

Corrigé du troisième devoir à la maison

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On a

$$u = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\theta/2}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } |u| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|.$$

$$\boxed{\text{Si } \theta = \pi, u = 0 \text{ et l'argument n'est pas défini.}}$$

$$\boxed{\text{Si } \theta \in [0, \pi[, |u| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \text{ donc } \text{Arg } u = \frac{\theta}{2}.$$

$$\boxed{\text{Si } \theta \in]\pi, 2\pi[, |u| = -2 \cos \frac{\theta}{2}, \text{ donc}}$$

$$u = -2 \cos(\frac{\theta}{2}) (-e^{i\theta/2}) = -2 \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\pi} e^{i\theta/2}$$

d'où $\text{Arg } u = \frac{\theta}{2} + \pi$. Ici, on a choisi la détermination de l'argument dans $[0, 2\pi[$. Si l'on choisit celle dans $]-\pi, \pi]$, il suffit de dire $-1 = e^{-i\pi}$ et $\text{Arg } u = \frac{\theta}{2} - \pi$.

VARIANTE. Si $z \notin \mathbb{R}_-$, son argument dans $]-\pi, \pi[$ est donné par

$$\text{Arg } z = 2 \arctan \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z + |z|},$$

ce qui donne ici, pour $\theta \neq \pi$,

$$\boxed{\text{Arg } u = 2 \arctan \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta + 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|}.$$

Commentaire. L'intérêt de cette expression est qu'elle est valable dans tous les cas. L'inconvénient est bien-sûr qu'elle est plus lourde.

2.1.1. Sans difficulté, en développant avec le binôme de Newton, sachant que $i^2 = -1$,

$$\begin{aligned} (X+i)^3 &= X^3 + 3iX^2 + 3i^2X + i^3 \\ &= X^3 + 3iX^2 - 3X - i, \\ (X-i)^3 &= X^3 - 3iX^2 - 3X + i, \\ (X+i)^5 &= X^5 + 5iX^4 + 10i^2X^3 + 10i^3X^2 \\ &\quad + 5i^4X + i^5 \\ &= X^5 + 5iX^4 - 10X^3 - 10iX^2 + 5X + i, \\ (X-i)^5 &= X^5 - 5iX^4 - 10X^3 + 10iX^2 + 5X - i, \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } P_1 = 3X^2 - 1 \text{ et } P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1.}$$

2.1.2. Clairement, $\deg(P_2) = 2$ et $\deg(P_2) = 4$.

De plus $P_1 = 3(X - \frac{1}{\sqrt{3}})(X + \frac{1}{\sqrt{3}})$ et

$$\boxed{P_1 \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ et n'est donc pas irréductible dans } \mathbb{R}[X].}$$

Enfin, les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ont un degré inférieur ou égal à 2, donc

$$\boxed{P_2 \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{R}[X].}$$

2.2.1. Comme plus haut, en développant par le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (X+i)^{2n+1} &= X^{2n+1} + (2n+1)iX^{2n} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} i^{2n+1-k} X^k \\ (X-i)^{2n+1} &= X^{2n+1} - (2n+1)iX^{2n} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} (-i)^{2n+1-k} X^k \end{aligned}$$

donc, sachant que $-(-1)^{2n+1-k} = (-1)^k$,

$$\begin{aligned} P_n(X) &= (2n+1)X^{2n} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} \frac{1+(-1)^k}{2} i^{2n-k} X^k. \end{aligned}$$

Les sommes ne comportent que des monômes de degré strictement inférieur à $2n$, donc

$$\boxed{P_n \text{ est de degré } 2n \text{ et de coefficient dominant } 2n+1.}$$

2.2.2. L'ensemble des racines N^{es} de l'unité est

$$\boxed{\{e^{2ik\pi/N} \mid k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket\}}.$$

2.2.3. On a

$$\boxed{P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = (2i)^{2n} = (-4)^n.}$$

2.2.4. Si un complexe z est racine de P_n , $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$ donc $|z+i| = |z-i|$. Cela signifie que z est à égale distance de i et de $-i$, donc qu'il est sur la médiatrice du segment reliant i et $-i$, c'est-à-dire l'axe réel.

2.2.5. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P_n . Alors

$$(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}.$$

Mais l'on a vu que i n'est pas racine de P_n , donc $a \neq i$ et l'on peut dire

$$\frac{(a+i)^{2n+1}}{(a-i)^{2n+1}} = 1$$

ou encore

$$\left(\frac{a+i}{a-i} \right)^{2n+1} = 1.$$

Ainsi, $\frac{a+i}{a-i}$ est une racine $(2n+1)^{\text{e}}$ de l'unité et il existe $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ tel que

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{2ik\pi/(2n+1)},$$

d'où

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1).$$

L'éventualité où $k = 0$ n'est pas possible, car elle amènerait à l'égalité $a \cdot 0 = 2i$, qui est fautive : donc $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

« Remonter » les calculs ne présente pas de difficulté, donc la réciproque est aussi vraie. D'où l'équivalence demandée.

2.2.6. Ainsi,

$$\begin{aligned} a &= i \frac{e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1}{e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1} \\ &= i \frac{e^{ik\pi/(2n+1)}(e^{ik\pi/(2n+1)} + e^{-ik\pi/(2n+1)})}{e^{ik\pi/(2n+1)}(e^{ik\pi/(2n+1)} - e^{-ik\pi/(2n+1)})} \\ &= i \frac{2 \cos \frac{k\pi}{2n+1}}{2i \sin \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan \frac{k\pi}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Puisque k parcourt $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, nous avons $2n$ racines. Or P_{2n} est de degré $2n$, donc il n'en admet pas d'autre.

L'ensemble des racines de P_n est donc

$$\left\{ \frac{1}{\tan \frac{k\pi}{2n+1}} \mid k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \right\}.$$

Et l'on retrouve qu'elles sont toutes réelles.

2.2.7. En développant explicitement avec la formule du binôme de Newton,

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k (1 - (-1)^k) X^{2n+1-k}.$$

Seuls restent les termes où k est impair, que l'on renomme alors $2j+1$.

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} i^{2j+1} 2 X^{2n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j X^{2(n-j)} \\ &= Q_n(X^2) \end{aligned}$$

en posant

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j X^{n-j}.$$

2.2.8. Sans difficulté, d'après la question 2.1.1, et ces expressions correspondent à la formule ci-dessus,

$$Q_1(X) = 3X - 1 \text{ et } Q_2(X) = 5X^2 - 10X + 1.$$

$$Q_1 \text{ s'annule en } \frac{1}{3} \text{ et } Q_2 \text{ en } 1 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

2.2.9. En nommant x_k les racines de P_n , celles de Q_n sont les x_k^2 . Mais pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, grâce au caractère π -périodique de la fonction tangente,

$$x_{2n+1-k} = \frac{1}{\tan \frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}} = -\frac{1}{\tan \frac{k\pi}{2n+1}} = -x_k,$$

donc $x_{2n+1-k}^2 = x_k^2$. Ainsi, à partir des $2n$ racines de P_n , on trouve bien n racines de Q_n .

L'ensemble des racines de Q_n est donc

$$\left\{ \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

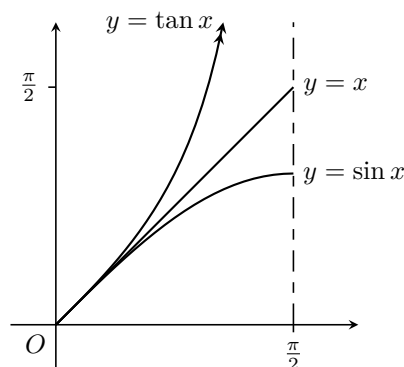
3. On voit que S_n est la somme des racines de Q_n . Or les deux termes de plus hauts degrés de Q_n sont

$$(2n+1)X^n \text{ et } -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{3!}X^{n-1}.$$

D'après les relations coefficients-racines, on peut affirmer que S_n est l'opposé du quotient de ces deux coefficients :

$$S_n = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4. Voici un graphe des fonctions sin, identité et tan.



Pour démontrer ces inégalités, par croissance de l'intégrale, il suffit d'intégrer entre 0 et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ les inégalités immédiates suivantes :

$$0 \leq \cos x \leq 1 \leq 1 + \tan^2 x,$$

reliant les dérivées des fonctions voulues.

VARIANTE. Voici une preuve grâce à la convexité.

La fonction tangente est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, car sa dérivée $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ y croît. Donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes. En particulier, puisque la tangente à l'origine est la première bissectrice, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.

De même, la fonction sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, car sa dérivée $x \mapsto \cos x$ y décroît. Donc sa courbe représentative est au dessous de ses tangentes. En particulier, puisque la tangente à l'origine est aussi la première bissectrice, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x \leq x$.

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en prenant les inverses,

$$0 \leq \frac{1}{\tan x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x},$$

et puisque ces nombres sont positifs, en élevant au carré,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2 x} &\leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}. \end{aligned}$$

5. [Comme série de Riemann d'exposant $2 > 1$, la série $\sum 1/k^2$ converge.

D'après la question précédente, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\tan^2 x}.$$

En particulier, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\frac{1}{(\frac{k\pi}{2n+1})^2} \geq \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(\frac{k\pi}{2n+1})^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \frac{\pi^2}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}.$$

De la même façon,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(\frac{k\pi}{2n+1})^2} \leq \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \frac{\pi^2}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui signifie que

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \right|.$$