

Grands nombres... et plus

P S I · 2 4 2 5 · B O N U S

Contexte

On sait que

$$x^{100} \ll_{+\infty} e^x.$$

Mais

$$10^{100} \gg e^{10}.$$

Si $a = 647,277$,

$$a^{100} \approx e^a \approx 1,28 \cdot 10^{281}.$$

Taille de l'univers visible :

$$93 \text{ Gal} = 8,8 \cdot 10^{23} \text{ km}.$$

Nombre de particules dans l'univers :

$$\text{environ } 10^{80}.$$

Nombres de Mersenne

On appelle *nombres de Mersenne* les nombres $M_n = 2^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Si M_n est premier, n l'est aussi.

$M_{82\,589\,933} = 2^{82\,589\,933} - 1$ est premier (21 décembre 2018). Ce nombre comporte 24 862 048 chiffres (en base 10).

Itérations

a , b et n sont des entiers naturels.

Itérations

SUCCESSEUR. $a + 1$ est le successeur de a .

ADDITION. $a + b = a + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{b \text{ fois}}$.

MULTIPLICATION. $a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$.

EXPONENTIATION. $a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fois}}$.

Flèches de Knuth

$$a \uparrow b = a^b,$$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b \text{ fois}},$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b \text{ fois}},$$

$$\underbrace{a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow}_{n \text{ fois}} b = a \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow}_{n-1 \text{ fois}} a \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow}_{n-1 \text{ fois}} \cdots \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow}_{n-1 \text{ fois}} a.$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{b \text{ fois}}$

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} a^b & \text{si } n = 1, \\ 1 & \text{si } b = 0, \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b - 1)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nombre de Graham

Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 3 \uparrow^n 3$.

Le *nombre de Graham* est

$$G = f^{64}(4) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{64 \text{ fois}}(4).$$

Autrement dit, G est le terme d'indice 64 dans la suite

$$4, 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3, 3 \uparrow \uparrow \cdots \uparrow 3, \dots$$

où chaque nombre est le nombre de flèches du suivant.

Notation chaînée de Conway

$$a \rightarrow b = a^b.$$

Si X est une chaîne déjà formée, $X \rightarrow 1 = X$.

$$X \rightarrow a \rightarrow b = X \rightarrow (X \rightarrow (a - 1) \rightarrow b) \rightarrow b - 1.$$

Notation chaînée de Conway

Chaîne de longueur 1 : un nombre.

Chaîne de longueur 2 : une exponentielle.

Chaîne de longueur 3 : $a \rightarrow b \rightarrow n = a \uparrow^n b$.

$3 \rightarrow 3 \rightarrow 64 \rightarrow 2 < G < 3 \rightarrow 3 \rightarrow 65 \rightarrow 2$.

L'infini, c'est au delà...