# Corrigé du treizième devoir à la maison

**I.1.** Dans la mesure où le vainqueur du tournoi doit gagner trois duels consécutifs, il ne peut l'avoir fait lors des deux premiers duels, donc les évènements $E_1$ et $E_2$ sont certains :

$$P(E_1) = P(E_2) = 1.$$

L'évènement $\overline{E_3}$ signifie que le vainqueur est connu au troisième duel. Il est donc nécessaire qu'il ait gagné les trois premiers duels, donc ça ne peut être ni $A_2$ ni $A_3$. Donc l'évènement $E_3$ correspond à la victoire lors du troisième duel des joueurs $A_2$ ou $A_3$, et ces éventualités sont incompatibles.

La probabilité que le joueur $A_3$ gagne le troisième duel est $p = \frac{1}{2}$. La probabilité que le joueur $A_2$ gagne le troisième duel est $q$, mais pour cela il faut aussi qu'il ait gagné le deuxième duel, avec probabilité $p$, donc la probabilité de cette éventualité est $qp = \frac{1}{4}$. Ainsi,

$$P(E_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

**I.2.** Considérons l'évènement $E_n$ : à l'issue du $n^{\text{e}}$ duel, le vainqueur du tournoi n'est pas connu. Cela signifie d'une part qu'il ne l'a pas été lors des duels précédents non plus. D'autre part, le gagnant du $n^{\text{e}}$ duel ne peut avoir qu'une ou deux victoires à son actif, et ces deux possibilités sont incompatibles.

Si le gagnant de ce duel n'a qu'une victoire, il s'agit forcément du joueur $A_n$ qui gagne contre le gagnant du duel précédent, avec probabilité $p$. La probabilité de cette éventualité est donc $p\,P(E_{n-1})$.

Si le gagnant du $n^{\text{e}}$ duel a deux victoires a son actif, il s'agit du joueur $A_{n-1}$, qui vient donc de battre le joueur $A_n$, avec probabilité $q$. Il a aussi battu son adversaire lors du $(n-1)^{\text{e}}$ duel, avec probabilité $p$. La probabilité de cette éventualité est donc $qp\,P(E_{n-2})$.

Alors

$$(\mathcal{R}_1) \qquad \begin{aligned} P(E_n) &= p\,P(E_{n-1}) + qp\,P(E_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}). \end{aligned}$$

**I.3.** L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$, et ses racines sont

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

D'après le cours, il existe un unique $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, dépendant de $P(E_1)$ et $P(E_2)$, tel que

$$\forall n \geqslant 2,\ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Comme $r_1$ et $r_2$ sont dans $]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = \lim\limits_{n\to+\infty} r_2^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$.

**I.4.** Pour que l'on ne connaisse pas le vainqueur au rang $n$, il est déjà nécessaire qu'on ne le connaisse pas au rang précédent, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} \subset E_n$. Alors, d'après le théorème de continuité décroissante,

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0.$$

L'évènement « le tournoi désignera un vainqueur » a pour contraire « le tournoi ne désignera pas de vainqueur », autrement dit, pour tout $n$, lors du $n^{\text{e}}$ duel, le vainqueur ne sera pas connu : il s'agit donc de l'évènement $\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n$.

D'après la question précédente, l'évènement considéré a pour probabilité 1.

*Commentaire.* Cela signifie que le tournoi se termine presque sûrement.

**II.1.** À l'issue du $n^{\text{e}}$ duel, le gagnant vient d'obtenir une victoire. S'il en a $k$ à son actif, il en avait $k-1$ à l'issue du $(n-1)^{\text{e}}$ duel, et par une récurrence immédiate, il en avait une à l'issue du $(n-(k-1))^{\text{e}}$, donc il est entré en lice à ce $(n-k+1)^{\text{e}}$ duel. Et bien entendu, lors du duel précédent, le vainqueur n'était pas encore connu. Alors

$$P(E_n \,|\, A_k^{(n)}) = P(E_{n-k}).$$

**II.2.** Soit $n \geqslant N$. Dire que $E_n$ se réalise signifie que le gagnant du $n^{\text{e}}$ duel a strictement moins de $N$ victoires a son actif, donc

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{N-1} A_k^{(n)}.$$

De plus, les évènements $\big(A_k^{(n)}\big)_{k\in[\![1,N-1]\!]}$ sont incompatibles. Alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P(E_n \,|\, A_k^{(n)})\,P(A_k^{(n)}).$$

Or, le joueur concerné par l'évènement $A_k^{(n)}$ a gagné exactement $k$ duels consécutifs. La première fois, quand il est entré en lice, il a gagné avec la probabilité $p$ ; et les $k-1$ fois suivantes, il a gagné avec la probabilité $q$. Comme ces victoires sont mutuellement indépendantes, leurs probabilités se multiplient :

$$P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}.$$

Ainsi

$$(\mathcal{R}_2) \qquad P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}\,P(E_{n-k}).$$

**II.3.** Le vainqueur du tournoi ayant besoin de $N$ victoires consécutives, il ne peut être révélé avant le $N^{\text{e}}$ duel, donc bien-sûr,

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_{N-1}) = 1.}$$

D'après $(\mathcal{R}_2)$, sachant que $p+q=1$,

$$\begin{aligned} \boxed{P(E_N)} &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{N-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} = p\,\frac{1-q^{N-1}}{1-q} \\ &\boxed{= 1 - q^{N-1}.} \end{aligned}$$

**II.4.** Soit $n \geqslant N$. D'après $(\mathcal{R}_2)$,

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}),$$

$$P(E_{n+1}) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n+1-k}).$$

En translatant $k$ en $k+1$ dans $P(E_{n+1})$,

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{N-2} pq^{k} P(E_{n-k}) \\ &= pP(E_n) + q\sum_{k=1}^{N-2} pq^{k-1} P(E_{n-k}) \\ &= pP(E_n) + q\big(P(E_n) - pq^{N-2}P(E_{n-N+1})\big) \\ &= P(E_n) - pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) \end{aligned}$$

car $p+q=1$. D'où

$$(\mathcal{R}_3) \qquad \boxed{P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).}$$

**II.5.** Le polynôme $Q$ croît strictement sur $\mathbb{R}_+$ car

$$Q'(X) = \sum_{k=1}^{N-1} kpq^{k-1} X^{k-1}$$

et l'on voit que $Q'$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$, comme somme de monômes à coefficients strictement positifs. Or $Q(0) = -1$ et $Q$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\boxed{Q \text{ s'annule une seule fois sur } \mathbb{R}_+.}$

D'après ce qui précède, $\boxed{Q'(r_N) > 0.}$

Enfin,

$$\begin{aligned} Q(1) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 \\ &= p\,\frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1} < 0 \end{aligned}$$

donc $\boxed{r_N > 1.}$

**II.6.** Procédons par récurrence forte.

Initialisation. Pour tout $n < N$, on sait que $P(E_n) = 1$. En outre

$$\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} = r_N^{N-n} > 1$$

car $N - n > 0$ et $r_N > 1$. Ainsi, la propriété est vraie pour tout $n < N$.

Transmission. Soit $n \geqslant N$. Supposons que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, la relation soit vraie pour le rang $n-k$. Alors, d'après $(\mathcal{R}_2)$,

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} \\ &= \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k \\ &= \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} (Q(r_N)+1) = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

car $Q(r_N) = 0$. Ainsi, la relation est vraie au rang $n$.

Conclusion. La relation est vraie pour les $N-1$ premiers entiers, puis elle se transmet de $N-1$ entiers consécutifs au suivant, donc d'après le principe de la récurrence forte, la relation est vraie pour tout entier.

**II.7.** Puisque $1/r_N \in \,]0,1[$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}(1/r_N)^n$ converge. Par comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} P(E_n) \text{ converge.}}$$

D'après la relation $(\mathcal{R}_3)$, en posant $n = j - N + 1$,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)} &= \sum_{j=N}^{+\infty} P(E_{j-N+1}) \\ &= \frac{1}{pq^{N-1}} \sum_{j=N}^{+\infty} \big(P(E_j) - P(E_{j+1})\big) \\ &= \frac{1}{pq^{N-1}} P(E_N) = \boxed{\frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}.} \end{aligned}$$