# Troisième devoir à la maison

[E3A16]

Soit $n$ un entier naturel non nul.

**1.** Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, le module et l'argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

**2.** On note $P_n$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right].$$

**2.1.** Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$.

**2.1.1.** Déterminer les polynômes $P_1$ et $P_2$.

**2.1.2.** Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-ils irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ?

**2.2. On revient au cas général**.

**2.2.1.** Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

**2.2.2.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines $N$-ièmes de l'unité.

**2.2.3.** Calculer $P_n(i)$.

**2.2.4.** Prouver par un argument géométrique que les racines de $P_n$ sont réelles.

**2.2.5.** Soit $a \in \mathbb{C}$. Prouver l'équivalence :

$$\begin{aligned} & a \text{ racine de } P_n \\ \iff & \exists k \in [\![1, 2n]\!], \\ & a\,(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i\,(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1). \end{aligned}$$

**2.2.6.** Déterminer les racines du polynôme $P_n$. Vérifier alors le résultat de la question 2.2.4.

**2.2.7.** En développant $P_n$, déterminer un polynôme $Q_n$ de degré $n$ et à coefficients réels tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$. On admettra l'unicité du polynôme $Q_n$ obtenu.

**2.2.8.** Expliciter $Q_1$ et $Q_2$ et déterminer leurs racines respectives.

**2.2.9.** Déterminer les racines de $Q_n$ en fonction de celles de $P_n$.

**3.** On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

En utilisant les résultats obtenus à la question précédente, montrer que

$$S_n = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

**4.** Illustrer graphiquement les inégalités suivantes que l'on démontrera :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}.$$

**5.** Justifier la convergence de la série de terme général $1/k^2$ et calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$