Corrigé du vingt-sixième devoir à la maison

Principe. Selon le programme, la manipulation de sommes infinies de réels positifs est possible en toute généralité, les sommes rencontrées étant éventuellement infinies. Et si le résultat obtenu est un réel fini, le calcul est automatiquement valide. Nous utiliserons ce principe dans les calculs qui suivent.

1. Nommons a_n le coefficient de la première série entière, et R_a son rayon de convergence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, comme $p \geqslant 1$, $pn \geqslant n$ et par croissance de la factorielle,

$$|a_n| \leqslant \frac{(pn)^r}{n!} = b_n.$$

De plus,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence R_b de $\sum b_n\, z^n$ est $+\infty$. Mais avec la majoration précédente, $R_a \geqslant R_b$, donc $\boxed{R_a = +\infty.}$

Cela signifie que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$. Alors, c'est encore le cas pour $\sum_{n\geqslant 1} a_n\,(z^p)^n$, où l'on reconnait la seconde série entière.

$\boxed{\text{Ainsi, le second rayon de convergence est aussi } +\infty.}$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\boxed{S_{0,1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = e^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x.}$$

De même,

$$\boxed{S_{0,2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} = \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, e^x.}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } H_{0,1} \text{ et } H_{0,2} \text{ sont bien valides.}}$

3. Soit $x > 0$. On a

$$Z_x^r = \frac{X_x^r}{x^r}.$$

D'après le théorème de transfert, Z_x^r est d'espérance finie si et seulement si la famille

$$\left(\frac{n^r}{x^r}\, \mathbf{P}(X_x = n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

est sommable. En vertu du principe évoqué au début du corrigé, on peut écrire sans crainte

$$\boxed{\mathbf{E}(Z_x^r)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{x^r}\, e^{-x}\, \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^r} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}\, x^n \boxed{= \frac{e^{-x}}{x^r}\, S_{r,1}(x).}$$

Puisque le résultat est fini, le calcul est valide. En particulier, la famille ci-dessus est bien sommable et $\boxed{Z_x^r \text{ est d'espérance finie.}}$

4. On reconnait que $X_x \sim \mathscr{P}(x)$, donc d'après le cours, X_x est d'espérance et de variance finies. De plus, $\boxed{\mathbf{E}(X_x) = \mathbf{V}(X_x) = x.}$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Puisque X_x est de variance finie, Z_x l'est, donc pour tout $b > 0$,

$$\mathbf{P}(|Z_x - \mathbf{E}(Z_x)| \geqslant b) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Z_x)}{b^2}.$$

Choisissons $b = x^{-1/3}$:

$$\mathbf{P}(|Z_x - \mathbf{E}(Z_x)| \geqslant x^{-1/3}) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Z_x)}{x^{-2/3}}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z_x) = \frac{1}{x}\, \mathbf{E}(X_x) = 1.$$

Et avec les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(Z_x) = \frac{1}{x^2}\, \mathbf{V}(X_x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3}) \leqslant x^{-1/3}.$$

Ce majorant tend vers 0 quand x augmente, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathbf{P}(|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3}) = 0.}$$

5. Soit $x > 1$. Utilisons cette fois-ci l'inégalité de Markov. Comme Z_x^r est positive et d'espérance finie, pour tout $a > 0$,

$$\mathbf{P}(Z_x^r \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z_x^r)}{a}.$$

Choisissons $a = (1 - x^{-1/3})^r$: $a > 0$ car $x > 1$, donc

$$\mathbf{P}(Z_x^r \geqslant (1 - x^{-1/3})^r) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z_x^r)}{(1 - x^{-1/3})^r}.$$

En outre, la fonction $u \mapsto u^r$ est une bijection croissante de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même donc on a l'égalité des évènements

$$(Z_x^r \geqslant (1 - x^{-1/3})^r) = (Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}).$$

Alors, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{(1 - x^{-1/3})^r\, \mathbf{P}(Z_x \geqslant 1 - x^{-1/3}) \leqslant \mathbf{E}(Z_x^r).}$$

Clairement, $\lim_{x\to+\infty} (1 - x^{-1/3})^r = 1$.

Par ailleurs, reprenons la limite de la question 4 en passant au complémentaire :

$$\overline{(|Z_x - 1| \geqslant x^{-1/3})} = (|Z_x - 1| < x^{-1/3})$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{P}(|Z_x - 1| < x^{-1/3}) = 1.$$

En outre,

$$(|Z_x - 1| < x^{-1/3}) \subset (|Z_x - 1| \leqslant x^{-1/3})$$

donc

$$\mathbf{P}(|Z_x - 1| < x^{-1/3}) \leqslant \mathbf{P}(|Z_x - 1| \leqslant x^{-1/3}) \leqslant 1,$$

d'où
$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{P}(|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3})=1.$$
Enfin,
$$|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3} \iff 1-x^{-1/3}\leqslant Z_x\leqslant 1+x^{-1/3}$$
$$\implies 1-x^{-1/3}\leqslant Z_x,$$
d'où
$$(|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3})\subset (Z_x\geqslant 1-x^{-1/3})$$
et
$$\mathbf{P}(|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3})\leqslant \mathbf{P}(Z_x\geqslant 1-x^{-1/3}).$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{P}(Z_x\geqslant 1-x^{-1/3})=1.$$
Finalement,
$$\lim_{x\to+\infty}(1-x^{-1/3})^r\,\mathbf{P}(Z_x\geqslant 1-x^{-1/3})=1.$$

6. Soient $N\in\mathbf{N}^*$ et $x>0$. D'après le théorème du transfert,
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_{x,N}) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{N-1}(n-k)\right)\mathbf{P}(X_x=n)\\ &= e^{-x}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\left(\prod_{k=0}^{N-1}(n-k)\right)}{n!}\,x^n\\ &= e^{-x}\,x^N\underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{(n-N)!}\,x^{n-N}}_{=e^x} = x^N.\end{aligned}$$
Une fois encore, le calcul est valide d'après le principe initial. Et en passant, $Y_{x,N}$ est bien d'espérance finie.

7. Considérons les polynômes proposés par l'énoncé. La famille $(H_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est une base de $\mathbf{R}_N[T]$ car elle contient $N+1$ polynômes de degrés distincts. Alors, il existe un unique $(a_k)_{k\in[\![0,N]\!]}\in\mathbf{R}^{N+1}$ tel que
$$T^N=\sum_{k=0}^{N}a_k\,H_k.$$
En évaluant cette relation en 0, on obtient $0=a_0$, sachant que $H_0=1$ et pour $k\geqslant 1$, $H_k(0)=0$. Par ailleurs, pour $k\geqslant1$, H_k est unitaire et $\deg(H_k)=k$ donc le coefficient dominant de la somme ci-dessus est a_N, et donc $a_N=1$.

En évaluant la relation en X_x, on obtient
$$\begin{aligned}X_x^N &= \sum_{k=1}^{N}a_k\,H_k(X_x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\prod_{j=0}^{k-1}(X_x-j)\\ &= \sum_{k=1}^{N}a_k\,Y_{x,k}.\end{aligned}$$

Alors,
$$Z_x^N=\frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_k\,Y_{x,k}.$$

Par linéarité de l'espérance et avec la question 6,
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z_x^N) &= \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_k\,\mathbf{E}(Y_{x,k})\\ &= \frac{1}{x^N}\sum_{k=1}^{N}a_k\,x^k = 1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{a_k}{x^{N-k}},\end{aligned}$$
car $a_N=1$. Pour $k\in[\![1,N-1]\!]$, $N-k>0$ donc
$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{a_k}{x^{N-k}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$
car c'est une somme finie. Ainsi,
$$\mathbf{E}(Z_x^N)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$

8. La fonction $f_s:t\mapsto t^s$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Si $t>0$, $f_s''(t)=s\,(s-1)\,t^{s-2}<0$, car par construction, $s\in[0,1[$. Ainsi, f_s est strictement concave sur $\mathbf{R}_+^*$ et son graphe est en dessous de ses tangentes, en particulier celle qui passe en $(1,f_s(1))$: autrement dit, pour tout $t>0$,
$$f_s(t)\leqslant f_s(1)+f_s'(1)\,(t-1),$$
c'est-à-dire
$$t^s\leqslant 1+s\,(t-1).$$
Par continuité, cette inégalité est encore valide en 0, donc elle l'est pour tout $t\geqslant 0$.

Alors, pour tout $x>0$, comme $Z_x\geqslant 0$,
$$Z_x^s\leqslant s\,(Z_x-1)+1=1-s+s\,Z_x.$$
En multipliant par $Z_x^N\geqslant 0$ et sachant que $s+N=r$, on obtient
$$Z_x^r\leqslant(1-s)\,Z_x^N+s\,Z_x^{N+1}.$$

9. Par croissance et linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}(Z_x^r)\leqslant(1-s)\,\mathbf{E}(Z_x^N)+s\,\mathbf{E}(Z_x^{N+1}).$$
Avec la question 7,
$$(1-s)\,\mathbf{E}(Z_x^N)+s\,\mathbf{E}(Z_x^{N+1})\xrightarrow[x\to+\infty]{}1-s+s=1.$$
Avec la question 5, on avait déjà
$$(1-x^{-1/3})^r\,\mathbf{P}(Z_x\geqslant 1-x^{-1/3})\leqslant\mathbf{E}(Z_x^r)$$
où
$$(1-x^{-1/3})^r\,\mathbf{P}(Z_x\geqslant 1-x^{-1/3})\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$
D'après le théorème d'encadrement,
$$\mathbf{E}(Z_x^r)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$

Grâce à la question 3, il s'ensuit que
$$\frac{e^{-x}}{x^r}\,S_{r,1}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1,$$
c'est-à-dire
$$S_{r,1}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^r e^x,$$
et $H_{r,1}$ est valide.

10. Posons $I = [1, +\infty[$. Pour tout $t \in I$,

$$\varphi_x(t) = t\left(1 - \frac{1}{t}\right)^r - x.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroît strictement sur I, donc la fonction $t \mapsto 1 - \frac{1}{t}$ y croît strictement. La fonction $u \mapsto u^r$ croît strictement sur I, donc par composition, $t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t}\right)^r$ aussi. La fonction $t \mapsto t$ croît strictement sur I. Ces deux dernières fonctions sont positives, strictement sauf pour $t = 1$, donc leur produit croît strictement sur I. Ainsi, φ_x croît strictement sur I.

En outre, toutes les fonctions ci-dessus sont continues sur I donc φ_x l'est aussi.

Enfin, $\varphi_x(1) = -x < 0$ et $\lim_{+\infty} \varphi_x = +\infty$. Donc φ_x réalise une bijection de I sur $[-x, +\infty[$. Alors, puisque 0 est dans cet intervalle image,

il existe un unique $t_x \geqslant 1$ tel que $\varphi_x(t_x) = 0$ et φ_x est strictement négative sur $[1, t_x[$ et strictement positive sur $]t_x, +\infty[$.

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned} u_n(x) - u_{n-1}(x) &= \frac{n^r}{n!}\, x^n - \frac{(n-1)^r}{(n-1)!}\, x^{n-1} \\ &= \frac{n^r}{n!}\, x^{n-1}\left(x - n^{1-r}\,(n-1)^r\right) \\ &= -\frac{n^r}{n!}\, x^{n-1}\, \varphi_x(n). \end{aligned}$$

Donc $u_n(x) - u_{n-1}(x)$ est du signe contraire de $\varphi_x(n)$, c'est-à-dire strictement positif si $n \in [1, t_x[$ et strictement négatif sinon.

Ainsi, la suite $(u_n(x))_{0 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor}$ croît strictement et la suite $(u_n(x))_{n \geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ décroît strictement.

En passant, $M_x = u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) = \max\limits_{n \in \mathbf{N}} u_n(x)$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $n \neq \lfloor t_x \rfloor$, $u_n(x) < M_x$.

11. Quand x tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \varphi_x(x + \alpha) &= (x + \alpha)^{1-r}\,(x + \alpha - 1)^r - x \\ &= x\left[\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{x}\right)^r - 1\right] \\ &= x\left[\left(1 + (1-r)\,\frac{\alpha}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. \times\left(1 + r\,\frac{\alpha - 1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1\right] \\ &= x\left[1 + \frac{\alpha - r}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] \\ &= \alpha - r + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \alpha - r. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant $\alpha = r - \varepsilon$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_x(x + r - \varepsilon) = -\varepsilon < 0.$$

Comme cette limite est strictement négative, il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A_1$, $\varphi_x(x + r - \varepsilon) < 0$. Grâce aux signes de la question 10, on en tire que $x + r - \varepsilon < t_x$, ou encore $-\varepsilon < t_x - x - r$.

De même, en choisissant $\alpha = r + \varepsilon$,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_x(x + r + \varepsilon) = \varepsilon > 0.$$

Donc il existe $A_2 > 0$ tel que pout $x \geqslant A_2$, $\varphi_x(x + r + \varepsilon) > 0$, donc $x + r + \varepsilon > t_x$ et $t_x - x - r < \varepsilon$.

En posant $A = \max\{A_1, A_2\}$, pour tout $x \geqslant A$, $-\varepsilon < t_x - x - r < \varepsilon$, ou encore $|t_x - x - r| < \varepsilon$. On vient de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geqslant 1,\ |t_x - x - r| < \varepsilon.$$

Cela signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} (t_x - x - r) = 0.$

12. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Pour faciliter les écritures, notons momentanément $n = \lfloor x \rfloor$. Naturellement, on choisit x suffisamment grand pour que $n + k \geqslant 0$ et que l'on puisse manier $u_{n+k}(x)$. On sait qu'au voisinage de $+\infty$, $n \sim x$. Alors, avec la formule de Stirling,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+k}(x)}{u_n(x)} &= \frac{(n+k)^r\, n!}{n^r\,(n+k)!}\, x^k \\ &\sim \frac{(n+k)^r \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, n^k}{n^r \sqrt{2\pi\,(n+k)}\,(n+k)^{n+k}\, e^{-(n+k)}} \\ &= e^k\, \frac{n^{n+k+\frac{1}{2}-r}}{(n+k)^{n+k+\frac{1}{2}-r}} \\ &= e^k \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-n} \underbrace{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k-\frac{1}{2}+r}}_{\to 1} \\ &\sim e^k \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right) \\ &= e^k \exp\left(-n\left(\frac{k}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp(\mathrm{o}(1)) \to 1. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'on a bien

$$u_{\lfloor x \rfloor + k} \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}.$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Toujours par commodité, continuons à noter $n = \lfloor x \rfloor$. Tout d'abord, prenons x assez grand pour que $n - m \geqslant 0$. Ensuite, avec la question 11, pour x voisin de $+\infty$, $t_x = x + r + \mathrm{o}(1)$, donc $t_x > x$, d'où $\lfloor t_x \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor = n$. Ainsi, avec la question 10, la suite $(u_i(x))_{n-m \leqslant i \leqslant n}$ croît donc

$$\sum_{i=n-m}^{n} u_i(x) \geqslant \sum_{i=n-m}^{n} u_{n-m}(x) = (m+1)\, u_{n-m}(x).$$

Alors avec la question 12, quand x est voisin de $+\infty$,

$$\frac{\sum_{i=n-m}^{n} u_i(x)}{m\, u_n(x)} \geqslant \frac{m+1}{m}\, \frac{u_{n-m}(x)}{u_n(x)} \sim \frac{m+1}{m} > 1.$$

Autrement dit, le quotient admet une limite strictement supérieure à 1, donc pour x voisin de $+\infty$, il est lui-même supérieur à 1 :

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

Alors, pour x voisin de $+\infty$,

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=n-m}^{n}\frac{i^r}{i!}x^i \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=n-m}^{n}\frac{x^r}{i!}x^i \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^r}{i!}x^i = \boxed{\frac{x^r e^x}{m}},$$

où dans la première somme, l'on a majoré $i \leqslant n \leqslant x$.

14. On vient de prouver que

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \exists x_m > 0, \forall x \geqslant x_m,\ \frac{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}{x^r e^x} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Cela prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}{x^r e^x} = 0$, ou encore que

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor}(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^r e^x).}$$

Avec la question 11 à nouveau, pour x voisin de $+\infty$, $-1 \leqslant t_x - x - r \leqslant 1$, ou encore

$$x + r - 1 \leqslant t_x \leqslant x + r + 1.$$

Alors, par croissance de la partie entière,

$$\lfloor x + r\rfloor - 1 \leqslant \lfloor t_x\rfloor \leqslant \lfloor x + r\rfloor + 1.$$

Par ailleurs, $\lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor \leqslant \lfloor x + r\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor + 1$ donc

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor - 1 \leqslant \lfloor t_x\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor + 2.$$

Il s'ensuit que $\lfloor t_x\rfloor = \lfloor x\rfloor + i$ où $\lfloor r\rfloor - 1 \leqslant i \leqslant \lfloor r\rfloor + 2$. Or $M_x = u_{\lfloor t_x\rfloor}(x)$, donc M_x a bien la forme donnée par l'énoncé. De plus, par définition de M_x,

$$M_x = \max\left\{u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor+i}(x), -1 \leqslant i \leqslant 2\right\}.$$

Comme cet ensemble ne contient que 4 éléments, tous négligeables devant $x^r e^x$, le plus grand d'entre eux l'est aussi :

$$\boxed{M_x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^r e^x).}$$

15. Soit $z \in \mathbf{U} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\boxed{|D_n|} = \left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1 + |z|^n}{|1 - z|} \leqslant \boxed{\frac{2}{|1 - z|}}.$$

Soit $x > 0$. Comme D_n est bornée et que $\sum u_n(x)$ converge absolument,

les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ convergent absolument.

16. Reprenons les notations de la question précédente. Grâce aux convergences précédentes, les calculs suivants sont valides.

$$\begin{aligned}
&\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\,(u_{n-1}(x) - u_n(x))}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n\,u_{n-1}(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n\,u_n(x)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1}\,u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n\,u_n(x)\\
&= D_1\,u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(D_{n+1} - D_n)\,u_n(x)\\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\,\frac{n^r}{n!}\,x^n = \boxed{S_{r,1}(z\,x).}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\,(u_{n-1}(x) - u_n(x))\right|\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |D_n|\,|u_{n-1}(x) - u_n(x)|\\
&\leqslant \frac{2}{|1 - z|}\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x) - u_n(x)|.
\end{aligned}$$

Coupons cette somme en deux :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x) - u_n(x)|\\
&= \sum_{1\leqslant n\leqslant\lfloor t_x\rfloor}|u_{n-1}(x) - u_n(x)| + \sum_{n>\lfloor t_x\rfloor}|u_{n-1}(x) - u_n(x)|.
\end{aligned}$$

Grâce à la monotonie de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ vue à la question 10, puis par télescopage,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}|u_{n-1}(x) - u_n(x)|\\
&= \sum_{1\leqslant n\leqslant\lfloor t_x\rfloor}(u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n>\lfloor t_x\rfloor}(u_{n-1}(x) - u_n(x))\\
&= u_{\lfloor t_x\rfloor}(x) - u_0(x) + u_{\lfloor t_x\rfloor}(x) - \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\\
&= 2\,u_{\lfloor t_x\rfloor}(x) = 2\,M_x.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{|S_{r,1}(z\,x)| \leqslant \frac{4\,M_x}{|1 - z|}.}$$

Avec la question 14, $M_x = \mathrm{o}(x^r e^x)$ donc

$$\boxed{S_{r,1}(z\,x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^r e^x).}$$

17. On a

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k\,x) = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}\,\xi^{kn}\,x^n\right).$$

Puisque la première somme est finie, on peut permuter sans difficulté :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k\,x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\xi^{kn}\right)\frac{n^r}{n!}\,x^n.$$

Si $\xi^n = 1$,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\xi^{kn} = \sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p.$$

C'est le cas pour tout $n \in p\mathbf{N}$, c'est-à-dire si l'on a $n = pq$ où $q \in \mathbf{N}$. Sinon, $\xi^n \neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{p-1}\xi^{kn} = \sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k = \frac{1 - (\xi^n)^p}{1 - \xi^n} = \frac{1 - (\xi^p)^n}{1 - \xi^n} = 0.$$

Donc, dans la somme sur n ne restent que les multiples de p :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{q=0}^{+\infty} p\frac{(pq)^r}{(pq)!}\, x^{pq} = p\, S_{r,p}(x).}$$

Pour finir, si $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\xi^k \neq 1$ donc en vertu de la question 16, $S_{r,1}(\xi^k x) = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(x^r e^x)$. Donc, quand x est voisin de $+\infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) &= S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x)\\ &= x^r e^x + \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{o}(x^r e^x)\\ &= x^r e^x + \mathrm{o}(x^r e^x) \sim x^r e^x.\end{aligned}$$

Ainsi, $S_{r,p}(x) \sim \dfrac{1}{p}\, x^r e^x$ et $\boxed{H_{r,p} \text{ est valide.}}$

18. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que (E) admette une solution sur $\mathbf{R}$ développable en série entière telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, t^n$$

avec $f'(0) = 1$. Alors $c_1 = f'(0) = 1$. De plus, en évaluant (E) en $t = 0$, $f(0) = 0$ donc $c_0 = 0$. Ainsi,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, t^n$$

De plus, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. En particulier, elle y est de classe $\mathscr{C}^2$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, c_n\, t^{n-2}.$$

En reportant dans (E), pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} & t\, f''(t) - f(t) = 0\\ \iff\ & t \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, c_n\, t^{n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, t^n = 0\\ \iff\ & \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, c_n\, t^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-1}\, t^{n-1} = 0\\ \iff\ & \sum_{n=2}^{+\infty} [n\,(n-1)\, c_n - c_{n-1}]\, t^{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, pour tout $n \geqslant 2$,

$$n\,(n-1)\, c_n - c_{n-1} = 0.$$

Comme $c_1 = 1$, par une récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n \neq 0$, donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{n\,(n-1)}.$$

Alors

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{c_k}{c_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)},$$

d'où, sachant que $c_1 = 1$,

$$c_n = \frac{1}{n!\,(n-1)!}.$$

Ainsi, si f existe, c'est la fonction définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!\,(n-1)!}.$$

Synthèse. Considérons la fonction définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!\,(n-1)!}.$$

Comme pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n!\,(n-1)!} \leqslant \frac{1}{n!},$$

on voit immédiatement que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

Commentaire. On aurait aussi pu dire avec une relation précédente que

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{n\,(n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est bien $+\infty$.

Conclusion. Par analyse-synthèse,

l'équation (E) admet une unique solution f développable en série entière sur $\mathbf{R}$ telle que $f'(0) = 1$: c'est la fonction

$$f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!\,(n-1)!}.$$

19. Utilisons la formule de Stirling. Pour n voisin de $+\infty$,

$$\begin{aligned} c_n = \frac{n}{(n!)^2} &\sim \frac{n}{2\,\pi\, n\, n^{2n}\, e^{-2n}}\\ &= \frac{\sqrt{n}\, 2^{2n}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2\,\pi\, 2\,n}\,(2\,n)^{2n}\, e^{-2n}}\\ &\sim \frac{\sqrt{n}\, 4^n}{\sqrt{\pi}\,(2\,n)!}.\end{aligned}$$

20. Le rayon de convergence du développement en série entière de f vaut $+\infty$; les deux coefficients ci-dessus sont bien non nuls à partir du rang 1 ; et ils sont équivalents. Grâce au lemme admis par l'énoncé, on peut donc affirmer que pour t voisin de $+\infty$,

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\, 4^n}{\sqrt{\pi}\,(2\,n)!}\, t^n\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n)^{1/2}}{(2\,n)!}\,(2\sqrt{t})^{2n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, S_{\frac12,2}(2\sqrt{t})\\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{1}{2}\,(2\sqrt{t})^{1/2}\, e^{2\sqrt{t}}\\ &= \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{2\sqrt{t}},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $H_{\frac12,2}$.