Corrigé du vingtième devoir à la maison

Q1. Sans difficulté, par exemple avec la règle de Sarrus (pour une fois :-),

$$\chi_A = X^3 - 4X = X(X+2)(X-2).$$

Q2. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, donc

A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

De plus, les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -2, 2\}$.

Comme elles sont simples et que A est diagonalisable, on en déduit que

les trois espaces propres de A sont de dimension 1.

Q3. Sans plus de difficulté,

$$\chi_B = X^3+4X = X(X^2+4) = X(X+2i)(X-2i).$$

Alors,

$$\begin{aligned} i\chi_B(iX) &= i((iX)^3 + 4iX)) = i^4 X^3 + 4i^2 X \\ &= X^3 - 4X = \chi_A(X). \end{aligned}$$

Q4. χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc

B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Mais il est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples, donc

B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Les valeurs propres de B sont toujours les racines de χ_B, donc

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, -2i, 2i\}$.

On sait que pour λ valeur propre de B, de multiplicité $m(\lambda)$ et d'espace propre associé $E_\lambda(B)$, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(B) \leqslant m(\lambda)$. Ici, l'espace propre est constitué de vecteurs colonnes réels, et la dimension est prise sur $\mathbb{R}$. Donc $\dim E_0(B) = 1$.

Sur $\mathbb{C}$, comme il y a trois valeurs propres simples,

les espaces propres sont de dimension 1.

Dans ce cas, sur $\mathbb{C}$, les espaces propres contiennent des vecteurs colonnes complexes, et la dimension est prise sur $\mathbb{C}$.

Q5. On a $D = \mathrm{diag}(1, i, -1)$, donc

$$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{i}, \frac{1}{-1}\right) = \mathrm{diag}(1, -i, -1),$$

donc, sans difficulté,

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB.$$

Q6. De même, $\Delta^{-1} = \mathrm{diag}(1, 1/\sqrt{2}, 1)$ et

$$\Delta^{-1}A\Delta = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\Delta^{-1}A\Delta$ est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Or A lui est semblable, donc

A est diagonalisable.

Q7. Considérons $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin^n(x) \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{\cos^k(x)}{\sin^k(x)} = 0,$$

ou encore

$$\sin^n(x) \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^k = 0.$$

En particulier, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, puisque $\sin x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\frac{1}{\tan x}\right)^k = 0.$$

Or la fonction $1/\tan$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Cela entraine que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k y^k = 0.$$

Ainsi, le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$$

admet une infinité de racines : il est donc nul, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = 0$, donc $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

Comme cette famille contient $n+1$ fonctions,

$\dim V_n = n + 1$.

Q8. D'une part,

$$f_0' = (\sin^n)' = n \cos \sin^{n-1} = n f_1 \in V_n$$

$$\text{et } f_n' = (\cos^n)' = -n \sin \cos^{n-1} = -n f_{n-1} \in V_n.$$

D'autre part, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} f_k' &= -k \sin \cos^{k-1} \sin^{n-k} \\ &\quad + (n-k) \cos^k \cos \sin^{n-k-1} \\ &= -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1} \in V_n. \end{aligned}$$

Avec les relations précédentes, on voit donc que l'endomorphisme φ_n est bien défini et que sa matrice dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ est bien la matrice B_n annoncée.

Q9. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Clairement,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= e^{ikx}\, e^{-i(n-k)x} \\ &= (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Q10. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Avec le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} g_k &= \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} i^{k-p} \cos^p \sin^{k-p} \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{q=0}^{n-k} \binom{n-k}{q} (-i)^{n-k-q} \cos^q \sin^{n-k-q} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{n-k} \left(\binom{k}{p} \binom{n-k}{q} (-1)^{n-k-q}\, i^{n-p-q} \right. \\ &\qquad \left. \cdot \cos^{p+q} \sin^{n-p-q} \right). \end{aligned}$$

Posons $r = p + q$: on a $0 \leqslant r \leqslant k + n - k = n$. Comme $q = r - p$, on a

$$\begin{aligned} g_k = \sum_{r=0}^{n} & \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \binom{n-k}{r-p} (-1)^{n-k-r+p} \right) \\ & \cdot i^{n-r} \underbrace{\cos^r \sin^{n-r}}_{f_r} \in V_n, \end{aligned}$$

où l'on reconnait une combinaison linéaire des f_r, pour $0 \leqslant r \leqslant n$.

Q11. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Clairement,

$$g_k' = i\,(2k - n)\, g_k.$$

Cela signifie que les $i\,(2k - n)$ sont valeurs propres de φ_n et que les g_k sont des fonctions propres associées. On vient de trouver $n + 1$ valeurs propres distinctes de φ_n. Comme V_n est de dimension $n + 1$, il n'y en a pas d'autre.

Ainsi, φ_n est diagonalisable,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi_n) = \big\{ i\,(2k - n) \mid k \in [\![0, n]\!] \big\},$$

et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $E_{i(2k-n)}(\varphi_n) = \mathbb{C}\, g_k$.

Q12. φ_n est un automorphisme de V_n
si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de φ_n,
si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $2k - n \neq 0$,
si et seulement si n est impair.

Q13. Développons directement g_n : avec les notations de l'énoncé,

$$\begin{aligned} g_n &= (\cos + i \sin)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k} \cos^k \sin^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} q_k\, f_k. \end{aligned}$$

Comme B_n est la matrice de φ_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et que $E_{in}(\varphi_n) = \mathbb{C}\, g_n$, il s'ensuit que

$$E_{in}(B) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$