# Corrigé du quinzième devoir à la maison

## Premier exercice

**1.** MONTRONS QUE les $f_i$ sont des projecteurs de $E$.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. En composant la première relation par $f_j$, on a $\left(\sum_{i=1}^p f_i\right) \circ f_j = \mathrm{id}_E \circ f_j$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p f_i \circ f_j = f_j$. Grâce à la seconde relation, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0$, donc il reste $f_j \circ f_j = f_j$, ce qui signifie que

$\boxed{\text{les } f_j \text{ sont des projecteurs de } E.}$

**2.** MONTRONS QUE $E = \sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

Bien entendu, $\sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i) \subset E$ puisque les $\mathrm{Im}(f_i)$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

Et en évaluant la première relation en un $x \in E$ quelconque, $\sum_{i=1}^p f_i(x) = x$, où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i(x) \in \mathrm{Im}(f_i)$. Cela signifie que $x \in \sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$. Donc $E \subset \sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

Alors, $E = \sum_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i)$.

MONTRONS QUE la somme est directe.

Pour cela, montrons que 0 n'y admet que la décomposition triviale. Supposons que l'on ait $0 = \sum_{i=1}^p x_i$, où $x_i \in \mathrm{Im}(f_i)$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Comme $f_i$ est un projecteur de $E$, $x_i = f_i(x_i)$. Alors, pour $j \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned} 0 = f_j(0) &= f_j\left(\textstyle\sum_{i=1}^p x_i\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p f_j(x_i) = \sum_{i=1}^p f_j \circ f_i(x_i) \\ &= f_j \circ f_j(x_j) = f_j(x_j) = x_j. \end{aligned}$$

Ainsi, dans la décomposition $0 = \sum_{i=1}^p x_i$, les $x_i$ sont tous nuls, donc 0 n'admet que la décomposition triviale, et la somme est directe.

FINALEMENT, $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{Im}(f_i).}$

## Second exercice

**1.** Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$ : il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Alors $u(x) = u(u(y)) = u^2(y) = 0$, et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$

**2.** D'après le théorème du rang, puisque $E$ est de dimension finie, $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Or d'une part, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$ et d'autre part, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Alors, $\dim(E) \geqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u)$ et

$\boxed{\mathrm{rg}(u) \leqslant \tfrac{1}{2}\dim(E).}$

**3.a.** Puisque $\dim(E) = 2$, $\mathrm{rg}(u) \leqslant 1$. Mais $\mathrm{rg}(u)$ est entier puisque c'est une dimension. Et $u \neq 0$ donc $\mathrm{Im}(u) \neq \{0\}$ et $\mathrm{rg}(u) \neq 0$, d'où $\mathrm{rg}(u) \geqslant 1$ et donc $\mathrm{rg}(u) = 1$ et $\mathrm{Im}(u)$ est une droite. Alors $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = 1$. Et comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{rg}(u) = 1$,

$\boxed{\text{il existe bien une droite } D \text{ de } E \text{ telle que } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D.}$

**3.b.i.** Soit $x \in D$. Comme $D = \mathrm{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Alors

$$v(x) = v(u(y)) = v \circ u(y) = u \circ v(y) = u(v(y)),$$

où l'on voit que $v(x) \in \mathrm{Im}(u) = D$. Ainsi, $\boxed{v(D) \subset D.}$

**3.b.ii.** Il s'ensuit que $D \subset \mathrm{Ker}(v)$. Si $v = 0$, bien-sûr $u \circ v = 0$. Si $v \neq 0$, comme à la question 3.a, $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)$ et $\dim \mathrm{Ker}(v) = 1$, donc $D = \mathrm{Ker}(v)$. Comme $D = \mathrm{Im}(u)$, $\boxed{u \circ v = v \circ u = 0.}$

**3.c.** Sur le même principe, si $w = 0$, clairement $v \circ w = 0$, et sinon, $D = \mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Im}(w)$, donc $\boxed{v \circ w = 0.}$

**4.a.** Pour condenser les écritures, écrivons

$$u_1 \circ \cdots \circ u_i = \textstyle\prod_{j=1}^i u_j.$$

Cette écriture est raisonnable, car les $u_j$ commutent deux à deux entre eux.

Soit $x \in F_i = \mathrm{Im}\left(\prod_{j=1}^i u_j\right)$ : il existe $y \in E$ tel que $x = \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(y)$. Puisque les $u_j$ commutent entre eux,

$$\begin{aligned} u_{i+1}(x) &= u_{i+1}\Big(\big(\textstyle\prod_{j=1}^i u_j\big)(y)\Big) \\ &= u_{i+1} \circ \big(\textstyle\prod_{j=1}^i u_j\big)(y) \\ &= \big(\textstyle\prod_{j=1}^i u_j\big) \circ u_{i+1}(y) \\ &= \big(\textstyle\prod_{j=1}^i u_j\big)(u_{i+1}(y)) \in F_i, \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } u_{i+1}(F_i) \subset F_i.}$

**4.b.** Raisonnons par récurrence sur $i$.

INITIALISATION. Comme $u_1^2 = 0$, d'après la question 2, $\mathrm{rg}(u_1) \leqslant \frac{1}{2}\dim(E)$, c'est-à-dire, puisque $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$, $\dim(F_1) \leqslant n/2$.

HÉRÉDITÉ. Supposons que $\dim(F_i) \leqslant n/2^i$. Puisque $u_{i+1}(F_i) \subset F_i$, la restriction

$$v_{i+1} : F_i \to F_i,\ x \mapsto u_{i+1}(x)$$

est bien définie. Puisque $u_{i+1}^2 = 0$, par restriction, on a aussi $v_{i+1}^2 = 0$. Alors, toujours d'après la question 2 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{rg}(v_{i+1}) \leqslant \tfrac{1}{2}\dim(F_i) \leqslant n/2^{i+1}.$$

En outre, $\mathrm{Im}(v_{i+1}) = F_{i+1}$ : en effet, et grâce à la commutativité des $u_j$,

$$\begin{aligned} & x \in \mathrm{Im}(v_{i+1}) \\ \iff\ & \exists y \in F_i,\ x = v_{i+1}(y) = u_{i+1}(y), \\ \iff\ & \exists z \in E,\ x = u_{i+1} \circ \big(\textstyle\prod_{j=1}^i u_j\big)(z) \\ & \qquad = \big(\textstyle\prod_{j=1}^{i+1} u_j\big)(z) \\ \iff\ & x \in F_{i+1}. \end{aligned}$$

Alors, $\dim(F_{i+1}) = \mathrm{rg}(v_{i+1}) \leqslant n/2^{i+1}$.

CONCLUSION. Par récurrence, on a prouvé que

$\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1,m]\!],\ \dim(F_i) \leqslant n/2^i.}$

**4.c.** Si $n < 2^m$, $\dim(F_m) \leqslant n/2^m < 1$, donc $\dim(F_m) = 0$, car $\dim(F_m) \in \mathbb{N}$. Alors, $F_m = \{0\}$

$\boxed{\text{et } \textstyle\prod_{j=1}^m u_j = 0.}$