Corrigé du douzième devoir à la maison

Q1. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une solution développable en série entière φ de (H), de rayon de convergence $R > 0$. Écrivons, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n.$$

D'après le cours, φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-R, R\right[$ et on peut la dériver terme à terme autant fois que l'on veut. En particulier, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1},\ \ \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}.$$

Alors, en évaluant le premier membre de (H), pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$\begin{aligned}
&x^2\,(1-x)\,\varphi''(x) - x\,(1+x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\\
&= x^2\,\varphi''(x) - x^3\,\varphi''(x) - x\,\varphi'(x) - x^2\,\varphi'(x) + \varphi(x)\\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2} - x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2}\\
&\quad - x \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n+1}\\
&\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\,(n-2)\,a_{n-1}\,x^n\\
&\quad - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\,a_{n-1}\,x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\,x^n\\
&\quad - a_1\,x + a_1\,x + a_0\\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \big[n\,(n-1)\,a_n - (n-1)\,(n-2)\,a_{n-1}\\
&\qquad - n\,a_n - (n-1)\,a_{n-1} + a_n\big]\,x^n\\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[(n-1)^2\,a_n - (n-1)^2\,a_{n-1}\right] x^n\\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2\,(a_n - a_{n-1})\,x^n.
\end{aligned}$$

Alors φ est solution de (H) sur $\left]-R, R\right[$ si et seulement si pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2\,(a_n - a_{n-1})\,x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, les coefficients de cette série entière sont tous nuls : $a_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $(n-1)^2\,(a_n - a_{n-1}) = 0$, c'est-à-dire $a_n = a_{n-1}$ puisque $n - 1 \neq 0$. Alors, tous les a_n sont égaux à a_1, pour $n \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_1\,x^n = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_1\,x}{1-x}.$$

Synthèse. Le rayon de convergence du développement en série entière ci-dessus est 1 : il n'est pas nul, ce qui valide la synthèse.

Commentaire. Si $a_1 = 0$, le rayon de convergence est en fait $+\infty$.

Ainsi, l'ensemble des solutions développables en série entière de (H) est

$$\mathrm{Vect}\left(x \mapsto \frac{x}{1-x}\right).$$

Q2. D'après l'énoncé, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Et puisque $0 \notin I$, la fonction $g : x \mapsto 1/x - 1$ l'est aussi. Comme produit de ces deux fonctions,

La fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

En utilisant la formule de Leibniz, on a

$$z' = g\,y' + g'\,y \text{ et } z'' = g\,y'' + 2\,g'\,y' + g''\,y.$$

Q3. Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
z'(x) &= \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x) - \frac{1}{x^2}\,y(x)\\
z''(x) &= \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x) - \frac{2}{x^2}\,y'(x) + \frac{2}{x^3}\,y(x).
\end{aligned}$$

Pour éliminer les dénominateurs, calculons

$$\begin{aligned}
x^2\,z'(x) &= x\,(1-x)\,y'(x) - y(x)\\
x^3\,z''(x) &= x^2\,(1-x)\,y''(x) - 2\,x\,y'(x) + 2\,y(x).
\end{aligned}$$

Et en ajoutant,

$$\begin{aligned}
&x^3\,z''(x) + x^2\,z'(x)\\
&\quad = x^2\,(1-x)\,y''(x) - x\,(1+x)\,y'(x) + y(x).
\end{aligned}$$

Où l'on voit que y est solution de (E) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$x^2\,(1-x)\,y''(x) - x\,(1+x)\,y'(x) + y(x) = 2\,x^3,$$

si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$x^3\,z''(x) + x^2\,z'(x) = 2\,x^3,$$

si et seulement si pour tout $x \in I$, en divisant par $x^2 \neq 0$,

$$x\,z''(x) + z'(x) = 2\,x,$$

si et seulement si z est solution de (E_1) sur I.

Q4. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre en z' : autrement dit, z' est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad x\,u' + u = 2x.$$

dont $x \mapsto x$ est une solution évidente, et dont l'équation différentielle homogène associée

$$(H_2) \qquad x\,u' + u = 0$$

admet clairement $x \mapsto 1/x$ comme solution. Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_2) sur I est la droite affine $\{x \mapsto x + \lambda/x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, si z est solution de (E_1) sur I, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $z'(x) = x + \lambda/x$.

Q5. Ainsi, il existe aussi $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $z(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda \ln x + \mu$. Donc

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \lambda \ln x + \mu\right) \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x^3}{2\,(1-x)} + \lambda \frac{x \ln x}{1-x} + \mu \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

On obtient un ensemble de solutions de (E) sur I qui est un plan affine. D'après le cours, c'est exactement la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I, donc il n'y en a pas d'autres.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\left\{ x \mapsto \frac{\frac{1}{2}x^3 + \lambda x \ln x + \mu x}{1-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Q6. Tentons un recollement des solutions sur $]0, +\infty[$. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit φ une (éventuelle) solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Alors, ses restrictions $\varphi|_{]0,1[}$ et $\varphi|_{]1,+\infty[}$ sont solutions de (E), respectivement sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Donc il existe quatre constantes telles que pour tout $x \in\,]0, +\infty[$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}x^3 + \alpha\, x \ln x + \beta\, x}{1-x} & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{\frac{1}{2}x^3 + \gamma\, x \ln x + \delta\, x}{1-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme φ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$, elle est en particulier dérivable en 1. Puisque φ a la même forme de part et d'autre de 1, menons l'étude sur $]0, 1[$. L'étude sur $]1, +\infty[$ s'en déduira en changeant (α, β) et (γ, δ).

Par continuité, la limite $\lim_{x \to 1^-} \varphi(x)$ doit être finie. Comme le dénominateur de φ tend vers 0, son numérateur doit donc aussi tendre vers 0. Or

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\tfrac{1}{2}x^3 + \alpha\, x \ln x + \beta\, x\right) = \tfrac{1}{2} + \beta.$$

Donc on doit avoir $\beta = -\frac{1}{2}$. Alors

$$\varphi(x) = -\tfrac{1}{2}\,x\,(1+x) + \alpha \frac{x \ln x}{1-x}.$$

Par dérivabilité, φ admet en 1^- un développement limité à l'ordre 1. Posons $x = 1 + h$, où h est proche de 0 :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\tfrac{1}{2}\,(1+h)\,(2+h) - \frac{\alpha}{h}\,(1+h) \ln(1+h) \\ &= -1 - \tfrac{3}{2}\,h + \mathrm{o}(h) - \frac{\alpha}{h}\,(1+h)\,(h - \tfrac{1}{2}\,h^2 + \mathrm{o}(h^2)) \\ &= -1 - \alpha - (\tfrac{3}{2} + \tfrac{\alpha}{2})\,h + \mathrm{o}(h). \\ &= -1 - \alpha - \tfrac{3+\alpha}{2}\,(x-1) + \mathrm{o}(x-1). \end{aligned}$$

Il n'y a donc aucune contrainte sur α. Et en passant, $\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = -1 - \alpha$, donc $\varphi(1) = -1 - \alpha$, puisque φ est continue en 1.

De même, sur $]1, +\infty[$, on doit avoir $\delta = -\frac{1}{2}$ et $\varphi(1) = -1 - \gamma$. Donc $\alpha = \gamma$.

En résumé, si φ existe, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in\,]0, +\infty[$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,x\,(1+x) + \alpha \dfrac{x \ln x}{1-x} & \text{si } x \neq 1, \\ -1 - \alpha & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Synthèse. Considérons cette fonction. Par opérations usuelles, elle est évidemment de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Et d'après la question Q5, elle sera forcément solution de (E) sur ces intervalles.

D'après les calculs précédents, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 1, ce qui permet d'affirmer qu'elle y est dérivable et que $\varphi'(1) = -(\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2})$. En évaluant (E) en 1, constatons que

$$-2\,\varphi'(1) + \varphi(1) = 3 + \alpha - 1 - \alpha = 2.$$

Donc φ vérifie également (E) en 1.

Il reste à prouver que φ est deux fois dérivable en 1. Malheureusement, un développement limité à l'ordre 2 de φ ne le prouvera pas. Mais si l'on peut déterminer un développement limité à l'ordre 1 de φ', l'argument précédent permettra d'affirmer que φ' est dérivable en 1, et que donc φ l'est deux fois.

Avec les calculs précédents, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - x + \alpha \dfrac{1 - x + \ln x}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1, \\ -\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En posant à nouveau $x = 1 + h$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\tfrac{1}{2} - (1+h) + \alpha \frac{-h + \ln(1+h)}{h^2} \\ &= -\tfrac{3}{2} - h + \alpha \frac{-h + h - \frac{1}{2}\,h^2 + \frac{1}{3}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3)}{h^2} \\ &= -\tfrac{3}{2} - \tfrac{\alpha}{2} + (\tfrac{\alpha}{3} - 1)\,h + \mathrm{o}(h). \end{aligned}$$

Ainsi, φ' admet bien un développement limité à l'ordre 1 en 1, et la synthèse est validée.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}\,x\,(1+x) + \alpha \dfrac{x \ln x}{1-x} & \text{si } x \neq 1, \\ -1 - \alpha & \text{si } x = 1, \end{cases} \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$