Quatrième devoir à la maison

Exponentielle tronquée

[MP17]

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k\,x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k\,x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\,e^{-u})^n \mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\,y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in\,]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = \mathrm{o}(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.
6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n \mathrm{d}u.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = \mathrm{o}(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1}ue^{-u}$ *pour* $u \geqslant x$.