8\\ 2xy=-6\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=10+8\\ 2y^2=10-8\\ 2xy=-6\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9\\ y^2=1\\ xy=-3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\\ y=-1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-3\\ y=1\end{cases} \text{ car } xy<0.\end{aligned}$$
$\boxed{\text{Les racines carrées de } 8+6i \text{ sont donc } 3-i \text{ et } -3+i.}$

Pour $z\in\mathcal{D}$, $$\begin{aligned} f(z)=1+i &\Leftrightarrow z^2=(z-2i)(1+i)\\ &\Leftrightarrow z^2-(1+i)z-2(1-i)=0.\end{aligned}$$
On résout l'équation complexe de degré deux suivante. Nous avons $\Delta=(1+i)^2+8-8i=8-6i$. Notant $w_1=3-i$, les solutions sont donc : $z_1=\frac{1+i+w_1}{2}=2$, $z_2=\frac{1+i-w_1}{2}=-2+i$.
$\boxed{\text{Les antécédents de } 1+i \text{ sont donc } 2 \text{ et } -1+i.}$

(b) En raisonnant comme précédemment, les antécédents de h sont les solutions de l'équation de degré deux : $z^2-hz+2ih=0$. D'une part, la valeur interdite $2i$ n'est jamais solution de cette équation. D'autre part, le nombre de solutions est déterminé à l'aide du discriminant : $\Delta=h^2-8ih=h(h-8i)$. Comme $\Delta=0\Leftrightarrow h=0$ ou $h=8i$, nous avons :

- Si $h=0$ ou $h=8i$, h admet un unique antécédent par f ;
- Si $h\neq 0$ et $h\neq 8i$, h admet deux antécédents par f.

(c) La question précédente a permis de constater que tout nombre complexe h admet au moins un antécédent, donc $\boxed{f(\mathcal{D})=\mathbb{C} \text{ et } f \text{ est surjective}}$

(d) Le nombre complexe $1+i$ admet deux antécédents, donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

Problème 1:

1. Sur les trois intervalles l'équation homogène est la même : $(H) : y'+\frac{1}{2x}y=0$. Ses solutions s'écrivent de la forme $\lambda e^{-\frac{1}{2}\ln|x|}$. D'où en simplifiant, les solutions de l'équation homogène (H) sur I_1, I_2 et I_3 sont

$$\boxed{S_H=\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{|x|}}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

2. **Résolution de (E) sur I_2**

(a) D'après le cours, $\boxed{\text{argth est définie et dérivable sur }]-1;1[\ \forall x\in]-1;\ 1[, \text{argth}'(x)=\frac{1}{1-x^2}}$

(b) Pour tout $x\in I_2$,
$$\boxed{\frac{u'(x)}{1-u(x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}}$$

(c) Sur I_2, (E) s'écrit aussi $y'+\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2x(1-x)}$. D'après la méthode de la variation de la constante, on peut chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(x)=\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}} \text{ avec } \lambda \text{ une fonction dérivable sur } I_2$$

Alors y_p est solution particulière de (E) sur I_2 si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\lambda(x)}{2x\sqrt{x}} + \frac{\lambda(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x(1-x)} \\
&\iff \lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} \\
&\iff \lambda'(x) = \frac{u'(x)}{1-u(x)^2}
\end{aligned}$$

Puis, en s'inspirant du rappel de la question 3.a et en remarquant que pour $x \in I_2$, $\sqrt{x} \in]-1,1[$, une primitive de $\dfrac{u'}{1-u^2}$ est $\operatorname{argth}(u)$. Donc on peut choisir $\lambda(x) = \operatorname{argth}(\sqrt{x})$ ce qui donne

$$\boxed{y_p(x) = \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$$

(d) Pour obtenir toutes les solutions de (E) sur I_2, il suffit de sommer une solution particulière et les solutions de l'équation homogène, ce qui donne

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\lambda + \operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. **Résolution de (E) sur I_1**

(a) D'après le cours, $\boxed{\text{arctan est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

(b) Pour tout $x \in I_1$,

$$\boxed{\frac{v'(x)}{1+v(x)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}}$$

(c) D'après la méthode de la variation de la constante, on peut chercher une solution particulière de (E) sur I_1 sous la forme

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{-x}} \text{ avec } \lambda \text{ une fonction dérivable sur } I_1$$

Alors y_p est solution particulière de (E) sur I_1 si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{-x}} + \frac{\lambda(x)}{2(-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda(x)}{2x\sqrt{-x}} = \frac{1}{2x(1-x)} \\
&\iff \lambda'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)} \\
&\iff \lambda'(x) = \frac{v'(x)}{1+v(x)^2}
\end{aligned}$$

Puis, en s'inspirant du rappel de la question 4.a, une primitive de $\dfrac{v'}{1+v^2}$ est $\arctan(v)$. Donc on peut choisir $\lambda(x) = \arctan(\sqrt{-x})$ ce qui donne

$$\boxed{y_p(x) = \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}}$$

(d) Pour obtenir toutes les solutions de (E) sur I_2, il suffit de sommer une solution particulière et les solutions de l'équation homogène, ce qui donne

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\mu + \arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\ ;\ \mu \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. **Un préliminaire avant d'étudier (E) sur I_3 : étude de la fonction** coth

(a) th est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que en 0, donc $\boxed{\text{coth est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

Par définition $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, donc $\boxed{\coth = \frac{\text{ch}}{\text{sh}}}$

(b) Comme th est impaire, $\boxed{\text{coth est impaire}}$

Puis on sait que $\displaystyle\lim_{x \to x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$ donc (par quotient) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \coth(x) = 1}$

et par imparité $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \coth(x) = -1}$

Enfin comme $\text{th}(0) = 0$ et que th est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$ on a (toujours par quotient)

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \coth(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \coth(x) = -\infty}$$

(c) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que en 0 donc son inverse, $\boxed{\text{coth est dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, en utilisant $\text{sh}^2 - \text{ch}^2 = -1$,

$$\boxed{\coth'(x) = -\frac{1}{\text{sh}^2(x)} = 1 - \coth^2(x)}$$

(d) D'après la question précédente, coth admet une dérivée strictement négative sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. D'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\coth'(x)$		$-$	||	$-$	
$\coth(x)$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

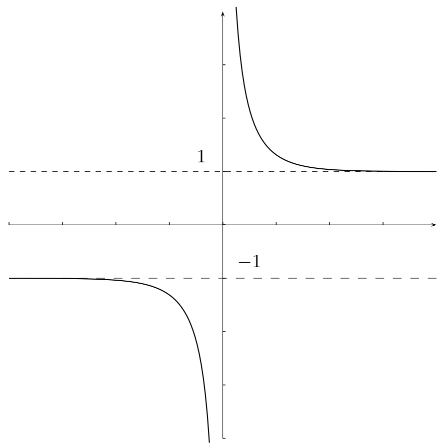


FIG. 2 – Graphe de coth

(e) Sur $]0,+\infty[$, coth est continue et strictement décroissante,
donc elle réalise une $\boxed{\text{bijection de }]0,+\infty[\text{ sur } \coth(]0,+\infty[) =]1,+\infty[}$

(f) Comme coth est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$,

$\boxed{\text{argcoth est dérivable sur }]1,+\infty[}$
Et pour tout $x \in]1,+\infty[$, d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques,

$$\boxed{\operatorname{argcoth}'(x)} = \frac{1}{\coth'(\operatorname{argcoth}(x))} = \frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{argcoth}(x))} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}$$

5. **Résolution de (E) sur I_3**

(a) La fonction $x \to \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ n'est définie que sur $]0,1[$ et donc pas sur I_3. Elle ne peut donc pas être une solution particulière de (E) sur I_3.

(b) On peut reprendre la variation de la constante faite à la question 3.b jusqu'à l'étape $\lambda'(x) = \dfrac{u'(x)}{1-u(x)^2}$. Mais cette fois on ne peut pas primitiver λ' avec la fonction argth. Comme pour tout $x \in I_3$, $u(x) = \sqrt{x} \in]1,+\infty[$ on peut utiliser argcoth.
D'où $\lambda(x) = \operatorname{argcoth}(\sqrt{x})$. Puis une solution particulière de (E) sur I_3 est

$$\boxed{y_P(x) = \frac{\operatorname{argcoth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$$

(c) Les solutions de (E) sur I_3 sont donc

$$\boxed{S = \left\{\frac{\nu + \operatorname{argcoth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ ;\ \nu \in \mathbb{R}\right\}}$$

Problème 2:

1. (a) Par opérations élémentaires de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(x^2+1)-(2x+1)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(1+x^2)-2x^2+2-2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4-2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \boxed{2\frac{2-x}{(x^2+1)^2}.} \end{aligned}$$

(b) $\dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{2+1/x}{x+1/x}$. Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+1/x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1/x = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+1} = 0$. Enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, donc par opérations élémentaires : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pi+1.}$

De la même façon, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, nous avons : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\pi+1.}$

(c) Nous reprenons l'expression précédente. Pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2\dfrac{2-x}{(x^2+1)^2}$. Le dénominateur est un carré donc est toujours positif. $g'(x)$ est donc du signe de $2-x$, c'est à dire :

- Pour $x \geq 2$, $g'(x) \leq 0$;
- Pour $x < 2$, $g'(x) > 0$.

Nous pouvons alors dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\pi+1$	$\nearrow$	$2\arctan(2)+2$	$\searrow$	$\pi+1$

(d) • g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I_1 =]-\infty;\ 2]$. Elle est donc bijective de I_1 sur $f(I_1) =]-\pi+1;\ g(2)]$. Puisque $-\pi+1 < 0$ et $g(2) = 2\arctan(2)+2 > 0$, $0 \in f(I_1)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur I_1.

• g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I_2 =]2;\ +\infty[$. Elle est donc bijective de I_2 sur $f(I_2) =]\pi+1;\ g(2)]$. Puisque $\pi+1 > 0$, $0 \notin f(I_1)$ donc l'équation $g(x) = 0$ an'admet pas de solutions sur I_2.

• Finalement, $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } a \text{ sur } \mathbb{R}}$. De plus $g(-1) = 2\arctan(-1) - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\pi-1}{2} < 0$ et $g(0) = 1 > 0$, donx $\boxed{a \in]-1;\ 0[}$.

2. (a) Par opérations élémentaires, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\arctan(x) + \dfrac{2x+1}{x^2+1} + 1 = \boxed{g(x).}$

(b) $f'(x)$ est du signe de g. Puisque g est strictement croissante sur I_1, nous avons pour $x \leq a$, $g(x) \leq g(a) \leq 0$ et pour $x \in [a;\ 2]$, $g(x) \geq 0$. Enfin pour $x \in I_2$, $g(x) \in]\pi+1;\ g(2)]$, donc $g(x) > 0$. Ainsi :

- $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty;\ a]}$;
- $\boxed{f \text{ est croissante sur } [a;\ +\infty[}$.

On étudie la limite en $+\infty$: nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)\arctan(x) = +\infty$, et par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

On étudie la limite en $-\infty$. Ici, on écrit : $f(x) = x(2\arctan(x)+1) + \arctan(x) + 1$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\arctan(x)+1 = 1-\pi < 00$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} x(2\arctan(x)+1) = +\infty$. Finalemant, par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$

(c)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) On voit que $\dfrac{\arctan(x)}{x} = \dfrac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0}$. Comme la fonction arctan est dérivable en 0, nous avons : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = \arctan'(0) = \dfrac{1}{1+0^2}$. Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1.}$

Nous avons $x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Posons alors $u = \frac{1}{x}$. Nous avons :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ &\lim_{u\to0} \frac{\arctan(u)}{u} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(composition des limites)} \boxed{\lim_{x\to+\infty} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 1.}$$

En raisonnant de la même façon, nous obtenons : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1.}$

(b) Par opérations élémentaires, h est dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

Ainsi h est constante sur chaque intervalle du domaine de définition, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, h(x) = C_1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = C_2$. On obtient C_1 en regardant $h(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. De même, $C_2 = h(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2};}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.}$$

(c) • asymptote oblique en $+\infty$: On calcule $\frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x}\right)\arctan(x) + 1 + \frac{1}{x}$. Par opérations élémentaires, nous obtenons : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pi + 1.}$ Posons alors $a = \pi + 1$. Nous avons $f(x) - ax = (2x+1)\arctan(x) + x + 1 - \pi x - x = (2x+1)\arctan(x) + 1 - \pi x$. Pour lever le forme indéterminée, on utilise (b) : pour $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Ceci nous donne alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+1)\tfrac{\pi}{2} - (2x+1)\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) - \pi x + 1 \\ &= \cancel{\pi x} + \tfrac{\pi}{2} - 2x\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cancel{\pi x} + 1 \\ &= \tfrac{\pi}{2} + 1 - 2x\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ d'après 3.(a), nous avons par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \frac{\pi}{2} - 1.}$

Des deux limites précédentes, nous concluons que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation réduite : $\boxed{y = (\pi+1)x + \frac{\pi}{2} - 1.}$

• asymptote oblique en $-\infty$: en reprenant les étapes précédentes, nous obtenons de la même façon une asymptote oblique d'équation réduite : $\boxed{y = (-\pi+1)x - \frac{\pi}{2} - 1.}$

4.

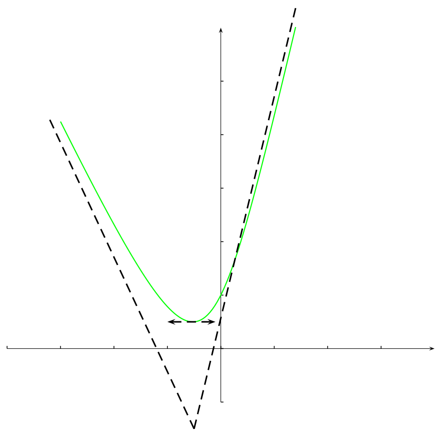


FIG. 3 – Graphe de f

5. (a) • $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$

• $$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= -\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^1 dx \\ &= -\tfrac{\pi}{4} + [x]_0^1 \\ &= \boxed{1 - \frac{\pi}{4}.} \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = x^2 + 1$. Une primitive sur $[0;\ 1]$ est dont $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\ln(2)}{2}.}$

(c) $$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (2x+1)\arctan(x)\,dx + \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 (2x+1)\arctan(x)\,dx}_{I} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [x]_0^1 \\ &= I + \tfrac{1}{2} + 1 \\ &= I + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Il reste à calculer I. Posons $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \arctan(x)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\ 1]$. En intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\ &= 2\arctan(1) - \int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \left(1 - \tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{\ln(2)}{2} \\ &= \tfrac{3\pi}{4} - 1 - \tfrac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = I + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{4} + \frac{1 - \ln(2)}{2}.}$

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆

Devoir surveillé n° 5.

Consignes générales :
- *La durée de l'épreuve est de 3 heures ;*
- *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
- *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
- *Le sujet est composé de trois exercices que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
- *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–Un système à paramètres–

Résoudre le système suivant de paramètre $m \in \mathbb{C}$: $\left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{array} \right.$.

Exercice 2

–Une surface réglée–

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'ensemble S_m d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0$$

où m désigne un paramètre réel.

1. Démontrer que, pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre Ω_m et le rayon R_m.
2. Pour tout réel θ, on définit la droite D_θ par le système d'équations cartésiennes suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta. \end{array} \right.$$

   (a) Pour tout réel θ, déterminer un point et un vecteur directeur de la droite D_θ.

   (b) Montrer que pour tout réel m et pour tout réel θ, la droite D_θ est tangente à la sphère S_m.
3. On appelle H l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2.$$

   (a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe qui constitue l'intersection de H et du plan d'équation $y = 0$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on appelle P_k le plan d'équation $z = k$. Pour tout réel k, démontrer que l'intersection de H et de P_k est un cercle C_k dont on précisera le centre et le rayon.

   (c) Représenter sur un dessin quelques cercles C_k permettant de suggérer l'allure de la surface H.
4. (a) Montrer que pour tout réel θ la droite D_θ est incluse dans H.

   (b) Réciproquement, montrer que, si M est un point de H de coordonnées (x, y, z), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M appartient à la droite D_θ. (On pourra calculer $c^2 + s^2$ où $c = \dfrac{xz - y\sqrt{2}}{z^2 + 2}$ et $s = \dfrac{yz + x\sqrt{2}}{z^2 + 2}$)

   (c) Que peut-on conclure des deux questions précédentes ?

Exercice 3

–Des récurrences, des sommes et un peu d'arithmétique–

Les trois questions ci-dessous sont indépendantes.

1. On souhaite calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
   (a) Déterminer a, b et c tels que : $\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$.
   (b) Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes une expression simple de S_n.
2. On considère la suite telle que : $a_0 = 2, a_1 = 13$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 13a_{n+1} - 36a_n$.
   (a) Calculer a_2 et a_3 et décomposer en facteurs premiers a_2 et a_3.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = 4^n + 9^n$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, 13 divise a_{2n+1}.
   (d) Donner une expression simple des sommes suivantes : $\sum_{k=0}^{n} a_k$, $\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$.
3. Soit $x > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$Z_n(x) = \frac{1}{n!} \int_1^x \ln^n(t)\, dt$$

   (a) Justifier l'existence de $Z_n(x)$ pour tout entier naturel n, puis calculer $Z_0(x)$ et $Z_1(x)$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, qu'on justifiera soigneusement, déterminer une relation entre $Z_{n+1}(x)$ et $Z_n(x)$.
   (c) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n(x) = (-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} \frac{\ln^k(x)}{k!}\right] x$$

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆

CORRECTION DU DS 5.

Exercice 1:

- Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= m(m^2-1)\begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} \text{ (développement par rapport à la deuxième ligne)}$$

$$= m(m^2-1)(m^2+1)$$

$$= \boxed{m(m-1)(m+1)(m-i)(m+i)}.$$

Ainsi le système est de Cramer si et seulement si $m(m-1)(m+1)(m-i)(m+i) \neq 0$ c'est à dire : $m \neq 0, 1, -1, i, -i,$.

- Pour $m \neq 1, -1, i, -i$, le système admet une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}}.$$

- $$\begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m^2\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 2 & -m & 1 \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}$$

$$= m^2\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 0 & 1-m & 1-m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix}$$

$$= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-m & 1 & -(m^2+1) \end{vmatrix} (C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$$

$$= -m^2(m-1)\begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 1-m & -(m^2+1) \end{vmatrix} \text{ (développement par rapport à la deuxième ligne)}$$

$$= -m^2(m-1)(-2(m^2+1)+m^2-1)$$

$$= \boxed{m^2(m-1)(m^2+3).}$$

Ainsi, $x = \dfrac{m^2(m-1)(m^2+3)}{m(m-1)(m+1)(m^2+1)} = \boxed{\dfrac{m(m^2+3)}{(m+1)(m^2+1)}}.$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ m & 2m & 1 \\ m & 1-m & -m \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ m-1 & 0 & 1-m \\ m & 1-m & -m \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 1 & 0 & -1 \\ m & 1-m & -m \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= m(m-1)\begin{vmatrix} 1+m & 2m & m \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-m & -m \end{vmatrix} (C_1 \leftarrow C_1 + C_3)$$

$$= m(m-1)\begin{vmatrix} 1+m & 2m \\ 0 & 1-m \end{vmatrix} \text{ (développement par rapport à la deuxième ligne)}$$

$$= \boxed{-m(m-1)^2(m+1).}$$

Ainsi, $y = -\dfrac{m(m-1)^2(m+1)}{m(m-1)(m+1)(m^2+1)} = \boxed{-\dfrac{m-1}{m^2+1}}.$

- $$\begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ 1 & -m & 2 \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & 2(1-m) \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= 2m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} \text{ (développement par rapport à la deuxième ligne)}$$

$$= \boxed{2m(m-1)(m^2+1).}$$

Ainsi $z = \dfrac{2m(m-1)(m^2+1)}{m(m-1)(m+1)(m^2+1)} = \boxed{\dfrac{2}{m+1}.}$

- Finalement, $\boxed{S = \left\{ \dfrac{m(m^2+3)}{(m+1)(m^2+1)};\ -\dfrac{m-1}{m^2+1};\ \dfrac{2}{m+1} \right\}}.$

- Pour $m = 0$ le système s'écrit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{S = \{(0;\ 1;\ z), z \in \mathbb{C}\}.}$

- Pour $m = 1$ le système s'écrit :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \end{cases} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y - z = 1 \\ y = -1 + z \end{cases} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

Donc : $\boxed{S = \{(1;\ -1+z;\ z), z \in \mathbb{C}\}.}$

- Pour $m=-1$, le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =-2\\ -x & -y & -z & =-2\\ x & +y & -z & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =-2\\ & & & 0=-4\\ x & +y & -z & =0\end{array}\right.$$

La deuxième égalité n'est pas vraie, donc $\boxed{S=\emptyset.}$

- Pour $m=i$, le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & -iy & -z & =2i\\ ix & +y & +iz & =2i\\ ix & +y & +z & =1-i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x & -iy \quad -z & =2i\\ & +2iz & =2i\\ & (1+i)z & =3-i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x & -iy \quad -z & =2i\\ & z & =1\\ & (1+i)z & =3-i\end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles, donc $\boxed{S=\emptyset.}$

- Pour $m=-i$, le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +iy & -z & =-2i\\ -ix & +y & -iz & =-2i\\ ix & +y & +z & =1+i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x & +iy \quad -z & =-2i\\ & -2iz & =-2i(1+i)\\ & (1-i)z & =3+i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x & +iy \quad -z & =-2i\\ & z & =1+i\\ & z & =\frac{(3+i)(1+i)}{2}=1+2i\end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles, donc $\boxed{S=\emptyset.}$

Exercice 2:

1. Soit $m\in\mathbb{R}$ et M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z). Alors

$$\begin{aligned} M\in S_m &\iff x^2+y^2+z^2-2mz\sqrt{2}+m^2-2=0\\ &\iff x^2+y^2+(z-m\sqrt{2})^2-2m^2+m^2-2=0\\ &\iff x^2+y^2+(z-m\sqrt{2})^2=\underbrace{2+m^2}_{>0}\end{aligned}$$

On reconnaît l'équation de $\boxed{\text{la sphère de centre } \Omega_m=\left(0,0,m\sqrt{2}\right) \text{ et de rayon } R_m=\sqrt{2+m^2}}$

2. (a) On peut considérer que la droite D_θ est donnée sous une représentation paramétrique avec z pour paramètre. Il suffit alors de lire les coordonnées d'un point A_θ et d'un vecteur directeur $\vec{u_\theta}$:

$$\boxed{A_\theta=(\sqrt{2}\sin\theta,-\sqrt{2}\cos\theta,0) \qquad \vec{u_\theta}=(\cos\theta,\sin\theta,1)}$$

(b) Pour tout $(\theta,m)\in\mathbb{R}^2$, la droite D_θ est tangente à la sphère S_m si et seulement si la distance entre D_θ et Ω_m est égale à R_m. Or cette distance vaut :

$$d(\Omega_m,D_\theta)=\frac{\|\vec{u_\theta}\wedge\overrightarrow{\Omega_m A_\theta}\|}{\|\vec{u_\theta}\|}$$

Or $\overrightarrow{\Omega_m A_\theta}=(\sqrt{2}\sin\theta,-\sqrt{2}\cos\theta,-m\sqrt{2})$ et donc

$$\vec{u_\theta}\wedge\overrightarrow{\Omega_m A_\theta}=(-m\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta+m\sqrt{2}\cos\theta,-\sqrt{2}\cos^2\theta-\sqrt{2}\sin^2\theta)$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\vec{u_\theta}\wedge\overrightarrow{\Omega_m A_\theta}\|^2&=2(\cos\theta-m\sin\theta)^2+2(\sin\theta+m\cos\theta)^2+2\\ &=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(1+m^2)+2\\ &=2(2+m^2)\end{aligned}$$

De plus $\|\vec{u_\theta}\|=\sqrt{2}$, donc finalement on a bien :

$$(\Omega_m,D_\theta)=\sqrt{2+m^2}=R_m$$

et donc

$$\boxed{\text{la droite } D_\theta \text{ est tangente à la sphère } S_m}$$

3. (a) Les points $(x,0,z)$ de l'intersection du plan $y=0$ avec H vérifient l'équation $x^2-z^2=2$ qui peut aussi s'écrire $\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{2}=1$. Dans le plan $y=0$, on reconnaît l'équation réduite d'une

$$\boxed{\text{hyperbole de centre } (0,0) \text{ de foyers } (2,0) \text{ et } (-2,0)\text{, d'excentricité } e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{et d'asymptotes } z=x \text{ et } z=-x}$$

(b) Soit M de coordonnées (x,y,z) appartenant à l'intersection de P_k et de H. On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=z^2+2\\ z=k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=k^2+2\\ z=k\end{array}\right.$$

ce qui est un système d'équations du $\boxed{\text{cercle de centre } (0,0,k) \text{ et de rayon } \sqrt{k^2+2}}$.

(c) Voir la figure à la question (4c).

4. (a) Soit un point (x,y,z) appartenant à la droite D_θ. On a, par définition de D_θ :

$$\left\{\begin{array}{l} x=z\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta\\ y=z\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta\end{array}\right.$$

Donc

$$x^2+y^2=z^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=z^2+2$$

Donc $\boxed{\text{tout point de } D_\theta \text{ appartient à } H}$

(b) Soit $M=(x,y,z)$ un point de H. On a donc $x^2+y^2=z^2+2$. Puis on suit l'indication :

$$c^2+s^2=\frac{x^2z^2-2\sqrt{2}xyz+2y^2+y^2z^2+2\sqrt{2}xyz+2x^2}{(z^2+2)^2}=\frac{(z^2+2)(x^2+y^2)}{(z^2+2)^2}=1$$

On sait alors qu'il existe un réel θ tel que

$$c=\cos\theta \quad \text{et} \quad s=\sin\theta$$

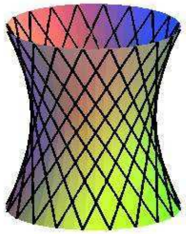
Alors

$$x-z\cos\theta=x-zc=x-z\frac{xz-y\sqrt{2}}{z^2+2}=\frac{x^2z^2+2x-xz^2+yz\sqrt{2}}{z^2+2}=\frac{2x+yz\sqrt{2}}{z^2+2}=\sqrt{2}s=\sqrt{2}\sin\theta$$

De même on peut montrer que $y-z\sin\theta=-\sqrt{2}\cos\theta$ et que donc M appartient à D_θ. Donc $\boxed{\text{pour tout point de } H \text{ il existe } \theta \text{ tel qu'il appartienne à } D_\theta}$

(c) Avec les deux questions précédentes on a en fait montré par double inclusion que

$$H=\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}}D_\theta$$



En fait H est ce qu'on appelle une **quadrique**. Les quadriques sont la généralisation des coniques à l'espace. Quand une surface est, comme c'est le cas ici, une réunion de droites on dit qu'elle est **réglée**.

Exercice 3:

1. (a) Nous avons : $$\begin{aligned}\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2} &= \frac{a(X+1)(X+2)+bX(X+2)+cX(X+1)}{X(X+1)(X+2)}\\ &= \frac{(a+b+c)X^2+(3a+2b+c)X+2a}{X(X+1)(X+2)}.\end{aligned}$$

Par identifications des numérateurs, a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} a+b+c=0\\ 3a+2b+c=0\\ 2a=1\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=-1\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}}$$

(b) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\boxed{1-\frac{1}{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=\boxed{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}}$.

(c) D'après le (a), $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1/2}{k+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}.}\end{aligned}$$

2. (a) $a_2=13a_1-36a_0=\boxed{97}$. De même : $a_3=793=\boxed{13\times 61}$.

(b) On procède par récurrence à deux pas. Soit l'assertion : $\mathcal{P}(n)$: « $a_n=4^n+9^n$ ».

- **initialisation :** Pour $n=0$, $4^0+9^0=2=a_0$. Pour $n=1$, $4^1+9^1=13=a_1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- **hérédité :** On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, c'est à dire : $a_n=4^n+9^n$ et $a_{n+1}=4^{n+1}+9^{n+1}$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, c'est à dire : $a_{n+2}=4^{n+2}+9^{n+1}$.

Nous avons : $$\begin{aligned} a_{n+2} &= 13a_{n+1}-36a_n\\ &= 13(4^{n+1}+9^{n+1})-36(4^n+9^n)\\ &= 13\times 44^n+13\times 9\times 9^n-36\times 4^n-36\times 9^n\\ &= 4^n(52-36)+9^n(117-36)\\ &= 4^n\times 16+9^n\times 81\\ &= 4^n\times 4^2+9^n\times 9^2\\ &= 4^{n+2}+9^{n+2}.\end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité.

Finalement, par récurence, pour tout entier naturel n, $\boxed{a_n=4^n+9^n.}$

(c) Montrons par récurrence faible que 13 divise $4^{2n+1}+9^{2n+1}$.

- **initialisation :** Pour $n=0$, $13|13=a_1$ donc la propriété est vraie pour $n=0$.
- **hérédité :** Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons que $13|4^{2n+3}+9^{2n+3}$.

Nous avons : $4^{2n+3}+9^{2n+3}=16\times 4^{2n+1}+81\times 9^{2n+1}$. Or par hypothèse de récurence, $4^{2n+1}+9^{2n+1}=13k$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Ainsi,
$$\begin{aligned} 4^{2n+3}+9^{2n+3} &= 16\times 4^{2n+1}+81\left(13k-4^{2n+1}\right)\\ &= 81k\times 13+4^{2n+1}(16-81)\\ &= 81k\times 13-5\times 4^{2n+1}\times 13\\ &= 13\times(\underbrace{81k-5\times 4^{2n+1}}_{\in\mathbb{Z}})\end{aligned}$$
Ceci prouve que $13|4^{2n+3}+9^{2n+3}$, donc l'hérédité.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\boxed{13|a_{2n+1}.}$

(d)
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\underbrace{4^k}_{\text{géométrique de raison }4\neq 1}=\frac{1-4^{n+1}}{1-4}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$. De la même façon : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}9^k=\frac{9^{n+1}-1}{8}$. Ainsi, par linéarité, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k=\frac{4^{n+1}}{3}+\frac{9^{n+1}}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{4^{n+1}}{3}+\frac{9^{n+1}}{8}-\frac{11}{24}.}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}4^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}4\times 16^k=4\frac{1-(16)^{n+1}}{1-16}=\frac{4}{15}\left(4^{2n+2}-1\right)$. De la même façon, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}9^{2k+1}=\frac{9}{80}\left(9^{2n+2}-1\right)$.
Ainsi, par linéarité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}=\frac{4}{15}4^{2n+2}+\frac{9}{80}9^{2n+2}-\frac{9}{80}-\frac{4}{15}=\boxed{\frac{4^{2n+3}}{15}+\frac{9^{2n+3}}{80}-\frac{91}{240}}.$

3. (a) Pour tout entier n et tout $x>1$, $t\longmapsto \ln^n(t)$ est continue sur $[1;\ x]$ car c'est le produit de deux fonctions continues : $\boxed{Z_n(x)\text{ est donc bien défini}}$

On a :
$$Z_0(x)=\frac{1}{0!}\int_1^x dt=x-1.$$

Pour calculer $Z_1(x)$, on intègre par parties. Posons pour $t\in[1;\ x]$:

$$\begin{cases} u(t)=\ln t\\ v(t)=t\end{cases} \quad\text{et}\quad \begin{cases} u'(t)=\dfrac{1}{t}\\ v'(t)=1\end{cases}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;\ x]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= \int_1^x u(t)v'(t)\,dt\\ &= [t\ln(t)]_1^x-\int_1^x\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\times\frac{1}{t}\,dt\\ &= x\ln(x)-\int_1^x t\,dt\\ &= x\ln(x)-Z_0(x)\end{aligned}$$

D'après le calcul précédent, on a donc :

$$\boxed{Z_1(x)=x\ln(x)-x+1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour $t \in [1;\ x]$,

$$\begin{cases} u(t) = \ln^{n+1}(t) \\ v(t) = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = \dfrac{n+1}{t}\ln^n(t) \\ v'(t) = t \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\int_1^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[t\ln^{n+1}(t)\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{(n+1)}{t}\ln^n(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \times x\ln^{n+1}(x) - \frac{(n+1)}{(n+1)!} \times \int_1^x \ln^n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \times x\ln^{n+1}(x) - \frac{1}{n!}\int_1^x t^\alpha \ln^n(t)\,dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \times x\ln^{n+1}(x) - Z_n(x)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ Z_{n+1}(x) = \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} \times x - Z_n(x)}$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout entier n,

$Z_n(x) = (-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x$

- **initialisation :** Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x &= -1 - \left[-\frac{\ln^0(x)}{0!}\right]x \\
&= -1 + x = Z_0(x)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **hérédité :** On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= \frac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} - Z_n(x) \\
&= \frac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} - \left((-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x\right) \\
&= \frac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} + (-1)\left((-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x\right) \\
&= \frac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} + \left[(-1)^{n+2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k+1}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x \\
&= (-1)^{n+2} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+2-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x + \frac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= (-1)^{n+2} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+2-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x - (-1)^{n+2-(n+1)}\frac{x\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} \\
&= (-1)^{n+2} - \left[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+2-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ Z_n(x) = (-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x.}$$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir surveillé n° 6.

Consignes générales :
- *La durée de l'épreuve est de 4 heures ;*
- *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
- *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
- *Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
- *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–D'après E.S.C Chambéry 2010–

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer la matrice $N = A - I$. En déduire N^2 et N^3.
   Sans récurrence, donner la valeur de N^k lorsque $k \geq 3$.

   (b) Montrer alors en exploitant l'égalité $A = N + I$, et grâce à la formule du binôme de Newton, que pour tout entier $n \geq 2$,
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Cette formule est-elle encore valable lorsque $n = 0$? $n = 1$?
2. (a) Par la méthode du pivot, justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

   (b) La formule de la question 1.(b) est-elle encore valable lorsque $n = -1$?

On essaie maintenant de déterminer l'expression des suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :
$$x_0 = 1,\ y_0 = 0 \text{ et } z_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

3. (a) De quel type est la suite (z_n) ? En déduire pour tout entier naturel n l'expression de z_n en fonction de n.

   (b) En déduire alors le type de la suite (y_n) puis donner, pour tout entier naturel n, l'expression de y_n en fonction de n.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Préciser X_0 et montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 2

–Propriétés géométriques d'un triangle–

On considère le plan $\mathcal{P}$ usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ que l'on identifie à $\mathbb{C}$.
Dans $\mathcal{P}$, soient les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -5 + 6i$, $z_B = -7 - 2i$ et $z_C = 3 - 2i$. On construit extérieurement les triangles rectangles isocèles ABR, APC et BQC tels que ABR, APC et BQC soient respectivement rectangles en P, Q, R.

1. Faire une figure.
2. Le but de cette question est de déterminer les coordonnées de P.
   (a) Préciser la nature, ainsi que les éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe : $r(z) = iz + 9 + 3i$.
   (b) Déterminer $r(A)$. En déduire géométriquement comment construire le centre de r à partir des points A et C, puis déterminer le centre de r.
   (c) Déduire des questions précédentes l'affixe de P.

   De la même façon, nous obtenons l'affixe de Q : $z_Q = -2 - 7i$ et l'affixe de R : $z_R = -10 + 3i$ dont on se servira dans la suite de l'exercice.

3. Déterminer l'expression complexe de la similitude plane directe s_1 de centre A et dont l'image de P est C.
4. On considère la transformation du plan s_2 dont une expression complexe est $s_2(z) = \frac{1}{2}(1 - i)z - \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i$. Déterminer la nature ainsi que les éléments caractéristiques de s_2. Vérifier que l'image de C par s_2 est Q.
5. On pose $s = s_2 \circ s_1$.
   (a) Montrer que s a pour expression complexe $s(z) = -iz - 8 - 4i$.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de s.
   (c) Vérifier que $s(R) = A$. Que vaut $s(P)$?
   (d) En déduire que les droites (AQ) et (RP) sont perpendiculaires.

Problème 1

–Étude d'une suite récurrente–

Le but du problème est d'étudier la nature de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$

Dans la première partie, on détermine un équivalent de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On utilise ceci pour en déduire le comportement de (u_n) dans la deuxième partie.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes.

Partie 1 : Étude de (S_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Déterminer un équivalent puis la limite de la suite de terme général $R_n - T_n$.
2. (a) Montrer l'inégalité : pour tout entier naturel k, $2\sqrt{k(k+1)} \leq 2k + 1$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (R_n) et montrer que la suite de terme général (T_n) est croissante.

3. Montrer que les suites (R_n) et (T_n) convergent vers une même limite que l'on notera L et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n \leq L \leq R_n$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n} + L \leq S_n \leq 2\sqrt{n+1} + L,$$

puis un équivalent simple de (S_n).

Partie 2 : Comportement de (u_n).

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq n+1$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. On considère dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$.
   (a) Montrer que $v_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   (b) En déduire : $u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 1$.
   (c) En utilisant les résultats établis dans la première partie, montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $u_n = o(n^\alpha)$ quel que soit le réel $\alpha > 1$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

CORRECTION DU DS 6.

Exercice 1:

1. (a) Nous avons : $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{N^3 = O_3(\mathbb{K}).}$

Pour $k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0_3(\mathbb{K}) N^{k-3} = \boxed{O_3(\mathbb{K})}$.

(b) Nous avons $NI = IN = N$. Ainsi, d'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(N+I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I \quad \text{car } I^{n-k} = I \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \quad \text{car } N^k I = N^k \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=O_3(\mathbb{K})} \quad \text{D'après Chasles pour } n \geq 3 \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous remarquons qu'en fait la formule est valable pour $n = 2$, puisque d'après le binôme de Newton : $(N+I)^2 = I + 2N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $A = N+I$, donc $A^n = (N+I)^n$, ce qui donne d'après ci-dessus : pour $n \geq 2$, $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

Pour $n = 0$, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la formule est vraie.

Pour $n = 1$, $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la formule est vraie.

(a) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Alors : $AX = B$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = b_1 \\ y + z = b_2 \\ z = b_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = b_1 - b_2 + b_3 \\ y = b_2 - b_3 \\ z = b_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le système admettant une unique solution, on en déduit que A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

(b) Il s'agit d'une vérification immédiate : OUI, la formule est encore vraie pour $n = -1$.

2. (a) La suite (z_n) est constante, donc pour tout entier naturel n, $\boxed{z_n = z_0 = 1.}$

(b) On en déduit : $y_{n+1} = y_n + 1$. La suite (y_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $y_0 = 1$. Par conséquent : $\boxed{y_n = y_0 + nr = n + 1.}$

3. (a) Nous avons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus

$$\begin{aligned}
AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_n + n + 1 \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{X_{n+1}.}
\end{aligned}$$

(b) On note $\mathcal{P}(n)$ « $X_n = A^n X_0$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **initialisation.** Pour $n = 0$, nous avons $A^0 X_0 = IX_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **hérédité.** On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $X_n = A^n X_0$. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
  D'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n$. Or, par hypothèse de récurrence, $X_n = A^n X_0$. Ainsi, $X_{n+1} = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui prouce l'hérédité.

BILAN : $\boxed{\text{Par récurrence, pour tout entier naturel } n,\ X_n = A^n X_0.}$

(c) De la question précédente et du 1.(b), nous obtenons pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n+1+\frac{n(n-1)}{2}\\ n+1\\ 1\end{pmatrix}.$$ Par conséquent, $\boxed{x_n = n+1+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n+2).}$

Exercice 2:

1. Figure laissée au lecteur.
2. (a) $r(z) = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent, notre similitude directe est une rotation dont l'angle est donnée par un argument de $a = i = e^{i\pi/2}$. Ainsi, $\boxed{r \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2}.}$
   On obtient l'affixe du centre en résolvant l'équation : $r(z) = z \quad \Leftrightarrow z(1-i) = 9+3i$.
   $$\Leftrightarrow z = \frac{9+3i}{1-i}$$
   $$\Leftrightarrow z = \frac{(9+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
   $$\Leftrightarrow z = \frac{9+9i+3i-3}{2}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{z = 3+6i.}$$
   BILAN : r est la rotation de centre le point d'affixe $3+6i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   (b) $r(z_A) = (-5+6i)i+9+3i = 3-2i = z_C$. Nous remarquons que l'image du point A est le point C.
   Par conséquent le centre de la rotation Ω est tel que $\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}\omega \overrightarrow{C}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$.
   Géométriquement, le point P est le point vérifiant ces deux conditions puisque par hypothèse le triangle APC construit extérieurement est rectangle isocèle. $\boxed{\text{Finalement, le centre de cette transformation est } P.}$

   (c) Des deux questions précédentes, nous en déduisons que $\boxed{\text{l'affixe de } P \text{ est } 3+6i.}$
3. Puisque s_1 est une similitude plane directe, nous avons $s_1(z) = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Puisque $s_1(P) = C$, nous en déduisons la relation : $a(3+6i)+b = 3-2i$. De plus, le centre de la transformation est A. Ceci nous donne la relation : $a(-5+6i)+b = -5+6i$. Ainsi, a et b sont solutions du système :
   $$\begin{cases} a(3+6i)+b = 3-2i \\ a(-5+6i)+b = -5+6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(3+6i)+b = 3-2i \\ -8a = -8+8i \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3-2i-(1-i)(3+6i) = 3-2i-(9+3i) = -6-5i \\ a = 1-i \end{cases}.$$
   Par conséquent, $\boxed{\text{l'expression complexe de } s_1 \text{ est } s_1(z) = (1-i)z-6-5i.}$
4. Nous avons $s_2(z) = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent s_2 est la composée d'une rotation et d'une homothétie.
   - Le **rapport** k de z_2 est égal au module de a, c'est à dire $\boxed{k = \frac{\sqrt{2}}{2};}$
   - L'**angle** de s_2 est égal à un argument de a. Nous mettons a sous forme trigonométrique : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Nous prenons $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Ainsi, $\boxed{\text{l'angle de } s_2 \text{ est } -\frac{\pi}{4};}$
   - On obtient l'affixe du centre en résolvant l'équation : $s_2(z) = z \quad \Leftrightarrow z\left(1-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right) = -\frac{5}{2}-\frac{9}{2}i$.
   $$\Leftrightarrow z = \frac{-5-9i}{1+i}$$
   $$\Leftrightarrow z = \frac{(-5-9i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
   $$\Leftrightarrow z = \frac{-5+5i-9i-9}{2}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{z = -7-2i.}$$
   BILAN : s_2 est la similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, de centre le point d'affixe $3+6i$, c'est à dire B et d'angle $\frac{-\pi}{4}$.
5. (a) Nous avons
   $$\begin{aligned} s(z) &= s_2 \circ s_1(z) \\ &= s_2(s_1(z)) \\ &= s_2((1-i)z-6-5i) \\ &= \tfrac{1}{2}(1-i)((1-i)z-6-5i) - \tfrac{5}{2} - \tfrac{9}{2}i \\ &= -iz + \tfrac{1}{2}(-6-5i+6i-5-5-9i) \\ &= \boxed{-iz-8-4i.} \end{aligned}$$
   (b) $s(z) = az+b$ avec $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent, notre similitude directe est une rotation dont l'angle est donnée par un argument de $a = -i = e^{-i\pi/2}$. Ainsi, $\boxed{r \text{ est une rotation d'angle } -\frac{\pi}{2}.}$
   On obtient l'affixe du centre en résolvant l'équation : $s(z) = z \quad \Leftrightarrow z(1+i) = -8-4i$.
   $$\Leftrightarrow z = \frac{-8-4i}{1+i}$$
   $$\Leftrightarrow z = \frac{(-8-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
   $$\Leftrightarrow z = \frac{-8+8i-4i-4}{2}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{z = -6+2i.}$$
   BILAN : s est la rotation de centre le point d'affixe $-6+2i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
6. On calcule $s(z_R) = -i(-10+3i)-8-4i = -5+6i = z_A$. Ainsi, $\boxed{s(R) = A.}$ Nous avons de plus $\boxed{s(P) = s_2(s_1(P)) = s_2(C) = Q}$ car $s_1(P) = C$ et $s_2(C) = Q$.
7. L'image de la droite (RP) par s est la droite $(s(R)s(P))$ puisque s est une similitude directe, donc une transformation affine. De plus $S(R) = A$ et $s(P) = Q$ d'après précédemment. Ainsi, l'image de (RP) est en fait la droite (AQ). Enfin, puisque s est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, l'image de (RP) par s est une droite tournée de $-\frac{\pi}{2}$, donc une droite perpendiculaire à (AQ). On en déduit $\boxed{(RP) \text{ et } (AQ) \text{ perpendiculaires.}}$

Problème 1:

Partie 1.

1. Nous avons
$$\begin{aligned} R_n - S_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n}\left(\sqrt{\tfrac{n+1}{n}} - 1\right) \\ &= 2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1\right). \end{aligned}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to} \dfrac{1}{n} = 0$, les équivalents usuels donnent : $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$. Par conséquent, par produit : $R_n - S_n \sim 2\sqrt{n}.\frac{1}{2n}$, c'est à dire $\boxed{R_n - S_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}.}$ D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} R_n - T_n = 0.}$

2. (a)
$$\begin{aligned} 2\sqrt{k(k+1)} \le 2k+1 \quad &\Leftrightarrow 4k(k+1) \le (2k+1)^2 \quad \text{car } 2k+1 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow 4k^2+4k \le 4k^2+4k+1 \\ &\Leftrightarrow 0 \le 1 \end{aligned}$$
La dernière inégalité étant toujours vraie, nous en déduisons : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ 2\sqrt{k(k+1)} \le 2k+1.}$

(b) • Nous avons :
$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$
D'après la question précédente appliquée à $k = n$, nous voyons que le numérateur est négatif. Le dénominateur est positif car la racine carrée d'un nombre est positive. Au final, le quotient est négatif ce qui prouve que $R_{n+1} - R_n \le 0$, donc que $\boxed{(R_n) \text{ est décroissante.}}$

• Nous avons :
$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{2(n+1) + 1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$
D'après la question précédente appliquée à $k = n+1$, nous voyons que le numérateur est positif. Le dénominateur est positif car la racine carrée d'un nombre est positive. Au final, le quotient est positif ce qui prouve que $T_{n+1} - T_n \ge 0$, donc que $\boxed{(R_n) \text{ est croissante.}}$

(c) Nous avons : •(T_n) croissante
•(R_n) décroissante
• $\lim\limits_{n\to+\infty} (R_n - T_n) = 0$

On en déduit que les suites $\boxed{(R_n) \text{ et } (T_n) \text{ sont adjacentes, donc qu'elles convergent vers une même limite } L.}$
Nous avons de plus les inégalités : $\boxed{T_n \le L \le R_n.}$

3. $T_n \le L \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \le L \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n+1} + L$. De même avec (T_n) ce qui nous donne : $\boxed{2\sqrt{n} + l \le S_n \le 2\sqrt{n+1} + L.}$

En divisant par $2\sqrt{n}$ les inégalités précédentes deviennent : $1 + \dfrac{L}{2\sqrt{n}} \le \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} \le \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \dfrac{L}{2\sqrt{n}}$. Par ailleurs, par opérations élémentaires, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{L}{2\sqrt{n}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \dfrac{L}{2\sqrt{n}}\right) = 0$.
Par théorème d'encadrement, la suite de terme général $\dfrac{S_n}{2\sqrt{n}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$, donc $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}.}$

Partie 2.

1. $\boxed{u_1 = 2,\ u_2 = 2 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

2. On pose $\mathcal{P}(n)$ « $1 \le u_n \le n+1$ ». Montrons par récurence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
   - **initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 \le 1 \le 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $1 \le u_n \le n+1$. On veut montrer $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, c'est à dire $1 \le u_{n+1} \le n+2$.
   Nous avons : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$. Par hypothèse de récurrence $1 \le u_n \le n$. Par passage à la racine, puis à l'inverse, nous en déduisons : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{u_n}} \le 1$. En sommant, nous obtenons ainsi :
   $$\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\ge 1} \le \underbrace{u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}}_{=u_{n+1}} \le n+2.$$
   Ceci prouve l'hérédite.

   BILAN : Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \le u_n \le n+1.}$

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \ge 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

4. (a) Nous avons $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{\sqrt{u_k}} \ge \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ puisque $u_k \le k+1$ et par passage à la racine, puis à l'inverse. En sommant, nous obtenons : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \ge \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. De plus, par glissement d'indice, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Finalement :
$$\boxed{v_n \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

(b) Par télescopage, nous obtenons une expression simple de v_n : $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1$.
Ainsi, d'après la question précédente, nous avons la minoration : $u_n - 1 \ge \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, c'est à dire : $\boxed{u_n \ge \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 1.}$

(c) L'inégalité précédente se réecrit : $u_n \ge S_n + 1$. Or, d'après la première partie, $S_n \sim 2\sqrt{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$, nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n + 1 = +\infty$. Finalement, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

5. Nous avons les inégalités : $S_n + 1 \leq u_n \leq n+1$. Ainsi, pour $\alpha > 1$, en divisant par n^α, nous obtenons :

$$\frac{S_n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{u_n}{n^\alpha} \leq \frac{n+1}{n^\alpha}.$$

- Par quotient, $\frac{S_n}{n^\alpha} \sim \frac{2}{n^{\alpha-1/2}}$. Puisque $\alpha - 1/2 > \frac{1}{2} > 0$, nous en déduisons : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{\alpha-1/2}} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^\alpha} = 0$. Par somme : $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} = 0$.
- Par ailleurs, comme $n+1 \sim n$, par quotient, $\frac{n+1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Or $\alpha - 1 > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^\alpha} = 0$.

BILAN : Par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} = 0$, donc $\boxed{u_n = o\left(n^\alpha\right).}$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir surveillé n° 7.

Consignes générales :
– *La durée de l'épreuve est de 3 heures ;*
– *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
– *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
– *Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
– *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1

–Projecteurs et algèbre linéaire–

On considère les ensembles F et G suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z \right\}; \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F et G.
2. Donner une base et la dimension de F et G.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, calculer $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$.
5. Soit q l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que q est un projecteur.
6. Donner une famille génératrice du noyau de q : $\mathrm{Ker}(q)$.
7. Vérifier que $\mathrm{Ker}(q) \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.
8. Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$.
9. En déduire que $p \circ q = q$ et que $q \circ p = p$. (*Il n'est pas nécessaire d'avoir calculé p à la question 4 pour répondre à cette question ni aux suivantes.*)
10. On considère dans cette question l'application $r = p + q$. On notera dans cette question $r^2 = r \circ r$ et plus généralement, $r^n = \underbrace{r \circ \ldots \circ r}_{n \text{ fois}}$.
    (a) Montrer que $r^2 = 2r$. r est-elle un projecteur ?
    (b) Pour tout entier $n \geq 2$ calculer r^n en fonction de r.
    (c) On note id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Montrer les deux inclusions :
    $$(a)\ \mathrm{Im}(r - 2id) \subset \mathrm{Ker}(r) \qquad\qquad (b)\ \mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Ker}(r - 2id).$$
    (d) Écrire id comme une combinaison linéaire de r et $r - 2id$.
    (e) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(r) \oplus \mathrm{Ker}(r - 2id)$.
    (f) Donner l'expression de la projection vectorielle h sur $\mathrm{Ker}(r)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(r - 2id)$.

Exercice 1

–Limites, continuité et équivalents–

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent simple, puis calculer la limite des fonctions suivantes, au point a proposé :

(a) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{\sin(x)}}$, $a=0$; (b) $\dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{\ln(1+\sin(x))}$, $a=0$; (c) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{(x+1)^2}{5x+3}$, $a=1$;

(d) $\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\ln(x)-\ln(3)}$, $a=3$; (e) $\sqrt{x^2+1}-x$, $a=+\infty$. (f) $\ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)$, $a=+\infty$.

2. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.
   (b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$? Si oui, précisez son prolongement.
3. Étudier la continuité à gauche de 0, à droite de 0 et la continuité en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}(1+xE(x))^{1/x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 \quad \text{sinon}\end{cases}.$$

Problème 2

–D'après EM Lyon 2009–

1. (a) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^4-4x+1$ (on précisera les limites aux bornes).
   (b) En déduire que l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions réelles α et β (en notant α la plus petite).
   (c) Justifier que $\alpha\in\left[0;\ \frac{1}{3}\right[$ et $\beta>1$.
   (d) En utilisant la dichotomie, donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x^4+1}{4}$. On définit alors une suite par son premier terme $u_0=0$ et la relation, valable pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n^4+1}{4}$.
   (a) Étudier les variations de g (on précisera les valeurs aux bornes), et verifier que $g(\alpha)=\alpha$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
   (d) Écrire un programme en MAPLE (ou dans le langage de votre choix) qui affiche la valeur de u_n, avec n choisi par l'utilisateur.
3. (a) Montrer que $g(\alpha)-g(u_n)=\frac{1}{4}(\alpha-u_n)(\alpha+u_n)(\alpha^2+u_n^2)$, puis : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{3^3}\right)|u_n-\alpha|$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{3^{3n+1}}.$$
   (c) Déterminer alors une valeur n_0 pour laquelle u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Comparer avec la dichotomie.
   (d) Écrire un programme en MAPLE (ou dans le langage de votre choix) qui détermine une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-6} près. Donner la valeur de u_n correspondante.

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆

CORRECTION DU DS 7.

Problème 1:

1. • Soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Alors :
$$\overrightarrow{u}\in F \Leftrightarrow \overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\z\\z\end{pmatrix} \quad \text{car } y=z$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u}\in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$
Ainsi : $\boxed{F=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$. En particulier, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$. Une famille génératrice est $\boxed{\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$.

• Soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Alors :
$$\overrightarrow{u}\in G \Leftrightarrow \overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}y\\y\\2y\end{pmatrix} \quad \text{car } \begin{cases}x=y\\z=2y\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u}=y\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u}\in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$
Ainsi : $\boxed{G=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)}$. En particulier, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$. Une famille génératrice est $\boxed{\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)}$.

2. • $\mathcal{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. Cette famille est par ailleurs libre car les deux vecteurs sont non nuls et non colinéaires. $\boxed{\mathcal{F} \text{ est donc une base de } F.}$ Par conséquent $\boxed{\dim(F)=2.}$

• G est une droite vectorielle donc $\boxed{\dim(G)=1}$ et $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right) \text{ forme une base de } G.}$

3. • Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Alors :
$$\overrightarrow{u}\in F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases}y=z\\x-y=0\\z-2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2y\\x=y\\z=2y\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=y=0\\z=2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
Ainsi, $\boxed{F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}.}$

• D'après précédemment, $F+G=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$. En développant par rapport à la première colonne, nous obtenons, $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$. La famille $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ forme donc une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\mathbb{R}^3$. Ainsi : $\boxed{F+G=\mathbb{R}^3.}$

BILAN : Nous avons $F+G=\mathbb{R}^3$ et $F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

4. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On cherche $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \text{ avec} \begin{cases}\overrightarrow{u}\in F\\ \overrightarrow{v}\in G\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a+v\\y=b+v\\z=b+2v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a+v\\y=b+v\\z=b+2v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=x+y-z\\b=2y-z\\v=z-y\end{cases}$$
Ainsi, $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x+y-z\\2y-z\\2y-z\end{pmatrix}$, donc $\boxed{\overrightarrow{u}=p\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y-z\\2y-z\\2y-z\end{pmatrix}}$.

5. Comme q est un endomorphisme, il est linéaire. Donc, pour montrer que q est un projecteur, il suffit de vérifier que $q\circ q=q$. Pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$,
$$(q\circ q)\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=q\left(\begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(x+y-z)+y-y\\y\\y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}=q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right).$$
Donc $\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$

6. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Nous avons :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(q) \Leftrightarrow q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y-z=0\\ y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}$$

Donc $\ker(q) == \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\boxed{\text{une famille génératrice de } \ker q \text{ est } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$.

7. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Nous avons : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(q)\cap G \quad \Leftrightarrow x = z \text{ et } y = 0 \text{ et aussi } x = y \text{ et } z = 2y$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Ainsi $\boxed{\ker(q)\cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.}$

8. $$\begin{aligned}\vec{u} \in \text{Im}(q) \quad &\Leftrightarrow \vec{u} = q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \vec{u} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \vec{u} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Im}(f) = \text{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u_1}},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u_3}}\right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ car $\vec{u_3} = -\vec{u_1}$.

D'autre part, nous avons vu précdemment que : $\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = F$. Il reste à voir que ces deux ensembles sont égaux. On procède par double inclusion :

- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Donc, $\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est un sous-espace vectoriel de F et : $\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \subset F$.
- De la même façon, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
  Donc, $\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(q)$ et : $\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \subset \text{Im}(q)$.

Ainsi : $\boxed{\text{Im}(q) = F}$.

9. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $q(v) \in F$ d'après la question précédente. Or p est un projecteur d'image F donc il laisse invariant tous les éléments de F. Donc $p(q(v)) = q(v)$ et finalement

$$\boxed{p \circ q = q}$$

De même, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $p(v) \in F$. Or q est un projecteur d'image F donc il laisse invariant tous les éléments de F. Donc $q(p(v)) = p(v)$ et finalement

$$\boxed{q \circ p = p}$$

10. (a) Pour $u \in \mathbb{R}^3$, nous avons :

$$\begin{aligned} r^2(u) &= (p+q)\circ(p+q)(u) = (p+q)(p(u)+q(u)) = p(p(u)+q(u)) + q(p(u)+q(u))\\ &= \underbrace{p(p(u)) + p(q(u)) + q(p(u)) + q(q(u))}_{\text{par linéarité}} = \underbrace{p(u)+q(u)+p(u)+q(u)}_{\text{car } p^2=p, q^2=q, p\circ q=q, q\circ p=p} = 2(p(u)+q(u)) = 2(p+q)(u)\\ &= 2r(u).\end{aligned}$$

$r = p+q$ est bien linéaire mais $r^2 = 2r \neq r$, donc $\boxed{r \text{ n'est pas un projecteur.}}$

(b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $r^n = 2^{n-1}r$.
Initialisation : on vient de voir que $r^2 = 2r$.
Hérédité : supposons que $r^n = 2^{n-1}r$. Alors, pour $u \in \mathbb{R}^3$, $r^{n+1}(u) = r^n(r(u)) = \underbrace{(2^{n-1}r)(r(u))}_{\text{hypothèse de récurrence}} = 2^{n-1}r^2(u) = 2^{n-1}2r(u) = 2^n r(u)$. Ainsi, $r^{n+1} = 2^n r$, ce qui prouve l'hérédité.

BILAN : Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geq 2,\ \ r^n = 2^{n-1}r.}$

(c) Soit $y \in \text{Im}(r-2id)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = r(x) - 2x$. Alors

$$r(y) = r(r(x)-2x) = r^2(x) - 2r(x) = 2r(x) - 2r(x) = 0,$$

donc $y \in \text{Ker}(r)$. Et finalement on a

$$\boxed{\text{Im}(r-2id) \subset \text{Ker}(r)}$$

Soit $y \in \text{Im}(r)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = r(x)$. Alors

$$(r-2id)(y) = r(y) - 2y = r(r(x)) - 2r(x) = r^2(x) - 2r(x) = 2r(x) - 2r(x) = 0,$$

et donc $y \in \text{Ker}(r-2id)$. Finalement

$$\boxed{\text{Im}(r) \subset \text{Ker}(r-2id)}$$

(d) On a

$$\boxed{id = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}(r-2id)}$$

(e)
- On commence par montrer que $\text{Ker}(r)\cap\text{Ker}(r-2id) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$:
  Soit $x \in \text{Ker}(r)\cap\text{Ker}(r-2id)$, alors $r(x) = 0$ et $r(x) - 2x = 0$ et donc $x = 0$. Comme tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contient bien $0_{\mathbb{R}^3}$, on a finalement l'égalité, $\underline{\text{Ker}(r)\cap\text{Ker}(r-2id) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$
- Il reste à montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(r) + \text{Ker}(r-2id)$:
  Soit $x \in \mathbb{R}^3$, alors $x = id(x)$ et, en utilisant la relation de la question précédente,

  $$x = \frac{1}{2}r(x) - \frac{1}{2}(r-2id)(x)$$

  De plus $\frac{1}{2}r(x) \in \text{Im}(r)$ et on a vu que $\text{Im}(r) \subset \text{Ker}(r-2id)$; donc $\frac{1}{2}r(x) \in \text{Ker}(r-2id)$.
  De même $\frac{1}{2}(r-2id)(x) \in \text{Im}(r-2id)$, et on a vu que $\text{Im}(r-2id) \subset \text{Ker}(r)$; donc $\frac{1}{2}(r-2id)(x) \in \text{Ker}(r)$.
  Finalement on a bien décomposé tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme une somme d'un vecteur de $\text{Ker}(r-2id)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(r)$, c'est-à-dire $\underline{\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(r) + \text{Ker}(r-2id)}$.

BILAN : Les deux points réunis montrent que :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(r-2id) \oplus \text{Ker}(r)}$$

(f) On vient de voir la décomposition de tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ selon $\text{Ker}(r-2id)\oplus\text{Ker}(r)$:

$$x = \frac{1}{2}r(x) - \frac{1}{2}(r-2id)(x) \text{ avec } \frac{1}{2}r(x) \in \text{Ker}(r-2id), -\frac{1}{2}(r-2id)(x) \in \text{Ker}(r)$$

Et donc $h : x \to -\frac{1}{2}(r-2id)(x)$ i.e. $\boxed{h = -\frac{1}{2}(r-2id)}$

Exercice 1:

1. (a) Posons $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{\sin(x)}}$. Alors :

   - $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}= 0$, donc $\ln(1+\sqrt{x}) \sim_0 \sqrt{x}$ (équivalent usuel).
   - $\sin(x) \sim_0 x$ donc par passage à la puissance, $\sqrt{\sin(x)} \sim_0 \sqrt{x}$.
   - Par quotient, $\boxed{f(x) \sim_0 1.}$ On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)= 1.}$

   (b) Posons $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{\ln(1+\sin x)}$. Alors :

   - $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) - 1= 0$ donc : $\sqrt{\cos(x)}-1 = \sqrt{1+(\cos(x)-1)}-1 \sim_0 \frac{1}{2}(\cos(x)-1)$ (équivalent usuel).
     D'autre part, $\cos(x)-1 = -(1-\cos(x)) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ (multiplication par un réel et équivalent usuel).
     Donc $\sqrt{\cos(x)}-1 \sim_0 -\frac{x^2}{4}$ (transitivité).
   - $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)= 0$, donc $\ln(1+\sin x) \sim_0 \sin(x) \sim_0 x$ (équivalents usuel et transitivité).
   - Par quotient, $\boxed{f(x) \sim_0 -\dfrac{x}{4}.}$ Puisque $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{4}= 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)= 1.}$

   (c) Posons $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{(x+1)^2}{5x+3}$. Commençons par simplifier f en mettant ce-dernier au même dénominateur : $f(x) = \dfrac{x^2(5x+3)-(x+1)^3}{(x+1)(5x+3)} = \dfrac{4x^3-3x^2-1}{(x+1)(5x+3)}$. On factorise maintant le dénominateur. Pour cela, nous constatons que 1 est une solution évidente. On fait donc une division euclidienne par $x-1$:

$$\begin{array}{rrr|l} 4x^3 & -3x & -1 & x \quad -1 \\ \cline{4-4} 4x^2 & -3x & -1 & 4x^2 \ +4x \ +1 \\ & x & -1 & \\ & & 0 & \end{array}$$

   Ainsi : $f(x) = \dfrac{(x-1)(4x^2+4x+1)}{(x+1)(5x+3)}$.
   Comme : $\lim\limits_{x\to 1} 4x^2+4x+4= 12 \neq 0$, nous avons $4x^2+4x+4 \sim_1 9$. De même, $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(5x+3)= 16 \neq 0$, donc $(x+1)(5x+3) \sim_1 16$.
   Finalement, par produit et quotient, $\boxed{f(x) \sim_1 \dfrac{9}{16}(x-1).}$
   Enfin $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9}{16}(x-1)= 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x)= 0.}$

   (d) Posons $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\ln(x)-\ln(3)}$ et $x = 3+u$. Nous avons u proche de 0 lorsque x est proche de 3. L'expression devient alors :

$$\frac{\sqrt{2(3+u)+3}-3}{\ln(3+u)-\ln(3)} = \frac{\sqrt{9+2u}-3}{\ln\left(\frac{3+u}{3}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2u}{9}}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{u}{3}\right)}$$

   - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2u}{9}= 0$ donc : $\sqrt{1+\frac{2u}{9}}-1 \sim_0 \frac{1}{2}\frac{2u}{9} \sim_0 \frac{u}{9}$ (équivalent usuel).
   - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u}{3}= 0$, donc $\ln\left(1+\frac{u}{3}\right) \sim_0 \frac{u}{3}$.
   - Par produit et quotient, $\boxed{f(x) \sim_3 1.}$ On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to 3} f(x)= 1.}$

   (e) Posons $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$. Nous avons : $f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$. Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}= 0$, nous avons : $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1 \sim_{+\infty} \frac{1}{2x^2}$ (équivalent usuel). Par produit :
   $\boxed{f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2x}.}$ Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x}= 0$ on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 0.}$

   (f) Posons : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)$. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{x^2+3}{x^2+1}-1}_{u(x)}= 0$, donc $f(x) = \ln(1+u(x)) \sim_{+\infty} u(x)$.
   De plus, $u(x) = \frac{x^2+3-x^2-1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{2}{x^2}$ (par quotient). Ainsi, $\boxed{f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{2}{x^2}.}$ On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 0.}$

2. (a) Le domaine de définition de f est $D =]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. Par produit et quotient de fonctions continues (la fonction logarithme est continue sur $]0;\ +\infty[$ donc sur D et les autres fonctions sont polynômiales donc continues sur D) f est continue sur D.

   (b)
   - Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)= 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)= 0$.
   - Posons $x = 1+u$, avec u proche de 0 lorsque x est proche de 1. L'expression devient alors : $\frac{(1+u)\ln(1+u)}{2u+u^2}$. Comme $1+u \sim_0 1$ et $\ln(1+u) \sim_0 u$ (équivalents usuels), nous avons : $(1+u)\ln(1+u) \sim_0 u$ (produit). De plus, $2u+u^2 \sim_0 2u$ (équivalent usuel), donc par quotient $\frac{(1+u)\ln(1+u)}{2u+u^2} \sim_0 \frac{1}{2}$. Par conséquant, $f(x) \sim_1 \frac{1}{2}$. Ceci prouve que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)= \frac{1}{2}$.

   BILAN : f admet une limite finie en 0 et en 1 et est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Elle est donc prolongeable par continuité en 1. Son prolongement par continuité $\tilde{f}$ est défini par : $\boxed{\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x = 0 \\ 1/2 \text{ pour } x = 1 \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}}$.

3. Pour $x \neq 0$, nous avons : $f(x) = e^{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{1}{x}\ln(1+E(x))$. On vérifie $f(0) = 1$.

   - Pour $x \in [0;\ 1[$, nous avons : $E(x) = 0$, donc $u(x) = 0$ et $f(x) = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= 1 = f(0)$ et $\boxed{f \text{ est continue à droite de } 0.}$
   - Pour $x \in [-1;\ 0[$, nous avons : $E(x) = -1$, donc $u(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x)$. Or $\frac{1}{x}\ln(1-x) \sim_0 -1$ par produit d'équivalents et puisque $\ln(1-x) \sim_0 -x$. Ainsi : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} u(x) = 1 \\ \lim\limits_{X\to -1} e^X = \dfrac{1}{e} \end{array}\right\} \Rightarrow$(composition) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)= \frac{1}{e} \neq f(0)$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue à gauche de } 0.}$
   - f n'est pas continue à gauche de 0, donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 0.}$

Problème 2:

1. (a) h est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 4(x^3-1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$. Le discriminant de x^2+x+1 est strictement négatif et son coefficient dominant est égal à 1, donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 > 0$. h' est donc du signe de $x-1$. Ainsi :
   - Pour $x \in [1;\ +\infty[$ $h'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'une fois en 1, donc <u>h est strictement croissante.</u>
   - Pour $x \in]-\infty;\ 1]$ $h'(x) \leq 0$ et ne s'annule qu'une fois en 1, donc <u>h est strictement décroissante.</u>

   De plus, $h(x) \sim_{\pm\infty} x^4$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4= +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)= +\infty.}$

   (b)
   - sur $I_1 = [1;\ +\infty[$, h est strictement croissante et continue (car dérivable) donc induit une bijection de I_1 sur $h(I_1) = [h(1);\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[= [-2;\ +\infty[$. Puisque $0 \in h(I_1)$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur I_1 que l'on notera β.
   - sur $I_2 =]-\infty;\ 1]$, h est strictement décroissante et continue donc induit une bijection de I_2 sur $h(I_2) = [h(1);\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)[= [-2;\ +\infty[$. Puisque $0 \in h(I_2)$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur I_2 que l'on notera α

   $\boxed{\text{L'équation admet donc au final exactement deux solutions réelles : } \alpha \text{ et } \beta.}$

(c) $\beta \in I_1$, donc $\beta \geq 1$. De plus $h(1) \neq 0$, donc $\boxed{\beta > 1.}$
$h(0) = 1 > 0$ et $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3} < 0$, donc $\alpha \in \left]0;\ \frac{1}{3}\right[$.

(d) Nous prenons, $a_0 = 0$ et $b_0 = \frac{1}{3}$. On cherche n tel que :

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq 10^{-1} \quad \Leftrightarrow -\ln(3) - n\ln(2) \leq -\ln(10) \quad \text{car ln est strictement croissante}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(3) + \ln(10)}{\ln(2)} \approx 1,74.$$

Nous devons donc calculer a_2 (par exemple). Les calculs donnent :

- $h\left(\frac{1}{6}\right) > 0$, donc $a_1 = \frac{1}{6}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$;
- $h\left(\frac{1}{4}\right) > 0$, donc $a_2 = \frac{1}{4}$ et $b_2 = \frac{1}{3}$;

Finalement, $\boxed{\frac{1}{4} \text{ et } \frac{1}{3} \text{ sont deux valeurs approchées de } \alpha \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}}$

2. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynômiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x^3$. Ainsi :

- Pour $x \in [0;\ +\infty[$ $g'(x) \geq 0$ donc$g$ est croissante.
- Pour $x \in]-\infty;\ 0]$ $h'(x) \leq 0$ donc g est strictement décroissante.

De plus, pour les mêmes raisons que précédemment, $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty.}$

Enfin, pour $x \neq 0$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 4x \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{4x} = x \Leftrightarrow g(x) = x$.
Comme $\alpha \neq 0$ est tel que $h(\alpha) = 0$; on en déduit $\boxed{g(\alpha) = \alpha.}$

(b) On considère $\mathcal{P}(n)$ « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. »Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{4}$. Nous avons donc $0 \leq u_n \leq u_1 \leq 1$. Ceci prouce que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **hérédité.** On suppose $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. On veut montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Puisque g est croissante sur $[0;\ 1]$, $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$, puisque $g(\alpha) = \alpha$. Enfin $0 \leq \frac{1}{4}$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$. Ceci prouve l'hérédité.

BILAN : Par récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ pour tout entier naturel n.

(c) D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par α, donc elle converge. De plus les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0;\ \alpha]$ et g est continue sur $[0;\ \alpha]$, donc la limite de (u_n) est un point fixe pour g sur $[0;\ \alpha]$, c'est à dire α. Par conséquent : $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha.}$

(d) On écrit une procédure qui définit notre suite, que l'on va appeler « suite » :

[> `suite:=proc(n)`	nom du programme et arguments
[> `local k,u;`	variables locales
[> `u[0]:=0;`	initialisation
[> `for k from 1 to n do`	boucle « for »
[> `u[k]:=(u[k-1]^4+1)/4;`	
[> `od;`	fin de boucle
[> `evalf(u[n]);`	valeur approchée de u_n
[> `end :`	fin du programme

3. (a)

$$\begin{aligned} g(\alpha) - g(u_n) &= \frac{\alpha^4+1}{4} - \left(\frac{u_n^4+1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^4 - u_n^4) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - u_n^2)(\alpha^2 + u_n^2) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}(\alpha - u_n)(\alpha + u_n)(\alpha^2 + u_n^2).} \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous en déduisons : $\alpha - u_{n+1} = g(\alpha) - g(u_n) = \frac{1}{4}(\alpha - u_n)(\alpha + u_n)(\alpha^2 + u_n^2)$ donc $|\alpha - u_{n+1}| = \frac{1}{4}(\alpha + u_n)(\alpha + u_n^2)(\alpha - u_n)$ car $\alpha \geq 0$ et $0 \leq u_n \geq \alpha$. De plus $u_n \leq \alpha$ donc $0 \leq \alpha + u_n \leq 2\alpha$. De même, $0 \leq \alpha^2 + u_n^2 \leq 2\alpha^2$. En faisant le produit des inégalités (les termes sont tout positifs), nous obtenons : $0 \leq \frac{1}{4}(\alpha + u_n)(\alpha + u_n^2)(\alpha - u_n) \leq \frac{1}{4}.2\alpha 2\alpha^2|\alpha - u_n| \Leftrightarrow \alpha^3(\alpha - u_n)$. Enfin $\alpha \leq \frac{1}{3}$ donc $\alpha^3 \leq \frac{1}{3^3}$. Finalement, puisque $\alpha - u_n = |\alpha - u_n|$, nous obtenons :

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3^3}\right)|u_n - \alpha|.}$$

(b) On procède par récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$ « $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{3^{3n+1}}$. »

- **initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $|u_0 - \alpha| = \alpha \leq \frac{1}{3}$. Nous avons donc $|u_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{3^{3.0+1}}$. Ceci prouce que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **hérédité.** On suppose $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^{3n+1}}$. On veut montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{3^{3n+4}}$.

Nous avons :
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leq \left(\frac{1}{3^3}\right)|u_n - \alpha| \quad \text{d'après 3.(a)} \\ &\leq \left(\frac{1}{3^3}\right)\frac{1}{3^{3n+1}} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{1}{3^{3+3n+1}} \\ &\leq \frac{1}{3^{3n+4}} \end{aligned}$$
. Ceci prouve l'hérédité.

BILAN : Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{3^{3n+1}}$ pour tout entier naturel n.

(c) On résout :
$$\begin{aligned} \frac{1}{3^{3n+1}} \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow -(3n+1)\ln(3) \leq -3\ln(10) \quad \text{car ln est croissante} \\ &\Leftrightarrow 3n+1 \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(3)} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(3)} - \frac{1}{3} \approx 1,76 \end{aligned}$$

On prend donc $\boxed{n_0 = 2}$, et alors $|u_2 - \alpha| \leq 10^{-3}$, donc $\boxed{u_2 \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$

Avec la dichotomie pour $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on cherche n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)}$. Alors $n = 10$ convient. Par conséquent, notre algorithme semble mieux adapté pour obtenir des valeurs approchées de α.

(d) [> `n:=0;while abs(1/3^(3*n+1))>10^(-6) do n:=n+1;n;od;` on trouve $n = 4$. On calcule $\boxed{u_4 \approx 0,2509921536.}$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Devoir surveillé n^o 8.

Consignes générales :
- *La durée de l'épreuve est de 4 heures ;*
- *Les résultats définitifs devront être encadrés avec soin. Il sera tenu compte de la clarté, de la rigueur et de la présentation dans la notation ;*
- *Calculatrice autorisée et documents interdits ;*
- *Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes que l'on pourra traiter dans n'importe quel ordre ;*
- *Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercice 1

–Étude d'une suite–

1. Soit f l'application qui à un réel x associe 0 si $x=0$ et $\dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (d) Déterminer le développement limité de f en e à l'ordre 2. En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en e au voisinage de e.
   (e) Dresser le tableau de variations de f. On y fera notamment apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=3$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.
   (a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq e$.
   (b) Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer que : $\forall x\in[e,+\infty[,\ 0\leq f'(x)\leq\frac{1}{4}$.
   (d) En déduire que : $\forall y\in[e,+\infty[,\ 0\leq f(y)-f(e)\leq\frac{1}{4}(y-e)$.
   (e) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-e|\leq\frac{1}{4^n}$.
   (f) Déterminer un entier n_1 à partir duquel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Problème 1

–D'après Mines Sup 2004–

Dans tout le problème on notera :

- I et J les matrices définies par : $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ et $J=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$.
- $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel usuel orienté muni d'une base orthonormée directe $B=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$;
- f l'endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ défini par sa matrice J relativement à la base B ;
- $\overrightarrow{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{t}=x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}+z\,\overrightarrow{k}$, on note $\left[\overrightarrow{t}\right]=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ la matrice de $\overrightarrow{t}$ relativement à la base B.

PARTIE I : Expression de f dans une base réelle.

I-1. Calculer $f(\overrightarrow{u})$ et prouver que le plan Q d'équation $x+y+z=0$ est stable par f (c'est-à-dire que l'image par f de tout vecteur de Q appartient à Q).

I-2. On pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right)$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

I-3. (a) Vérifier que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base du plan Q.

(b) Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\overrightarrow{E}$. Cette dernière est-elle orthonormée directe ?

(c) Montrer que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$, où a, b, c, d sont des réels que l'on n'aura pas besoin d'expliciter.

PARTIE II : Expression de f dans une base complexe.

On définit les matrices colonnes à coefficients complexes $X_1 = \sqrt{3}\,[\overrightarrow{u}]$, $X_2 = [\overrightarrow{v}] + i\,[\overrightarrow{w}]$ et $X_3 = [\overrightarrow{v}] - i\,[\overrightarrow{w}]$ et on désigne par P la matrice carrée d'ordre 3 : $P = [X_1\ X_2\ X_3]$.

II-1. Exprimer les coefficients non réels de P en fonction de j et j^2. (On rappelle que j désigne le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

II-2. Soit $\overline{P}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. Exprimer le produit $P.\overline{P}$ en fonction de la matrice I. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.

II-3. (a) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer JX_i en fonction de X_i.

(b) En déduire une matrice diagonale Δ telle que : $P\Delta = JP$.

PARTIE III : Étude de matrices associées à J.

On note : $C(J) = \{M \in M_3(\mathbb{C}) / MJ = JM\}$ l'ensemble des matrices M qui commutent avec J.

III-1. Montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$ engendré par I, J et J^2.

III-2. Donner une base et la dimension de $C(J)$.

III-3. a, b et c désignant des nombres complexes quelconques, on note : $M(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2$.

(a) Calculer la matrice $D(a,b,c) = P^{-1}M(a,b,c)P$, en utilisant le résultat de la question **II-3.** (b).

(b) Calculer de façon indépendante les déterminants de $M(a,b,c)$ et $D(a,b,c)$.

(c) En déduire que l'expression : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, est le produit de trois expressions de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c$ où α, β et γ représentent des nombres complexes à préciser.

(d) On suppose que a, b, c sont distincts et on considère ces nombres comme les affixes respectives des sommets A, B, C d'un triangle (T) dans un plan complexe d'origine O.

(e) Prouver que la matrice $M(a,b,c)$ est singulière (autrement dit : non inversible) si et seulement si (T) est équilatéral ou si O est son centre de gravité.

PARTIE IV : Application à l'étude d'une suite récurrente.

On reprend dans cette partie les notations utilisées dans la partie précédente.
On construit par récurrence une suite (T_n) de triangles de sommets A_n, B_n et C_n en posant :

- $(T_0) = (T)$.
- λ désignant un nombre réel, pour tout entier naturel n, (T_{n+1}) est le triangle dont les sommets $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ sont tels que :

A_{n+1} est le barycentre des points pondérés (B_n, λ) et $(C_n, 1-\lambda)$
B_{n+1} est le barycentre des points pondérés (C_n, λ) et $(A_n, 1-\lambda)$
C_{n+1} est le barycentre des points pondérés (A_n, λ) et $(B_n, 1-\lambda)$

On note : a_n, b_n et c_n les affixes respectives des sommets A_n, B_n et C_n.

$$Y_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \text{ et } Z_n = P^{-1}Y_n$$

IV-1. Prouver que pour tout entier n : $Z_{n+1} = D(0, \lambda, 1-\lambda) . Z_n$.

IV-2. Expliciter les coefficients de la matrice $(D(0, \lambda, 1-\lambda))^n$.

IV-3. (a) On admet qu'une suite géométrique non nulle de raison complexe q converge si et seulement si $q = 1$ ou $|q| < 1$.
Prouver que la suite définie pour tout entier n par $\left(\lambda j + (1-\lambda) j^2\right)^n$converge si et seulement si λ appartient à un intervalle à préciser.

(b) Prouver que si cette condition est réalisée, les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) convergent.

IV-4. (a) Exprimer $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de $a_n + b_n + c_n$.

(b) Prouver que les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) ont même limite.

(c) Exprimer cette limite en fonction de a, b et c.

Problème 2

-Régularité et dérivées successives d'une fonction-

On étudie ci-dessous la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$.

PARTIE I : Régularité.

I-1. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est de classe C^∞ sur D.

I-2. (a) Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera. On notera encore f ce prolongement dans la suite.

(b) Montrer que le prolongement f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

I-3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n que l'on précisera.

PARTIE II : Expression des dérivées successives

On considère dans cette partie $x \in \mathbb{R}^*$.

II-1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)e^{-x} + a_n}{x^{n+1}}$ où P_n est un polynôme de degré n et $a_n \in \mathbb{R}$. On montrera au passage :

$$P_{n+1} = XP_n' - (X + n + 1)P_n \tag{1}$$

$$a_{n+1} = -(n+1)a_n \tag{2}$$

II-2. Calculer a_0, a_1, a_2, P_0, P_1, P_2.

II-3. Proposer un algorithme écrit en `Maple` ou `Mathematica` qui permette de calculer P_{50}.

II-4. Proposer une expression simple pour a_n que l'on ne cherchera pas à démontrer par récurrence.

II-5. (a) On note g la fonction définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

(b) Rappeler l'énoncé de la formule de Leibniz et en déduire :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}(e^{-x} - 1) + (-1)^n n! e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{x^{n-k+1}}.$$

(c) Montrer finalement que $P_n(x) = (-1)^n n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆