Premier devoir à la maison

[E3A19]

L'usage de calculatrices est interdit.

1. Question de cours : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}.$$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

2.2. Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1.$$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose :

$$u_n = \frac{a_n}{n}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1.$$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4. Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

5. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2,3]$.

6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.$$

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} &\leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \\ &\leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1. \end{aligned}$$

8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.