Treizième devoir à la maison

[Ecricome14]

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1-p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante.

— Les joueurs A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu.

— Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du duel participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3, et ainsi de suite.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1-p$.

— Est désigné vainqueur du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N duels successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n, on considère l'évènement E_n : « le vainqueur du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

Partie I
Étude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et que $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que

$$P(E_3) = \tfrac{1}{2}P(E_2) + \tfrac{1}{4}P(E_1).$$

2. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le gagnant du duel numéro n, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$(\mathcal{R}_1) \qquad P(E_n) = \tfrac{1}{2}P(E_{n-1}) + \tfrac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

3. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1 et r_2 tels que

$$\forall n \geqslant 2,\ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n)$.

4. Que vaut la probabilité

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) ?$$

Quelle est la probabilité de l'évènement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

Partie II
Étude du cas général

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0,1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in [\![1, N-1]\!]$, on note $A_k^{(n)}$ l'évènement « à l'issue du n-ième duel, le gagnant du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ».

Justifier l'égalité

$$\forall n \geqslant N,\ P(E_n \,|\, A_k^{(n)}) = P(E_{n-k}).$$

2. Établir que pour tout $n \geqslant N$, on a

$$(\mathcal{R}_2) \qquad P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), \ldots, P(E_{N-1})$. En déduire que

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geqslant N$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{R}_3) \qquad P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On note désormais r_N cette solution. Justifier que $r_N > 1$ et $Q'(r_N) > 0$.

6. À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$, établir que

$$\forall n \geqslant 1,\ P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ sur tous les entiers $n \geqslant N$, donner la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n).$$