Deuxième devoir à la maison

[E3A16]
L'usage de calculatrices est interdit

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

2. On prend **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$.

2.1 Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

2.2 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$?

2.3 Calculer $\lim_{n\to+\infty} n\,a_n$.

2.4 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$?

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3.1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\,a_{2n} \leqslant u_n$.

3.2 En déduire $\lim_{n\to+\infty} n\,a_{2n}$.

3.3 Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$.

3.4 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.5 A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

4.1 Vérifier que : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \leqslant n,\ B_n \geqslant A_m - m\,a_{n+1}$.

4.2 En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3 Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?