Seizième devoir à la maison

[E3A07]

Durée 3h

L'usage de calculatrice est interdit

Questions de cours

1. Donner la définition du rang d'une matrice.
2. Citer sans démonstration le théorème du rang.
3. Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? Ont-elles alors le même rang ? (On ne demande pas de justifier votre réponse.)
4. Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice ?

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.

La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle O_n .

L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $B = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

Si v est un endomorphisme de E , on rappelle que :

- v^0 est l'endomorphisme identité,
- $\forall m \in \mathbb{N}, v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par $J(\lambda) = (u_{ij})$ avec

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, u_{i+1,i} = 1 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, u_{ii} = \lambda \\ u_{ij} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice

$$\alpha(M) = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m \text{ avec } S_m = \sum_{k=0}^m \frac{M^k}{k!}.$$

On rappelle que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m .

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\alpha(B)$.

Partie 1 : quelques calculs préliminaires.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

1. Vérifier que $\ker(A + I_3)^2 \oplus \ker(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.
2. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie 2 : quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.
- 2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.
- 2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.
3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.
4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Partie 3 : quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E .

1. Prouver que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker u^m)$. Prouver que $r = \inf \{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$ existe.
3. Montrer que :
 - (i) $\forall m < r, \ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,
 - (ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,
 - (iii) $\forall m \geq r, \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

Partie 4 : recherche des endomorphisme nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$.

On note v l'endomorphisme de E associé à V .

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\text{Im}(v^p)$.

1.1. Déterminer $\text{Im}(w)$.

1.2. Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q)).$$

1.4. En déduire

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \dim(\ker(v^i)) \leq i.$$

1.5. Démontrer qu'en fait

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \dim(\ker(v^i)) = i.$$

2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $B_1 = (e, v(e), v^2(e), \dots, v^{n-1}(e))$ soit une base de E .

4. Écrire la matrice de v dans cette base.

Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.

5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

Partie 5 : résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1} \alpha(M) P = \alpha(P^{-1} M P).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$e^z = i, e^z = -1, e^z = -3 - 4i.$$

3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$. Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = \mu$.

4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tels que $e^s = \mu$.

4.1. Déterminer $\alpha(sI_n)$.

N.D.L.R. On admettra que pour tout nombre complexe z ,

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme $J(s) = sI_n + J(0)$. Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ .

4.3. Vérifier que la matrice $\mu[\alpha(J(0)) - I_n]$ est nilpotente de rang $n - 1$.

4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1} \alpha(J(s)) Q = J(\mu).$$

5. Donner alors dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. En déduire dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation $\alpha(X) = {}^t J(\mu)$.

7. Applications.

7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, $i^2 = -1$. Déterminer une matrice X_1 telle que $\alpha(X_1) = T$.

7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $M_3(\mathbb{C})$ définie à la partie 1.

7.2.1. Déterminer une matrice $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2.2. Soit $H = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\alpha(H)$.

7.2.3. Déterminer alors une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$.