Vingt-sixième devoir à la maison

[MP19]

Durée 3 h

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Comportement asymptotique de sommes de séries entières

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif.* On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$(H_{r,p}) \qquad S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x.$$

Cet objectif sera atteint dans la partie **II** pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie **III** pour le cas $p \geqslant 2$.

Dans la partie **IV**, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leqslant x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$.
2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

II Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie, et l'on fixe un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x := \frac{X_x}{x}.$$

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$Y_{x,N} := \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) = X_x(X_x-1)\cdots(X_x-N+1).$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}((Z_x)^r)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.
4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x. Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que
$$\mathbf{P}(|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,
$$(1 - x^{-1/3})^r\, \mathbf{P}(Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}) \leqslant \mathbf{E}((Z_x)^r).$$
Montrer en outre que
$$(1 - x^{-1/3})^r\, \mathbf{P}(Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
6. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et que
$$\mathbf{E}(Y_{x,N}) = x^N.$$
7. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_N$ tels que
$$a_N = 1 \text{ et } \forall x > 0,\ (X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{x,k}.$$
On pourra introduire la famille $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par
$$H_0 = 1 \text{ et } \forall j \in \mathbf{N}^*,\ H_j = \prod_{i=0}^{j-1} (T - i),$$
où l'indéterminée est notée T.
En déduire que
$$\mathbf{E}((Z_x)^N) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
8. On pose $N := \lfloor r \rfloor$ et $s := r - N$. Montrer l'inégalité
$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ t^s \leqslant s\,(t-1) + 1,$$
et en déduire
$$\forall x > 0,\ (Z_x)^r \leqslant (1-s)\,(Z_x)^N + s\,(Z_x)^{N+1}.$$
9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence
$$E((Z_x)^r) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

III Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geqslant 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geqslant 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!}\, x^n.$$

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}\,(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $(u_n(x))_{0 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n \geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) | n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

12. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r\, e^x}{m}.$$

14. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^r\, e^x)$$

puis que

$$M_x = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^r\, e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |D_n| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n\, u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n\, u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} D_n\,(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(z\,x)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(z\,x)| \leqslant \frac{4\,M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(z\,x) = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^r\, e^x).$$

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k\, x) = p\, S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

IV Application à une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E) \qquad t\,x''(t) - x(t) = 0.$$

18. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f, qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, t^n.$$

19. Démontrer que

$$c_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\sqrt{n}}{(2n)!}\, 4^n.$$

Pour la dernière question, on admet le résultat suivant :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

- (i) La série $\sum_n b_n\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
- (ii) Il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $b_n > 0$.
- (iii) Les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont équivalentes.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \underset{x \to +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n.$$

20. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r, p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{2\sqrt{t}}.$$

Fin du problème