

Corrigé du dixième devoir à la maison

CONVENTION. En suivant le programme, nous osons dire qu'une fonction est intégrable *en* b pour dire qu'elle est intégrable *sur un intervalle de la forme* $[a, b]$, même si l'expression n'est pas très heureuse.

P.1.a. Comme $0 < f \ll_b g$ et que g est intégrable en b , f est intégrable en b .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $x \in [c, b]$, $f(x) \leq \varepsilon g(x)$. Alors, par croissance de l'intégrale, et sachant que f et g sont intégrables sur $[a, b]$ donc sur $[x, b]$, $\int_x^b f \leq \varepsilon \int_x^b g$. On vient de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b], \int_x^b f \leq \varepsilon \int_x^b g,$$

$$\left| \text{c'est-à-dire } \int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right). \right|$$

P.1.b. Comme $0 < f \sim_b g$ et que g est intégrable en b , f est intégrable en b .

On peut à nouveau utiliser les ε . Sinon, dire que $f \sim_b g$ signifie que $f = g + o_b(g)$, donc pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_x^b f = \int_x^b g + \int_x^b (o_b(g)),$$

et avec la question précédente,

$$\int_x^b f = \int_x^b g + o_b\left(\int_x^b g\right),$$

$$\left| \text{c'est-à-dire } \int_x^b f \sim_b \int_x^b g. \right|$$

P.2.a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $x \in [c, b]$, $f(x) \leq \varepsilon g(x)$. Fixons un tel c . Alors,

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f \leq \int_a^c f + \varepsilon \int_c^x g \leq \int_a^c f + \varepsilon \int_a^x g.$$

Mais $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g = +\infty$ car g n'est pas intégrable en b . Alors, il existe $d \in [c, b[$ tel que, pour tout $x \in [d, b]$, $\int_a^x f \leq \varepsilon \int_a^x g$. Donc $\int_a^x f \leq 2\varepsilon \int_a^x g$ et

$$\left| \int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g\right). \right|$$

La fonction $g : t \mapsto 1/\sqrt{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Les fonctions $f_1 : t \mapsto 1/t$ et $f_2 : t \mapsto 1/t^2$ sont toutes deux négligeables devant g en $+\infty$. Mais, f_1 n'est pas intégrable en $+\infty$ et f_2 l'est.

P.2.b. Comme $0 < f \sim_b g$ et que g n'est pas intégrable en b , f n'est pas intégrable en b .

Comme $f \sim_b g$, $f - g = o_b(g)$. En utilisant P.2.a,

$$\int_a^x f - \int_a^x g \leq \int_a^x (f - g) = o_b\left(\int_a^x g\right).$$

$$\left| \text{Ainsi } \int_a^x f \sim_b \int_a^x g. \right|$$

Commentaire. Tous ces résultats s'appliquent bien-sûr à des intervalles du type $[a, b]$, grâce à des changements de variables appropriés.

I.A.1. En 0^+ , $\frac{e^t}{\text{Arcsin } t} \sim \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 , donc d'après P.2.b,

$$\left| \int_x^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \sim_{0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x. \right|$$

I.A.2. En 0^+ , $\int_x^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt = -\ln x + o(\ln x)$, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \right. \\ = \int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt - \int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \\ = -\ln(x^3) + o(\ln(x^3)) + \ln(x^2) + o(\ln(x^2)) \\ = -\ln x + o(\ln x) \sim_{0^+} -\ln x. \end{aligned}$$

Dorénavant, dans tout le reste du problème, sauf mention contraire, les limites, équivalences et négligeabilités sont faites en $+\infty$.

I.B.1. En intégrant par parties,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}.$$

D'une part, $\frac{2}{\ln 2} \ll \frac{x}{\ln x}$. D'autre part, $\frac{1}{t} \ll \frac{1}{\ln t}$,

donc $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Or,

$\frac{1}{\ln^2 t} \ll \frac{1}{\ln t}$ donc d'après P.2.a,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} \ll \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Ainsi,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) + o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right),$$

c'est-à-dire $\left| \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}. \right|$

I.B.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, nommons $P(n)$ la phrase

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} &= \sum_{k=0}^n \frac{k! x}{\ln^{k+1} x} - \sum_{k=0}^n \frac{k! 2}{\ln^{k+1} 2} \\ &\quad + (n+1)! \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t}. \end{aligned}$$

$P(0)$ est l'intégration par parties de la question précédente. Supposons $P(n)$ vraie. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t} &= \frac{x}{\ln^{n+2} x} - \frac{2}{\ln^{n+2} 2} \\ &\quad + (n+2) \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+3} t} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Comme en I.B.1, de cette égalité on tire

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2} t} \sim \frac{x}{\ln^{n+2} x} \ll \frac{x}{\ln^{n+1} x}.$$

Dans $P(n)$, la seconde somme est une constante, donc elle est négligeable devant $x/\ln^{n+1} x$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{\ln^{k+1} x} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1} x}\right).$$

Commentaire. Dans ce développement asymptotique, tous les termes sont des infiniment grands en x .

I.C. D'abord, $t \mapsto \frac{e^t}{t^2+1}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\frac{e^t}{t^2+1} \gg \frac{1}{t}$. En outre, $\frac{e^t}{t^2+1} \sim \frac{e^t}{t^2}$ donc d'après P.2.b,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt \sim \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

De plus, en intégrant deux fois par parties,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x^2} - e + \frac{2e^x}{x^3} - 2e + \int_1^x \frac{6e^t}{t^4} dt.$$

Avec une nouvelle intégration par parties, on a

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt \sim \frac{e^x}{x^4} \ll \frac{e^x}{x^3}$$

donc

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right),$$

où l'on a négligé les constantes additives. Enfin,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt - \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt = \int_1^x \frac{e^t}{t^2(t^2+1)} dt.$$

Or $\frac{e^t}{t^2(t^2+1)} \sim \frac{e^t}{t^4}$ donc

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2(t^2+1)} dt \sim \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt \ll \frac{e^x}{x^3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1} dt &= \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right) \\ &= \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Commentaire. Là encore, tous les termes sont des infiniment grands en x .

II.A. Pour éviter les complications en 0, nous supposons $a \geq 1$.

Si $\alpha \neq 0$, $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{\alpha}{x}$. Comme $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable en $+\infty$,

$$\int_a^x \frac{f'}{f} \sim \alpha \int_a^x \frac{dt}{t} \sim \alpha \ln x.$$

D'où $\ln f(x) \sim \alpha \ln x$, soit encore $\frac{\ln f(x)}{\ln x} \rightarrow \alpha$.

Si $\alpha = 0$, $\frac{f'(x)}{f(x)} \ll \frac{1}{x}$, d'où $\int_a^x \frac{f'}{f} \ll \int_a^x \frac{dt}{t}$. Donc,

$\ln f(x) \ll \ln x$, soit encore $\frac{\ln f(x)}{\ln x} \rightarrow 0$.

II.B.1. Comme $\alpha < -1$, posons $\beta = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$, de sorte que $\alpha < \beta < -1$. Pour x assez grand, $\ln f(x) \leq \beta \ln x$ et par croissance de l'exponentielle, $f(x) \leq x^\beta$. Comme $\beta < -1$, $x \mapsto x^\beta$ est intégrable en $+\infty$, donc

f est intégrable en $+\infty$.

II.B.2. Posons $g(x) = \frac{xf(x)}{\alpha+1}$. Comme f est $\mathcal{C}^1$, g l'est aussi. De plus,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) + f(x)}{\alpha+1} \sim \frac{\alpha f(x) + f(x)}{\alpha+1} = f(x).$$

Ainsi, g' est intégrable en $+\infty$. En outre, avec les notations de la question précédente, $xf(x) \leq x^{1+\beta}$ où $1+\beta < 0$, donc $g \rightarrow 0$. D'après P.1.b,

$$\int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g' = -g(x) = -\frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.1. Comme $\alpha > -1$, posons $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$, de sorte que $\alpha > \gamma > -1$. Pour x assez grand, $\ln f(x) \geq \gamma \ln x$ et par croissance de l'exponentielle, $f(x) \geq x^\gamma$. Comme $\gamma > -1$, $x \mapsto x^\gamma$ n'est pas intégrable en $+\infty$, donc

f n'est pas intégrable en $+\infty$.

II.C.2. Posons $g(x) = \frac{xf(x)}{\alpha+1}$. Comme en II.B.2, $g'(x) \sim f(x)$. Ainsi, g' n'est pas intégrable en $+\infty$. En outre, avec les notations de la question précédente, $xf(x) \geq x^{1+\gamma}$ où $1+\gamma > 0$, donc $g \rightarrow +\infty$. D'après P.2.b,

$$\int_a^x f \sim \int_a^x g' = g(x) - g(a) \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.3. Soit $f : x \mapsto 2 + \sin x$, définie sur $[1, +\infty[$.

Alors f est bornée, donc $\frac{\ln f(x)}{\ln x} \rightarrow 0 > -1$.

Mais $\int_1^x f = 2x - \cos x - 2 + \cos 1$ et $xf(x) = 2x + x \sin x$, et ces deux fonctions ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

II.D.1. En posant $x = e^t$, qui est bien une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$ sur $[2, +\infty[$ équivaut à celle de $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ sur $[\ln 2, +\infty[$.

$x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

Commentaire. Ces intégrales s'appellent les intégrales de Bertrand.

II.D.2. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma \ln^\beta x}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, +\infty[$. On a $\ln f(x) = -\gamma \ln x - \beta \ln \ln x$, donc

$$\begin{aligned} \frac{x f'(x)}{f(x)} &= -x \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\beta}{x \ln x} \right) \\ &= - \left(\gamma + \frac{\beta}{\ln x} \right) \rightarrow -\gamma. \end{aligned}$$

Si $-\gamma < -1$, c'est-à-dire $\gamma > 1$, on applique II.B.1 et f est intégrable en $+\infty$; si $-\gamma > -1$, d'après II.C.1, f n'est pas intégrable en $+\infty$; et si $\gamma = 1$, on applique II.D.1.

$x \mapsto \frac{1}{x^\gamma \ln^\beta x}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $(\beta, \gamma) \in (\mathbb{R} \times]1, +\infty[) \cup (]1, +\infty[\times \{1\})$.

II.E. Avec les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$ de la question II.D.1, pour lesquelles $\frac{x f'(x)}{f(x)} \rightarrow -1$, on voit que l'on ne peut pas conclure sur l'intégrabilité de f , puisque certaines sont intégrables et d'autres ne le sont pas.

III.A. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{h'(t)}{h(t)} = -\alpha + \frac{f'(t)}{f(t)} \rightarrow 0$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq n_0$ et $t \in [n-1, n[$, $\left| \frac{h'(t)}{h(t)} \right| \leq \varepsilon$. Alors, en intégrant entre t et n ,

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{h(n)}{h(t)} \right| &= \left| \int_t^n \frac{h'(u)}{h(u)} du \right| \\ &\leq \int_t^n \left| \frac{h'(u)}{h(u)} \right| du \leq (n-t)\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$e^{-\varepsilon} \leq \frac{h(n)}{h(t)} \leq e^\varepsilon \text{ d'où } e^{-\varepsilon} \leq \frac{h(t)}{h(n)} \leq e^\varepsilon.$$

Alors $(e^{-\varepsilon} - 1)h(n) \leq h(t) - h(n) \leq (e^\varepsilon - 1)h(n)$ donc $|h(t) - h(n)| \leq h(n) \max(e^\varepsilon - 1, 1 - e^{-\varepsilon})$. Mais $1 - e^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon}(e^\varepsilon - 1) \leq e^\varepsilon - 1$, donc finalement, on a l'inégalité demandée.

III.B. On a

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n f(t) dt &= \int_{n-1}^n e^{\alpha t} h(t) dt \\ &= \int_{n-1}^n e^{\alpha t} (h(n) + h(t) - h(n)) dt \\ &= \int_{n-1}^n e^{\alpha t} h(n) dt + \int_{n-1}^n e^{\alpha t} (h(t) - h(n)) dt. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n e^{\alpha t} h(n) dt &= h(n) \frac{e^{\alpha n} - e^{\alpha(n-1)}}{\alpha} \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n). \end{aligned}$$

D'autre part, avec les notations et dans les conditions de la question précédente,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{n-1}^n e^{\alpha t} (h(t) - h(n)) dt \right| \\ &\leq \int_{n-1}^n e^{\alpha t} |h(t) - h(n)| dt \\ &\leq \int_{n-1}^n e^{\alpha t} (e^\varepsilon - 1) h(n) dt \\ &= (e^\varepsilon - 1) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n). \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $e^\varepsilon - 1 > 0$ l'est aussi, donc

$$\int_{n-1}^n e^{\alpha t} (h(t) - h(n)) dt = o\left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n)\right).$$

$$\left| \text{Alors, } \int_{n-1}^n f(t) dt \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n). \right|$$

III.C.1. Les fonctions u et v sont constantes sur $[k-1, k[$, donc leur intégrale vaut cette constante :

$$\left| \int_{k-1}^k v = \int_{k-1}^k f \text{ et } \int_{k-1}^k u = f(k). \right|$$

III.C.2. Comme f est intégrable en $+\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f = \int_0^{+\infty} f.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^n f = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f,$$

donc la série $\sum \int_{n-1}^n f$ converge. D'après III.B,

$$\int_{n-1}^n f \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n),$$

donc la série $\sum f(n)$ converge.

Alors, u est intégrable en $+\infty$, car $u > 0$ et

$$\int_0^n u = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k u = \sum_{k=1}^n f(k)$$

admet une limite en $+\infty$.

De même, v est intégrable en $+\infty$, car $v > 0$ et

$$\int_0^n v = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k v = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f = \int_0^n f$$

admet une limite en $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k u = \int_n^{+\infty} u.$$

D'après III.B, pour n grand et $x \in [n-1, n[$,

$$v(x) = \int_{n-1}^n f \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n) = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} u(x)$$

D'après P.1.a, pour n grand,

$$\begin{aligned} \int_n^{+\infty} f &= \int_n^{+\infty} v \\ &\sim \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} \int_n^{+\infty} u = \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} R_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $R_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f$.

III.C.3. Selon le même principe, comme f n'est pas intégrable en $+\infty$,

$$\int_0^n f = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f \rightarrow +\infty,$$

donc $\sum \int_{n-1}^n f$ diverge et $\sum f(n)$ diverge.

u et v sont non intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

En utilisant les questions précédentes, on a donc

$$S_n = \int_0^n u \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^n v = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^n f.$$

III.D. On peut reprendre tous les calculs des questions III.A, III.B et III.C, en remplaçant $\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}$ par 1. La conclusion attendue en découle.

IV.A. Clairement, les trois séries proposées divergent. Donc le comportement sur $[0, 1]$ ou $[0, 2]$ des fonctions introduites n'a pas d'importance.

IV.A.1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et vérifie $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x} \rightarrow 0$ donc d'après III.D,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

IV.A.2. Pour les mêmes raisons,

$$\sum_{k=1}^n \ln k \sim \int_1^n \ln t dt \sim n \ln n.$$

IV.A.3. La fonction $f : t \mapsto 2^t \ln t$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et vérifie $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2 + \frac{1}{t \ln t} \rightarrow \ln 2$, donc d'après III.C.3,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^k \ln k &\sim \frac{\ln 2}{1-e^{-\ln 2}} \int_1^n f \\ &= 2 \ln 2 \int_1^n 2^t \ln t dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\int_1^n 2^t \ln t dt = \frac{2^n \ln n}{\ln 2} - \int_1^n \frac{2^t}{t \ln 2} dt.$$

Comme $\frac{2^t}{t} \ll 2^t \ln t$, $\int_1^n \frac{2^t}{t} dt \ll \int_1^n 2^t \ln t dt$.

$$\text{Finalement, } \sum_{k=1}^n 2^k \ln k \sim 2 \cdot 2^n \ln n.$$

IV.B.1. On considère la fonction en escalier f définie par $f(t) = a_{[t]}$, où $[t]$ est la partie entière de t . De même, soit $g : t \mapsto b_{[t]}$. Comme $\sum a_n$ converge et que $a_n \sim b_n$, $\sum b_n$ converge. Dire que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent équivaut à dire que f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ (voir les raisonnements de la partie III). Or $f \sim g$, donc

$$R_n(a) = \int_{n+1}^{+\infty} f \sim \int_{n+1}^{+\infty} g = R_n(b).$$

IV.B.2. Comme $\sum a_n$ diverge et que $a_n \sim b_n$, $\sum b_n$ diverge et $S_n(a) = \int_0^n f \sim \int_0^n g = S_n(b)$.

IV.C.1. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \ln n$:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Alors, $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge, donc (u_n) aussi : notons γ sa limite. D'après IV.B.1,

$$u_n - \gamma = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, et vérifie $\frac{f'(t)}{f(t)} \rightarrow 0$. D'après III.D,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}.$$

Alors, $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

IV.C.2. Posons $S_n = \ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$ et $u_n = S_n - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$. On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \ln n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n \\ &\quad + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n-1) - n + 1 \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \sim -\frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons qu'en IV.C.1, (u_n) tend vers une limite γ et $u_n - \gamma = \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

$$S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \gamma + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} n! &= \exp \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \gamma + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= e^\gamma n^{n+1/2} e^{-n} \exp \left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

En posant $\delta = e^\gamma$, on a bien

$$n! = \delta n^{n+1/2} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

IV.C.3. $|\delta| = \sqrt{2\pi}$.