

Corrigé du premier devoir à la maison

1. Oui, sans blague !

2.1. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On reconnaît que s_p est une somme partielle de la série $\sum_{k \geq n} 1/k$. Comme cette série est à termes positifs, la suite de ses sommes partielles croît. Et comme reste de la série harmonique qui diverge, cette série diverge, donc la suite des ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Ainsi, la suite (s_p) croît vers $+\infty$.

2.2. Par définition de la divergence vers $+\infty$,

$$\forall A > 0, \exists P \in \mathbb{N}, \forall p \geq P, p \geq P \implies s_p \geq A.$$

En choisissant $A = 2$ par exemple,

on voit qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_p > 1$.

3. D'après la définition de l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq n$, donc la suite (a_n) tend vers $+\infty$.

4. Traitons les deux inégalités différemment.

MAJORATION DIRECTE. Soit $n \geq 2$. Pour tout $k > 0$, $n + k > n$, donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1. \right|$$

MONOTONIE. Étudions la monotonie de la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k}.$$

Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n-1} \right) + \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{6n}{9n^2-1} - \frac{6n}{9n^2} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) croît strictement, donc pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq v_1 = 1$, c'est-à-dire

$$\left| \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1. \right|$$

Commentaire. La première inégalité peut aussi se prouver avec cette démarche. En revanche, je n'ai pas trouvé de preuve directe pour cette seconde inégalité. Et il est possible de procéder encore différemment pour l'une ou l'autre inégalité, par exemple avec une comparaison série-intégrale, ou en utilisant les sommes de Riemann.

5. Par définition de $p_n, s_{p_n} > 1$. D'après la question précédente, $s_{n-1} < 1$. Et d'après la question 2.1, la suite (s_p) croît. Donc $p_n > n-1$, d'où $a_n > 2n-1$ et $u_n > 2 - \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$, donc si u_n a une limite ℓ , $\ell \geq 2$.

De même, toujours d'après la question précédente, $s_{2n-2} > 1$. Or p_n est le plus petit entier tel que $s_{p_n} > 1$, donc $p_n \leq 2n-2$. Alors $a_n \leq 3n-2$ et $u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$. Là aussi, cela entraîne que $\ell \leq 3$.

Si ℓ existe, $\ell \in [2, 3]$.

6. Par définition, p_n est le plus petit entier tel que $s_{p_n} > 1$. Donc d'une part,

$$\left| \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n} = s_{p_n} > 1. \right|$$

Et d'autre part,

$$\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} = s_{p_n-1} \leq 1,$$

donc

$$\left| \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}. \right|$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto 1/t$ décroît sur $[j, j+1]$ donc

$$\frac{1}{j+1} \leq \int_j^{j+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} &= \sum_{j=n}^{a_n-1} \frac{1}{j+1} \\ &\leq \sum_{j=n}^{a_n-1} \int_j^{j+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{a_n} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} &= \sum_{j=n}^{a_n-1} \int_j^{j+1} \frac{dt}{t} \\ &\leq \sum_{j=n}^{a_n-1} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1}. \end{aligned}$$

Et d'après la question 6,

$$\left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}, \right|$$

et $\left| \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1. \right|$

8. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, d'après le théorème d'encadrement on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{a_n} \frac{dt}{t}$$

existe et vaut 1. Or

$$\int_n^{a_n} \frac{dt}{t} = \ln \frac{a_n}{n} = \ln u_n.$$

Par continuité de l'exponentielle en 1,

la suite (u_n) converge et sa limite est e .