

Corrigé du quatrième devoir à la maison

AVERTISSEMENT. Le corrigé n'est pas de moi.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k \geq 0} \lambda^k / k!$ est convergente de somme e^λ . Pour $x \in \mathbb{R}$ et donc à fortiori pour $x > 0$, la quantité $R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série précédente avec $\lambda = nx$: il est donc bien défini. De plus

$$\underline{T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

2. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliqué entre 0 et x à la fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $f : t \mapsto e^{nt}$ s'écrit

$$\begin{aligned} e^{nx} &= f(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u = x - t$ dans le terme intégral, on en déduit

$$\begin{aligned} \underline{R_n(x) = e^{nx} - T_n(x)} \\ &= \int_x^0 \frac{u^n}{n!} n^{n+1} e^{n(x-u)} (-du) \\ &= \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n e^{-nu} du \\ &= \underline{e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1} n!}{(n+1)! n^{n+1} y^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} y \\ &= y \exp((n+1) \ln(1 + 1/n)). \end{aligned}$$

Or,

$$(n+1) \ln(1 + 1/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln(1 + 1/n) = 1$ et par continuité de l'exponentielle au point 1, on en déduit que

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ye.}$$

Si $y < e^{-1}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et par le critère de d'Alembert que $\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.}$

4. La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est dérivable de dérivée $u \mapsto (1-u)e^{-u}$. Elle est donc strictement croissante sur $[0, 1]$. Pour $x \in]0, 1[$, on en déduit que

$$M = \sup_{u \in [0, x]} ue^{-u} = xe^{-x} < 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n.$$

D'après la question précédente, et comme $M < e^{-1}$,

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n = 0$ et ainsi

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = o(e^{nx}).}$$

De là, pour $x \in]0, 1[$,

$$\underline{T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Oui!

6. On a

$$T_n(x) = e^{nx} - e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

Or, et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du &= \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du \\ &\stackrel{t=nu}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \frac{dt}{n} = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{n!}{n^{n+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \underline{T_n(x)} \\ &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du - \int_0^x (ue^{-u})^n du \right) \\ &= \underline{e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du.} \end{aligned}$$

7. Suivons l'indication de l'énoncé en commençant par la justifier : la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que pour $x > 1$ et pour $u \geq x$, on a $ue^{-u} \leq xe^{-x}$. On en déduit que

$$(ue^{-u})^n = (ue^{-u})^{n-1} ue^{-u} \leq (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}.$$

De là

$$\begin{aligned} 0 \leq T_n(x) &\leq e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^{n-1} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du \\ &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^n \frac{1}{xe^{-x}} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du. \end{aligned}$$

Or, comme $x > 1$, $xe^{-x} < 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$, en appliquant à nouveau la question 3, il vient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^n &= 0 \text{ et donc par domination} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) e^{-nx} &= 0 \text{ et finalement} \end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = o(e^{nx}).}$$