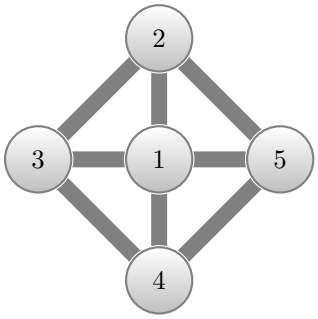
Vingt-et-unième devoir à la maison

Marche aléatoire dans un labyrinthe

Extrait de [MP17]

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ P(S_{k+1} = 1 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 \,|\, S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

Pour une matrice B, $B^\top$ représente sa matrice transposée.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i), i = 1, \ldots, 5)$.

2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.

3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de $B^\top$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.

5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$. Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}\left(\mathrm{I}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}\right),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6. Soit $x \in \ker(u - \mathrm{I}_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to\infty} r_k(x)$.

7. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $\big(r_k(x)\big)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}\left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right), \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.