Vingt-troisième devoir à la maison

Premier exercice
[E3A20]

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ la fonction f_n par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Deuxième exercice
[CCP14]

Continuité de la fonction longueur

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continument dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace E .

Pour toute fonction $f \in E$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on note

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f .

1. COMPARAISON DES NORMES $\|\cdot\|$ ET $\|\cdot\|_\infty$.

1.1. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E .

1.2. Montrer que

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \|f\|.$$

1.3 Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

2. On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}.$$

2.1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

2.2. On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq \sqrt{n} \frac{\pi}{2}.$$

2.3. L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

2.4. L'est-elle sur $(E, \|\cdot\|)$?