Corrigé du vingt-deuxième devoir à la maison

A.1.a. Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que pour tout $x > 0$, $g(x) = F(x)/x = (F(x) - F(0))/(x - 0)$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, F aussi, donc g est continue sur $]0, 1]$. De plus, F est dérivable en 0 donc $\lim_0 g = F'(0) = f(0) = g(0)$ et g est continue en 0. Finalement, $g \in E$.

A.1.b. Soit $h : x \mapsto 1/x$. En intégrant par parties, ce qui est permis puisque les fonctions manipulées sont de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\int_0^x g^2 = \int_0^x F^2 h^2 = \left[-F^2 h\right]_0^x + 2\int_0^x F' F h = 2\int_0^x f\,g - x\,g^2(x).$$

A.1.c. Sur $[0, 1]$, $x\,g^2(x) \geqslant 0$ donc $\int_0^x g^2 \leqslant 2\int_0^x f\,g$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^x f\,g \leqslant \sqrt{\int_0^x f^2}\sqrt{\int_0^x g^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2}\sqrt{\int_0^1 g^2} = \|f\|\,\|g\|,$$

d'où $\|g\|^2 = \int_0^1 g^2 \leqslant 2\int_0^1 f\,g \leqslant 2\,\|f\|\,\|g\|$. Si g est la fonction nulle, f aussi et $\|g\| = 2\,\|f\| = 0$. Sinon, $\|g\| \neq 0$ donc $\|g\| \leqslant 2\,\|f\|$.

A.2.a. Soit $n \geqslant 1$ et $a = 1/n$. On a $f_n(x) = \sqrt{n}$ si $x \in [0, a]$ et $f_n(x) = \sqrt{h(x)}$ si $x \in\,]a, 1]$. De plus $\lim_{a^-} f_n = \lim_{a^+} f_n = f_n(a)$, donc f_n est continue sur $[0, 1]$ et $f_n \in E$.

A.2.b. $\|f_n\| = \sqrt{1 + \ln n}$ car $\|f_n\|^2 = \int_0^a n + \int_a^1 h$.

A.2.c. Posons $g_n = T f_n$. On a $g_n(0) = f_n(0) = \sqrt{n}$.

Si $x \in\,]0, a]$,

$$g_n(x) = h(x)\int_0^x f_n = h(x)\int_0^x \sqrt{n} = \sqrt{n}.$$

Si $x \in\,]a, 1]$,

$$g_n(x) = h(x)\left(\int_0^a \sqrt{n} + \int_a^x \sqrt{h}\right) = 2\sqrt{h(x)} - \sqrt{a}\,h(x).$$

Alors

$$\|g_n\|^2 = \int_0^a n + \int_a^1 (4h - 4\sqrt{a}\,h^{3/2} + a\,h^2) = 1 + 4\ln n + 8\sqrt{a}\,(1 - \sqrt{n}) - a\,(1 - n),$$

d'où $\|T f_n\| = \sqrt{4\ln n - 6 + 8/\sqrt{n} - 1/n}$.

A.3. En A.1.c, on a vu que pour $f \in E \smallsetminus \{0\}$, $\|Tf\| / \|f\| \leqslant 2$, donc l'ensemble de l'énoncé est borné, $\|T\|$ existe et $\|T\| \leqslant 2$. De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{\|T f_n\|}{\|f_n\|} = \frac{\sqrt{4\ln n - 6 + 8/\sqrt{n} - 1/n}}{\sqrt{\ln n + 1}} \leqslant \|T\|$$

donc à la limite, $\|T\| \geqslant 2$. Finalement, $\|T\| = 2$.

B.1.a. Par définition, $F \subset E$.

La suite nulle est clairement dans F, donc $F \neq \varnothing$.

Soient u et v dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$: notons $w = u + \lambda v$. D'après l'inégalité de Minkowski,

$$S w_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k + \lambda v_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |\lambda v_k|^2} = S u_n + |\lambda|\,S v_n \leqslant \|u\| + |\lambda|\,\|v\|$$

donc Sw est bornée et $u + \lambda v \in E$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

B.1.b. Soit $u \in F$:

$$\|u\| = 0 \iff \sup S u = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0 \iff u = 0.$$

Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a clairement $S(\lambda u) = |\lambda|\,S u$ donc

$$\sup S(\lambda u) = \sup |\lambda|\,S u = |\lambda| \sup S u,$$

c'est-à-dire $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$.

Soient u et v dans E. D'après un calcul précédent, pour $n \geqslant 1$, $S\,(u + v)_n \leqslant \|u\| + \|v\|$ donc $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

$\|\cdot\|$ est bien une norme sur F.

B.2.a. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
&v_n^2 + \varDelta w_n + (n - 1)\,(\varDelta v_n)^2 \\
&= v_n^2 + w_n - w_{n-1} + (n - 1)\,(v_n - v_{n-1})^2 \\
&= v_n^2 + n\,v_n^2 - (n - 1)\,v_{n-1}^2 \\
&\quad + (n - 1)\,(v_n^2 - 2\,v_n\,v_{n-1} + v_{n-1}^2) \\
&= 2\,n\,v_n^2 - 2\,(n - 1)\,v_n\,v_{n-1} \\
&= 2\,v_n\,(n\,v_n - (n - 1)\,v_{n-1}) \\
&= 2\,v_n\,(\textstyle\sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k) = 2\,u_n\,v_n.
\end{aligned}$$

En outre, $\varDelta w_1 = w_1 = v_1^2$ et $v_1 = u_1$, donc

$$v_1^2 + \varDelta w_1 + (1 - 1)\,(\varDelta v_1)^2 = 2\,v_1^2 = 2\,u_1\,v_1.$$

$\forall n \geqslant 1,\ v_n^2 + \varDelta w_n + (n - 1)\,(\varDelta v_n)^2 = 2\,u_n\,v_n.$

B.2.b. En sommant l'égalité précédente, puisque $w_n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&2\sum_{k=1}^n u_k\,v_k \\
&= \sum_{k=1}^n v_k^2 + \sum_{k=1}^n \varDelta w_k + (n - 1)\sum_{k=1}^n (\varDelta v_n)^2 \\
&= (S\,v_n)^2 + w_n + (n - 1)\,(S\,\varDelta v_n)^2 \geqslant (S\,v_n)^2.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n u_k\,v_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n |u_k|^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n |v_k|^2} = S\,u_n S\,v_n,$$

d'où $(S\,v_n)^2 \leqslant 2\,S\,u_n\,S\,v_n$. Si $S\,v_n = 0$, alors les v_k sont nuls pour $k \in [\![1, n]\!]$, donc aussi les u_k et $S\,u_n = 0$: on a bien $S\,v_n \leqslant 2\,S\,u_n$; sinon, en simplifiant par $S\,v_n$,

$S\,v_n \leqslant 2\,S\,u_n$.

B.2.c. Donc $S\,v$ est bornée car $S\,u$ l'est. De plus, pour $n \geqslant 1$, $S\,v_n \leqslant 2\,\|u\|$ donc $v \in F$ et $\|v\| \leqslant 2\,\|u\|$.