Corrigé du vingt-quatrième devoir à la maison

Exercice 1

1. Soit $x \in J$, fixé. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est clairement alternée. En outre, la suite de terme général

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$$

décroit vers 0. Grâce au théorème spécial des séries alternées, on peut conclure que $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $|f_n| : x \mapsto 1/\sqrt{1+nx}$ est positive et décroissante sur J, donc elle bornée et

$$\|f_n\|_\infty^J = |f_n(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/\sqrt{n}$ diverge car $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc $\sum \|f_n\|_\infty^J$ diverge.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur J.

3. Soient $x \in J$ et $n \in \mathbb{N}$. Grâce au théorème spécial des séries alternées utilisé à la question 1, en notant R_n le reste de la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k$, on a

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Ce dernier terme ne dépend pas de x et tend vers 0 avec n. D'après un théorème du cours, cela entraine que la suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur J vers la fonction nulle, donc que

la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur J.

4. On vient de le voir, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur J. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le théorème de la double limite, d'une part la série de ces limites converge (ce qui n'est pas une surprise) et l'on peut permuter :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

5.1. Le théorème spécial des séries alternées s'applique encore : la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est alternée, la suite de terme général $|u_n| = 1/\sqrt{n}$ décroit vers 0, donc

la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

5.2. Soit $x \in J$. Calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - 1 - \frac{a}{\sqrt{x}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right). \end{aligned}$$

Puisque les deux séries du départ convergent, le regroupement est permis. En outre, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| &= \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx})} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx}+\sqrt{nx})} = \frac{1}{2(nx)^{3/2}}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^{3/2}$ converge, car $\frac{3}{2} > 1$, donc

$$\begin{aligned} \left| \varphi(x) - 1 - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \right) \frac{1}{x^{3/2}}. \end{aligned}$$

Comme la parenthèse ne dépend pas de x, ce majorant est dominé par $1/x^{3/2}$ en $+\infty$, c'est-à-dire

$$\left| \varphi(x) - 1 - \frac{a}{\sqrt{x}} \right| = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}} \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right).$$

Ainsi, quand x est au voisinage de l'infini,

$$\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}} \right).$$

Exercice 2

1. Toute matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale. Donc

les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ conviennent.

2. Condition nécessaire. La matrice M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Si elle est à diagonale propre, 0 est valeur propre triple. Ainsi, M est semblable à la matrice nulle, donc $M = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \beta = 0$.

Condition suffisante. Si $\alpha = \beta = 0$, $M = 0$ et elle est évidemment à diagonale propre.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $\alpha = \beta = 0$.

3.1. C'est du cours :

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_1) = 3,\ \mathbb{V}(X_1) = 6,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_1 = k) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

3.2. La famille $([X_2=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, donc

$$\begin{aligned}[X_1=X_2] &= \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}([X_1=X_2]\cap[X_2=k]) \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}([X_1=k]\cap[X_2=k]) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}[X_1=k,X_2=k].\end{aligned}$$

3.3. Avec la question 2, B est à diagonale propre si et seulement si $X_1=X_2=X_3$. Donc sur le même principe qu'à la question précédente, la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(X_1=X_2=X_3)=\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}[X_1=k,X_2=k,X_3=k]\right).$$

Puisqu'il s'agit d'évènements incompatibles et que $\mathbb{P}$ est une probabilité,

$$\mathbb{P}(X_1=X_2=X_3)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=k,X_2=k,X_3=k),$$

où la série converge forcément. Et comme X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_1=X_2=X_3) \\ &=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(X_2=k)\mathbb{P}(X_3=k) \\ &=\left(\frac{1}{3}\right)^3\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{k-1}=\frac{1}{3^3\,(1-\frac{2^3}{3^3})}=\frac{1}{19}.\end{aligned}$$

4.1. On reconnait le produit scalaire euclidien usuel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: si $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$,

$$(A\,|\,B)=\mathbf{tr}(A^TB)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}\,b_{ij},$$

$$\text{donc } \mathbf{tr}(A^TA)=\|A\|^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}^2.$$

4.2. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Mieux, en notant $D=\operatorname{diag}(\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n)$, il existe une matrice orthogonale P telle que

$$A=PDP^{-1}=PDP^T.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{tr}(A^TA)&=\mathbf{tr}(A^2)=\mathbf{tr}(PDP^{-1}PDP^{-1}) \\ &=\mathbf{tr}(PD^2P^{-1})=\mathbf{tr}(P^{-1}PD^2) \\ &=\mathbf{tr}(D^2)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.\end{aligned}$$

4.3. Soit A symétrique réelle à diagonale propre. Avec la question 4.1, en séparant les termes diagonaux,

$$\mathbf{tr}(A^TA)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}^2.$$

Avec la question 4.2, sachant que les valeurs propres de A sont ses termes diagonaux,

$$\mathbf{tr}(A^TA)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2.$$

Donc, en égalant les deux expressions,

$$\sum_{i\neq j}a_{ij}^2=0.$$

Il s'agit d'une somme de termes tous positifs, donc ils sont tous nuls :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j\Longrightarrow a_{ij}=0.$$

Ainsi, A est diagonale.

Réciproquement, si A est diagonale, elle est bien-sûr symétrique à diagonale propre.

Finalement, les matrices symétriques à diagonale propre sont les matrices diagonales.

Exercice 3

1.1. Soit t au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{t\,(1+\frac{1}{t^2})}=\frac{1}{t}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)=\frac{1}{t}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Donc

$$f(t)=\cos\left(\frac{1}{t}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)=1-\frac{1}{2t^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}\lambda-f(t)&=\lambda-1+\frac{1}{2t^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^4}\right) \\ &\sim\begin{cases}\lambda-1 & \text{si } \lambda\neq 1,\\ \dfrac{1}{2t^2} & \text{si } \lambda=1.\end{cases}\end{aligned}$$

1.2. D'abord, l'intégrande g_λ de $I(\lambda)$ est continue sur $[a,+\infty[$. De plus, pour t au voisinage de l'infini,

$$g_\lambda(t)=\frac{\lambda-f(t)}{t}\sim\begin{cases}\dfrac{\lambda-1}{t} & \text{si } \lambda\neq 1,\\ \dfrac{1}{2t^3} & \text{si } \lambda=1.\end{cases}$$

On sait que $t\mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$, tandis que $t\mapsto 1/t^3$ l'est. Donc g_λ est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si $\lambda=1$. Comme g_λ est de signe constant au voisinage de $+\infty$,

$I(\lambda)$ existe si et seulement si $\lambda=1$.

1.3. L'énoncé laisse penser que l'on choisit $\lambda=1$, ce que nous faisons. Soit $x\geqslant a$. On a

$$\int_a^x\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{f(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, pour x au voisinage de l'infini,

$$\int_a^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln(x)-\ln(a)\sim\ln(x).$$

D'autre part, d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{f(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t = -I(1) \ll \ln(x).$$

$\boxed{\text{Donc en l'infini, } \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \sim \ln(x).}$

2. Soient λ et μ tels que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Alors $I(\lambda) - I(\mu)$ existe, et l'on a

$$\begin{aligned} I(\lambda) - I(\mu) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\lambda - f(t)}{t} - \frac{\mu - f(t)}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda-\mu}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/t$ diverge, le seul moyen que cette intégrale existe est que $\boxed{\lambda = \mu.}$

3.1. La fonction $\lambda - f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, H_λ est son unique primitive qui s'annule en a. À ce titre,

$\boxed{H_\lambda \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } H_\lambda' = \lambda - f.}$

3.2. Soit $x \in [a, +\infty[$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{H_\lambda(x)}{x} + \int_a^x \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, d'une part

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H_\lambda(x)}{x} = 0.$$

D'autre part, pour tout $t \geqslant a$,

$$\left|\frac{H_\lambda(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{\|H_\lambda\|_\infty^{\mathbb{R}}}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge donc aussi $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, et

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Alors,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

existe et est finie, ce qui signifie que $\boxed{I(\lambda) \text{ converge,}}$ et à la limite

$$\boxed{I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

4.1. Découpons :

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la dernière intégrale, posons $u = t - T$:

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u,$$

car f est T-périodique. Où l'on voit que les deux intégrales extrêmes s'annulent, donc

$$\boxed{\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Variante. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives : nommons F l'une d'elles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = F(x+T) - F(x)$, donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car F l'est. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0,$$

car f est T-périodique. Donc $\boxed{\varphi \text{ est constante.}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \boxed{H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x)} &= \int_x^{x+T} (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+T} \lambda\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.} \end{aligned}$$

4.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = H_\lambda(a + nT)$. Avec ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_\lambda(a + nT + T) - H_\lambda(a + nT) \\ &= \lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Cela signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$. Une telle suite diverge forcément, sauf si sa raison est nulle.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bornée si et seulement si } \lambda \text{ vaut } \lambda_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.}$

4.3. Dans ce cas, l'expression de la question 4.1 devient $H_\lambda(x+T) - H(x) = 0$, ce qui signifie que

$\boxed{H_\lambda \text{ est } T\text{-périodique, donc bornée sur } \mathbb{R}.}$

4.4. Toujours dans ce cas, $I(\lambda_0)$ existe d'après la question 3.2. Et d'après la question 2, il n'y a qu'une valeur possible de λ pour que $I(\lambda)$ existe.

$\boxed{I(\lambda) \text{ existe si et seulement si } \lambda = \lambda_0.}$

4.5. En reprenant la démarche de la question 1.3,

$\boxed{\text{en l'infini, } \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \sim \lambda_0 \ln(x).}$

En passant, c'est pour ça que l'on impose $\lambda_0 \neq 0$.

5.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrande h_n de A_n est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En outre, quand t tend vers 0,

$$h_n(t) = \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} \sim \frac{nt}{t} = n.$$

Ainsi, h_n se prolonge par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\boxed{A_n \text{ existe.}}$

5.2. Soit t proche de 0.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(t)} &= \frac{1}{t-\frac{1}{6}t^3+\mathrm{o}(t^4)} = \frac{1}{t\,(1-\frac{1}{6}t^2+\mathrm{o}(t^3))}\\ &= \frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{6}t^2+\mathrm{o}(t^3)\right) = \frac{1}{t}+\frac{1}{6}t+\mathrm{o}(t^2),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin(t)}} = -\frac{1}{6}t+\mathrm{o}(t^2) \sim \boxed{-\frac{1}{6}t.}$$

5.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_n - B_n = \int_0^{\pi/2} |\sin(n\,t)| \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \leqslant t$ donc

$$\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t} \geqslant 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}|A_n - B_n| &= \int_0^{\pi/2} |\sin(n\,t)| \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La fonction sin ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}$$

y est continue. De plus, avec la question précédente,

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0,$$

donc φ est bornée sur $]0, \frac{\pi}{2}]$: notons M un de ses majorants. On a

$$|A_n - B_n| \leqslant \int_0^{\pi/2} M\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}M.$$

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}}$

5.4.1. Faisons le changement de variable proposé : il est licite car il est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$.

$$B_n = \int_0^{n\pi/2} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $|\sin|$ est π-périodique. D'après la question 4, considérons

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$

Comme $\lambda_0 \neq 0$,

$$\boxed{B_n} \sim \lambda_0 \ln\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sim \boxed{\frac{2\ln(n)}{\pi}.}$$

5.4.2. Puisque B_n tend vers $+\infty$ et que $A_n - B_n$ est bornée,

$$\boxed{A_n} \sim B_n \sim \boxed{\frac{2\ln(n)}{\pi}.}$$

Exercice 4

1. En développant par bilinéarité,

$$\begin{aligned}\boxed{\Phi(X,Y)} &= x_1\,y_1\,\Phi(\vec{\imath},\vec{\imath}) + x_1\,y_2\,\Phi(\vec{\imath},\vec{\jmath})\\ &\quad + x_2\,y_1\,\Phi(\vec{\jmath},\vec{\imath}) + x_2\,y_2\,\Phi(\vec{\jmath},\vec{\jmath})\\ &\boxed{= x_1\,y_1 + \cos(\theta)\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) + x_2\,y_2.}\end{aligned}$$

2. Le caractère bilinéaire est acquis par définition. Le caractère symétrique est flagrant sur l'expression précédente. De plus,

$$\begin{aligned}\Phi(X,X) &= x_1^2 + 2\cos(\theta)\,x_1\,x_2 + x_2^2\\ &= (x_1+\cos(\theta)\,x_2)^2 + (1-\cos^2(\theta))\,x_2^2\\ &= (x_1+\cos(\theta)\,x_2)^2 + \sin^2(\theta)\,x_2^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Enfin, si $\Phi(X,X) = 0$, comme il s'agit d'une somme de réels positifs, chacun est nul : $\sin^2(\theta)\,x_2^2 = 0$, mais $\sin(\theta) \neq 0$ car $\theta \in \,]0,\pi[$, donc $x_2 = 0$; et $(x_1+\cos(\theta)\,x_2)^2 = 0$ donc $x_1 = 0$. Ainsi $X = \vec{0}$.

$\boxed{\Phi \text{ est bien un produit scalaire.}}$

3. Pour commencer,

$$\begin{aligned}f(X) &= -x_2\,\vec{\imath} + (x_1 + 2\cos(\theta)\,x_2)\,\vec{\jmath},\\ f(Y) &= -y_2\,\vec{\imath} + (y_1 + 2\cos(\theta)\,y_2)\,\vec{\jmath}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\boxed{\Phi(f(X),f(Y))} = (-x_2)\,(-y_2)\\ &+\cos(\theta)[(-x_2)(y_1{+}2\cos(\theta)y_2){+}(x_1{+}2\cos(\theta)x_2)(-y_2)]\\ &+(x_1+2\cos(\theta)\,x_2)\,(y_1+2\cos(\theta)\,y_2)\\ &= x_2\,y_2\,(1-2\cos^2(\theta)-2\cos^2(\theta)+4\cos^2(\theta))\\ &\quad + x_2\,y_1\,(-\cos(\theta)+2\cos(\theta))\\ &\quad + x_1\,y_2\,(-\cos(\theta)+2\cos(\theta)) + x_1\,y_1\\ &= x_1\,y_1 + \cos(\theta)\,(x_1\,y_2+x_2\,y_1) + x_2\,y_2 \boxed{= \Phi(X,Y).}\end{aligned}$$

$\boxed{f \text{ est bien une isométrie pour le produit scalaire } \Phi.}$

4. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Comme $\Phi(\vec{\imath},\vec{\imath}) = 1$, $\vec{\imath}$ est déjà unitaire. D'après le cours, l'unique vecteur $\vec{k}$ qui convient est donné par

$$\boxed{\vec{k}} = \frac{\vec{\jmath} - \Phi(\vec{\imath},\vec{\jmath})\,\vec{\imath}}{\sqrt{\Phi(\vec{\jmath},\vec{\jmath}) - \Phi(\vec{\imath},\vec{\jmath})^2}} \boxed{= \frac{\vec{\jmath} - \cos(\theta)\,\vec{\imath}}{\sin(\theta)}.}$$

5. On a $f(\vec{\imath}) = \vec{\jmath} = \cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\,\vec{k}$. De même,

$$\begin{aligned}f(\vec{k}) &= \frac{f(\vec{\jmath}) - \cos(\theta)\,f(\vec{\imath})}{\sin(\theta)} = \frac{-\vec{\imath} + 2\cos(\theta)\,\vec{\jmath} - \cos(\theta)\,\vec{\jmath}}{\sin(\theta)}\\ &= \frac{-\vec{\imath} + \cos(\theta)\,\vec{\jmath}}{\sin(\theta)} = \frac{-\vec{\imath} + \cos(\theta)\,(\cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\,\vec{k})}{\sin(\theta)}\\ &= -\sin(\theta)\,\vec{\imath} + \cos(\theta)\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Alors, la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{k})$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.}$$

Où l'on reconnait que $\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \theta.}$

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La matrice de f^m dans la base $(\vec{\imath},\vec{k})$ est

$$\begin{pmatrix}\cos(m\,\theta) & -\sin(m\,\theta)\\ \sin(m\,\theta) & \cos(m\,\theta)\end{pmatrix}.$$

Cette matrice vaut I_2 si et seulement si $m\,\theta$ est multiple de $2\,\pi$, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{m}$. Et comme $\theta \in \,]0,\pi[$, l'ensemble cherché est

$$\boxed{\left\{\frac{2\,k\,\pi}{m} \;\middle|\; k \in \left]0, \frac{m}{2}\right[\cap \mathbb{N}\right\}.}$$