Corrigé du seizième devoir à la maison

Q.C. Pour les questions de cours, voir le cours :-)

1.1. Pour prouver la somme demandée, cherchons une base des deux noyaux.

Tout d'abord,

$$(A+I_3)^2 = 9\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nommons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice. On *voit* que

$$C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète en les produit matriciels

$$(A+I_3)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(A+I_3)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans $\ker(A+I_3)^2$. Ils sont clairement indépendants, donc $\dim(\ker(A+I_3)^2) \geqslant 2$. Mais $(A+I_3)^2$ n'est pas la matrice nulle, donc $\dim(\ker(A+I_3)^2) < 3$. Ainsi, $\dim(\ker(A+I_3)^2) = 2$ et

$$\ker(A+I_3)^2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{C}\varepsilon_2.$$

Par ailleurs,

$$A - 2\,I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Nommons encore C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette nouvelle matrice. Là aussi, on *voit* que

$$-C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui comme plus haut signifie que $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans $\ker(A - 2\,I_3)$. En outre, cela entraine que $A - 2\,I_3$ n'est pas inversible, donc $\mathrm{rg}(A - 2\,I_3) < 3$. Mais à l'évidence, les deux premières colonnes C_1 et C_2 sont indépendantes, donc $\mathrm{rg}(A - 2\,I_3) \geqslant 2$. Alors $\mathrm{rg}(A - 2\,I_3) = 2$ et $\dim(\ker(A - 2\,I_3)) = 1$, donc

$$\ker(A - 2\,I_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_3) = \mathbb{C}\varepsilon_3.$$

Enfin, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$, par exemple en calculant le déterminant. Alors $\boxed{\mathbb{C}^3 = \ker(A+I_3)^2 \oplus \ker(A - 2I_3).}$

Commentaires.

Bien-sûr, il est parfaitement permis de chercher de telles bases de façon traditionnelle, en résolvant les systèmes correspondants.

Pour les 5/2, rien n'empêche de chercher les valeurs propres et espaces propres de A...

1.2. On a $A\varepsilon_3 = 2\varepsilon_3$ car $\varepsilon_3 \in \ker(A - 2\,I_3)$. De plus,

$$A\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\varepsilon_1 \text{ et } A\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Ainsi, dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, l'endomorphisme associé à A a pour matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et A est semblable à cette matrice.

En outre, une matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. Clairement, $\boxed{\mathrm{rg}(J(0)) = n-1}$ car

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.1. Nommons j_0 l'endomorphisme associé à $J(0)$. Par définition, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $j_0(e_i) = e_{i+1}$ et $j_0(e_n) = 0$.

Alors, $j_0^2(e_i) = j_0(e_{i+1}) = e_{i+2}$ pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, et $j_0^2(e_{n-1}) = j_0^2(e_n) = 0$. Donc la matrice $J(0)^2$ comporte des 0 partout, sauf sur la parallèle à la diagonale qui va de la troisième ligne à la $(n-2)^{\mathrm{e}}$ colonne :

$$J(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 0 & \ddots & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la ligne de 1 s'est décalée d'un cran vers le sud-ouest.

Par une récurrence immédiate, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, k]\!]$, $j_0^k(e_i) = e_{i+k}$ et pour $i \in [\![k+1, n]\!]$, $j_0^k(e_i) = 0$. Donc $J(0)^k$ est remplie de 0, sauf sur la parallèle à la diagonale qui va de la $(k+1)^{\mathrm{e}}$ ligne à la $(n-k)^{\text{e}}$ colonne :

$$J(0)^k = \begin{array}{c} \\ k+1 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & (0) \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad n-k \end{array}.$$

Enfin, si $k \geqslant n$, $J(0)^k = O_n$.

2.2.2. Pour tout $k \geqslant n$, $J(0)^k$ est nulle donc nilpotente. Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $(J(0)^k)^n = (J(0)^n)^k = O_n$, donc $J(0)^k$ est nilpotente.

Toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes, sauf bien-sûr $J(0)^0 = I_n$.

2.3. Soit un entier $m \geqslant n$. Pour tout $k \geqslant n$, $J(0)^k = O_n$ donc

$$S_m = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!}.$$

Autrement dit, les matrices S_m sont constantes à partir du rang n, donc

$$\alpha(J(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & & \\ \frac{1}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } U = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & & \\ \frac{1}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Il existe deux entiers r et s tels que $A^r = B^s = O_n$. Comme A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :

$$(\lambda A + B)^{r+s} = \sum_{k=0}^{r+s} \binom{r+s}{k} \lambda^k A^k B^{r+s-k}.$$

Si $k \leqslant r$, $r+s-k \geqslant s$ donc $B^{r+s-k} = O_n$, et si $k \geqslant r$, $A^k = O_n$. Ainsi, $(\lambda A + B)^{r+s} = O_n$ et $\lambda A + B$ est nilpotente.

Toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.

2.5. D'abord, les $n-1$ premières colonnes de U sont clairement indépendantes et la dernière est nulle, donc $\operatorname{rg}(U) = n-1$.

En outre, U est combinaison linéaire des puissances de $J(0)$, qui commutent et qui sont nilpotentes d'après 2.2.2. Donc d'après 2.4, U est nilpotente.

3.1. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in \ker(u^i)$. Alors $u^i(x) = 0$ donc $u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = 0$ et $x \in \ker(u^{i+j})$.

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.

3.2. Posons $T = \{m \in \mathbb{N} \mid t_m = t_{m+1}\}$.

D'après la question précédente, pour $m \in \mathbb{N}$, $\ker(u^m) \subset \ker(u^{m+1}) \subset E$ donc $t_m \leqslant t_{m+1} \leqslant n$. La suite (t_m) est donc croissante et majorée, elle converge. Mais comme c'est une suite d'entiers, elle est constante à partir d'un certains rang. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant p$, $t_m = t_p$: en particulier, $t_{p+1} = t_p$. Ainsi, $p \in T$ et $T \neq \varnothing$.

L'ensemble T est donc une partie de $\mathbb{N}$ non vide, donc il admet un plus petit élément :

l'entier $r = \min\{m \in \mathbb{N} \mid t_m = t_{m+1}\}$ existe.

3.3.i Soit $m < r$. Alors $m \notin T$ donc $t_m \neq t_{m+1}$. Comme $t_m \leqslant t_{m+1}$, $t_m < t_{m+1}$ et $\ker(u^m) \subsetneq \ker(u^{m+1})$.

3.3.ii. On a vu que $r = \min(T)$ donc $r \in T$: en particulier, $t_r = t_{r+1}$ et comme $\ker(u^r) \subset \ker(u^{r+1})$,

$\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$.

3.3.iii. Soient $m \geqslant r$ et $x \in \ker(u^{m+1})$. On a $0 = u^{m+1}(x) = u^{r+1}(u^{m-r}(x))$ donc $u^{m-r}(x) \in \ker(u^{r+1}) = \ker(u^r)$, d'où $0 = u^r(u^{m-r}(x)) = u^m(x)$ et $x \in \ker(u^m)$. Ainsi, $\ker(u^{m+1}) \subset \ker(u^m)$. Mais comme l'autre inclusion est toujours vraie,

$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

4. Dans cette partie 4, nous utiliserons les notations et les résultats de la partie 3.

4.1.1. On a $w : \operatorname{Im}(v^p) \to E,\ x \mapsto v^q(x)$.

Soit $z \in \operatorname{Im}(w)$: il existe $y \in \operatorname{Im}(v^p)$ tel que $z = w(y) = v^q(y)$. De plus, il existe $x \in E$ tel que $y = v^p(x)$, donc $z = v^q(v^p(x)) = v^{p+q}(x)$ et $z \in \operatorname{Im}(v^{p+q})$. Ainsi, $\operatorname{Im}(w) \subset \operatorname{Im}(v^{p+q})$.

Réciproquement, soit $z \in \operatorname{Im}(v^{p+q})$. Il existe $x \in E$ tel que $z = v^{p+q}(x) = v^q(v^p(x)) = w(v^p(x))$ car $v^p(x) \in \operatorname{Im}(v^p)$, donc $z \in \operatorname{Im}(x)$. Ainsi, $\operatorname{Im}(v^{p+q}) \subset \operatorname{Im}(w)$.

Finalement, $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(v^{p+q})$.

4.1.2. Soit $x \in \operatorname{Ker} w$. Alors $0 = w(x) = v^q(x)$ et $x \in \ker(v^q)$. Ainsi, $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

4.1.3. On a

$$\begin{aligned}\dim(\ker(v^{p+q})) &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(v^{p+q}))\\ &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(w))\\ &= \dim(E) - \big(\dim(\operatorname{Im}(v^p)) - \dim(\ker(w))\big)\\ &= \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(w))\\ &\leqslant \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q)),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement le théorème du rang pour v^{p+q}, la question 4.1.1, le théorème du rang pour w, le théorème du rang pour v^p et la question 4.1.2. Autrement dit, $t_{p+q} \leqslant t_p + t_q$.

4.1.4. Il s'ensuit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $t_{i+1} \leqslant t_i + t_1$. Or v est de rang $n-1$ donc $t_1 = \dim(\ker(v)) = 1$ et $t_{i+1} \leqslant t_i + 1$. Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \dim(\ker(v^i)) \leqslant i.}$$

4.1.5. Ainsi, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $t_i \leqslant i$. De plus $t_1 = 1$ et $t_n = n$ car $v^n = \theta$. D'après la partie 3, la suite (t_i) croît strictement jusqu'au rang r, puis est stationnaire à partir du rang r ; et elle est majorée par n. Ici, elle stationne donc sur la valeur n car $t_n = n$, et à partir du rang n car $t_{n-1} \leqslant n-1 < n = t_n$.

Ainsi, il faut ranger les n entiers distincts $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ entre 1 et n, ce qui n'est possible que si $t_i = i$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \dim(\ker(v^i)) = i.}$$

4.2. Comme $\dim(\ker(v^{n-1})) = n-1$, $\boxed{v^{n-1} \neq \theta.}$

4.3. Il existe $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $B_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre : elle sera une base de E car elle contient n vecteurs.

Soit $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, v^{i-1}(e) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, v^{n+i-2}(e) = \lambda_1\, v^{n-1}(e) = 0$ en appliquant v^{n-1}, car pour tout $i \geqslant 2$, $n+i-2 \geqslant n$ et $v^{n+i-2}(e) = 0$. Mais $v^{n-1}(e) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et $\sum_{i=2}^n \lambda_i\ v^{i-1}(e) = 0$. En appliquant v^{n-2}, $\lambda_2\, v^{n-1}(e) = 0$ et $\lambda_2 = 0$. Par une récurrence immédiate, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et B_1 est libre.

4.4. En nommant $e_i = v^{i-1}(e)$ où $i \in [\![1,n]\!]$, on voit que $v(e_i) = e_{i+1}$ si $i \leqslant n-1$ et $v(e_n) = 0$. Alors, la matrice de v dans la base B_1 est

$$\boxed{\operatorname{mat}_{B_1}(v) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0)\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0\end{pmatrix} = J(0).}$$

4.5. On vient de voir que si v est nilpotent de rang $n-1$, sa matrice est semblable à $J(0)$, donc

$\boxed{\text{tout endomorphisme nilpotent de rang } n-1 \text{ a une matrice semblable à } J(0) \text{ et donc les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.}}$

5.1. Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $m \in \mathbb{N}$. D'une part, par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}M\,P)^k = P^{-1}M^k\,P$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^m \frac{(P^{-1}M\,P)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^m P^{-1}\,\frac{M^k}{k!}\,P\\ &= P^{-1}\left(\sum_{k=0}^m \frac{M^k}{k!}\right)P.\end{aligned}$$

D'autre part, par définition,

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(P^{-1}M\,P)^k}{k!} = \alpha(P^{-1}M\,P)$$

$$\text{et}\ \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^m \frac{M^k}{k!} = \alpha(M),$$

et l'énoncé nous permet d'admettre que ces limites existent et se calculent coefficient par coefficient. Alors, par opérations sur les limites, comme les coefficients de P et P^{-1} sont fixes,

$$\boxed{\alpha(P^{-1}M\,P) = P^{-1}\alpha(M)\,P.}$$

5.2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\boxed{e^z = i} &\iff e^z = e^{i\pi/2}\\ &\iff \boxed{z = i\,\tfrac{\pi}{2} + 2\,i\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}\\ \boxed{e^z = -1} &\iff e^z = e^{i\pi}\\ &\iff \boxed{z = i\pi + 2\,i\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}\end{aligned}$$

Cherchons la forme trigonométrique de $-3-4\,i$. D'une part, $-3-4\,i = 5\,(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\,i)$. D'autre part, $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\,i \in \mathbb{U} \smallsetminus \{-1\}$ donc l'argument principal dans $]-\pi,\pi[$ de ce nombre est donné par

$$\theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{-\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}\right) = -2\operatorname{Arctan}(2).$$

Alors $-3-4i = 5\,e^{-2i\operatorname{Arctan}(2)}$. Donc si $z = x + i\,y$,

$$\begin{aligned}\boxed{e^z = -3-4\,i} &\iff e^x\,e^{iy} = 5\,e^{-2i\operatorname{Arctan}(2)}\\ &\iff e^x = 5,\ e^{iy} = e^{-2i\operatorname{Arctan}(2)}\\ &\iff x = \ln(5),\ y = -2\operatorname{Arctan}(2) + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \boxed{z = \ln(5) - 2\,i\operatorname{Arctan}(2) + 2\,i\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}\end{aligned}$$

5.3. Soit $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $e^z = e^x\,e^{iy}$ et que $e^x > 0$, $e^z \neq 0$. Donc

$\boxed{\text{il n'existe aucun } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } e^z = 0.}$

Supposons $\mu \neq 0$. Il s'écrit de façon unique $\mu = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in\,]-\pi,\pi]$. Alors

$$\begin{aligned}e^z = \mu &\iff e^x\,e^{iy} = r\,e^{i\theta}\\ &\iff e^x = r,\ y = \theta + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\iff z = \ln(r) + i\theta + 2\,i\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

En notant $\operatorname{Arg}(\mu) = \theta \in\,]-\pi,\pi]$ l'argument principal de μ, on a

$\boxed{\text{pour tout } \mu \in \mathbb{C}^*, \text{ les } z \in \mathbb{C} \text{ tels que } e^z = \mu \text{ sont les } z = \ln|\mu| + i\operatorname{Arg}(\mu) + 2\,i\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$

5.4.1. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{(s\,I_n)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{s^k}{k!}\right) I_n \xrightarrow[m\to+\infty]{} e^s\,I_n = \mu\,I_n.$$

Ainsi, $\alpha(s\,I_n) = \mu\,I_n$.

5.4.2. Comme $s\,I_n$ et $J(0)$ commutent,

$$\begin{aligned}\alpha(J(s)) &= \alpha(s\,I_n + J(0)) = \alpha(s\,I_n)\,\alpha(J(0))\\ &= \mu\,I_n\,\alpha(J(0)) = \mu\,\alpha(J(0)).\end{aligned}$$

5.4.3. D'après la question 2.5, comme $\mu \neq 0$,

la matrice $\mu\,(\alpha(J(0)) - I_n) = \mu U$ est nilpotente de rang $n-1$.

5.4.4. D'après la question 4.5, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}\,(\mu U)\,Q = J(0)$, donc

$$\begin{aligned}Q^{-1}\,\alpha(J(s))\,Q &= Q^{-1}\,\mu\,\alpha(J(0))\,Q\\ &= Q^{-1}\,\mu\,(I_n + U)\,Q\\ &= Q^{-1}\,\mu\,I_n\,Q + Q^{-1}\,\mu U\,Q\\ &= \mu\,I_n + J(0) = J(\mu).\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}\,\alpha(J(s))\,Q = J(\mu).$$

5.5. On a $Q^{-1}\,\alpha(J(s))\,Q = \alpha(Q^{-1}\,J(s)\,Q)$ d'après la question 5.1, donc

la matrice $Q^{-1}\,J(s)\,Q$ est une solution de l'équation $\alpha(X) = J(\mu)$.

5.6. Clairement, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha({}^tM) = {}^t\alpha(M)$. Alors l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$ équivaut à l'équation $\alpha({}^tX) = J(\mu)$, donc

une solution de l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$ est la matrice $X = {}^tQ\,{}^tJ(s)\,{}^tQ^{-1}$.

5.7.1. On a $T = {}^tJ(i)$ donc on pose $\mu = i$ et on choisit $s = i\,\frac{\pi}{2}$ d'après 5.2. En outre, d'après 2.3,

$$J(0) = U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mu U = Q\,J(0)\,Q^{-1}$ en posant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Enfin, d'après 5.6, une solution X_1 de l'équation $\alpha(X_1) = T$ est

$$X_1 = {}^tQ\,{}^tJ(s)\,{}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} i\,\frac{\pi}{2} & -i \\ 0 & i\,\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

5.7.2.1. Ici, $\mu = -1$ et $s = i\,\pi$. De façon analogue,

$$B_1 = \begin{pmatrix} i\,\pi & -1 \\ 0 & i\,\pi \end{pmatrix}.$$

5.7.2.2. Un calcul par bloc sans difficulté donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k = \begin{pmatrix} B_1^k & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \ln^k(2) \end{pmatrix}$$

donc pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{H^k}{k!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{B_1^k}{k!} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\ln^k(2)}{k!} \end{pmatrix} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & e^{\ln(2)} \end{pmatrix}$$

d'où $\alpha(H) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.7.2.3. D'après 1.3, $\alpha(H) = P^{-1}\,A\,P$ donc d'après 5.1, $A = P\,\alpha(H)\,P^{-1} = \alpha(P\,H\,P^{-1})$, donc

$$\begin{aligned}X_2 &= P\,H\,P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix} \ln(2) & i\pi - \ln(2) & -i\pi + \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -1 + \ln(2) & i\pi + 1 - \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -i\pi - 1 + \ln(2) & 2i\pi + 1 - \ln(2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$