Vingt-deuxième devoir à la maison

[ESIM01]

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$ et on définit la fonction $Tf : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$Tf(0) = f(0), \quad Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ si } x > 0.$$

1. Soit $f \in E$. On pose $g = Tf$.

a) Montrer que $g \in E$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^x g^2(t) dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt + P(x)g^2(x)$$

où $P(x)$ est un polynôme en x à déterminer.

c) En déduire que $\|g\| \leq 2 \|f\|$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(0) = \sqrt{n}, \quad f_n(x) = \inf \left(\sqrt{n}, \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ si } x > 0.$$

a) Montrer que $f_n \in E$.

b) Calculer $\|f_n\|$.

c) Calculer $\|Tf_n\|$.

3. On considère l'application $T : f \mapsto Tf$. Calculer la borne supérieure, notée $\|T\|$, de l'ensemble

$$\left\{ \frac{\|Tf\|}{\|f\|} \mid f \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

PARTIE B

Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}^*$.

À toute suite $u = (u_n)_{n \geq 1} \in E$, on associe les suites Δu , Su et Tu définies par

$$\Delta u_1 = u_1, \quad \Delta u_n = u_n - u_{n-1} \text{ si } n \geq 2,$$

$$Su_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2}, \quad Tu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

On considère l'ensemble F des suites $u \in E$ telles que la suite Su soit bornée. Pour $u \in F$, on pose

$$\|u\| = \sup Su = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2}.$$

1. a) Montrer que F est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

b) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur F .

2. Soit $u \in F$. On pose $v = Tu$. Soit w la suite de E de terme général $w_n = nv_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour un entier $n \geq 2$, calculer

$$v_n^2 + \Delta w_n + (n-1)(\Delta v_n)^2$$

en fonction de u_n et v_n . Vérifier que cette expression est encore valable pour $n = 1$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Sv_n \leq 2Su_n$.

c) Montrer que $v \in F$ et que $\|v\| \leq 2\|u\|$.