Douzième devoir à la maison

Étude d'une équation différentielle
d'après [CCINP19]

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3.$$

Solution particulière de l'équation homogène

Q1. Déterminer l'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(H) \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

Q2. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I , puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .

Q3. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad xz'' + z' = 2x.$$

Q4. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q5. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

Q6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.