Cinquième devoir à la maison

Étude d'une fonction et de sa limite
[CCP13]

Notations

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0,+\infty[$.

Pour tout entier naturel n on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0!=1$.

1. Étude de la fonction f.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1.1. Montrer que f est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f . Montrer qu'il existe une fonction polynôme p_n, dont on précisera le degré, telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x)=p_n(x)\exp(-x^2).$$

1.3. Que peut-on dire de la parité de p_n ?

1.4. Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on note Δ cette limite.

2. Développpement en série de f.

2.1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}.$$

2.2. Expliciter $p_n(0)$.

3. Calcul de Δ.

Pour tout entier n, on note :

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

3.1. Montrer que pour tout réel u, on a

$$e^u\geqslant 1+u.$$

3.2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases}(1-u)^n\leqslant e^{-nu} & \text{si } u\leqslant 1\\ e^{-nu}\leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u>-1.\end{cases}$$

3.3. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a :

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

3.4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1}\leqslant\frac{\Delta}{\sqrt{n}}\leqslant W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, calculer Δ.