

# Corrigé du cinquième devoir à la maison

NOTATION. Dans tout le corrigé, notons

$$\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto e^{-x^2}.$$

**1.1.** La fonction  $\varepsilon$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc elle y admet des primitives. La seule qui s'annule en 0 est  $f$ , qui est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus, comme  $\varepsilon$  est paire et que  $f(0) = 0$ ,  $f$  est impaire.

$f$  est bien impaire et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**1.2.** La fonction  $\varepsilon$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , comme composée de fonctions qui le sont. Comme primitive d' $\varepsilon$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Procédons par récurrence. D'une part, en posant  $p_1 = 1$ ,  $f' = \varepsilon = p_1 \varepsilon$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons qu'il existe une fonction polynomiale  $p_n$  telle que  $f^{(n)} = p_n \varepsilon$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (p'_n(x) - 2xp_n(x))e^{-x^2} \\ &= p_{n+1}(x)\varepsilon(x) \end{aligned}$$

en posant  $p_{n+1}(x) = p'_n(x) - 2xp_n(x)$  qui est bien polynomiale de degré  $\deg(p_{n+1}) = \deg(p_n) + 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une fonction polynomiale  $p_n$  de degré  $n$  telle que  $f^{(n)} = p_n \varepsilon$ . On a  $p_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$p_{n+1}(x) = p'_n(x) - 2xp_n(x).$$

**1.3.** Avec cette relation, si  $p_n$  est paire,  $p'_n$  est impaire donc  $p_{n+1}$  l'est aussi; et si  $p_n$  est impaire,  $p_{n+1}$  est paire. Comme  $p_1$  est impaire,

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n$  a la parité de  $n - 1$ .

**1.4.** Pour  $t \geq 1$ ,  $\varepsilon(t) \leq e^{-t}$ , où  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $\varepsilon$  l'est aussi. Cela signifie que comme primitive d'une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$f$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

**2.** J'ai oublié de signaler que cette question 2 était réservée aux 5/2.

**2.1.** On sait que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!},$$

donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varepsilon(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $K$  le segment  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ , selon le signe de  $x$ . Pour tout  $t \in K$ ,  $|t| \leq |x|$  donc  $t^2 \leq x^2$ . Il s'ensuit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right| = \frac{t^{2n}}{n!} \leq \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Or la série numérique  $\sum x^{2n}/n!$  converge et ne dépend pas de  $t$ , donc la série de fonctions  $\sum (t \mapsto (-1)^n t^{2n}/n!)$  converge normalement donc uniformément sur le segment  $K$  donc on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \lfloor f(x) \rfloor &= \int_0^x \varepsilon(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

VARIANTE. L'écriture

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!},$$

est un développement en série entière de rayon de convergence  $+\infty$ . Alors, comme primitive d' $\varepsilon$ ,  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et son développement s'obtient en intégrant celui de  $\varepsilon$  terme à terme. On retrouve le résultat précédent.

**2.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 1.2,  $p_n(0) = f^{(n)}(0)$ . Une preuve fastidieuse mais sans difficulté permet d'affirmer que l'on peut dériver la série précédente terme à terme.

*Commentaire.* Bien-sûr, on reconnaît maintenant un développement en série entière, donc il n'est même pas nécessaire de faire une preuve.

Alors, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_{2k}(0) = f^{(2k)}(0) = 0$ , et

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(0) &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} (2k+1)! = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} \end{aligned}$$

**3.1.** L'exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$ , donc son graphe est au-dessus de ses tangentes, en particulier la tangente à l'origine dont une équation est précisément  $y = 1 + x$ .

Ainsi, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $e^u \geq 1 + u$ .

**3.2.** Donc si  $u > -1$ ,  $e^u \geq 1 + u > 0$ , et en élevant à la puissance  $-n$ ,  $e^{-nu} \leq (1 + u)^{-n}$ .

De même, si  $u \leq 1$ ,  $e^{-u} \geq 1 - u \geq 0$ , et en élevant à la puissance  $n$ ,  $e^{-nu} \geq (1 - u)^n$ .

**3.3.** Si  $x \in [0, 1]$ ,  $x^2 \in [0, 1]$ , donc  $(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2}$ . En intégrant sur  $[0, 1]$ ,

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx,$$

ce qui est permis car  $n \geq 1$ , donc  $e^{-nx^2} \leq e^{-x^2} = \varepsilon(x)$  et l'on a vu que  $\varepsilon$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

De même, si  $x \in [0, +\infty[$ ,  $x^2 > -1$  (si !) donc

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \right|$$

ce qui est aussi permis puisque  $(1+x^2)^{-n} \leq (1+x^2)^{-1}$  et  $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  comme dérivée d'Arctan qui est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

**3.4.** Dans l'intégrale de gauche, posons  $x = \sin \theta$  avec  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2)^n dx &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 \theta)^n \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = W_{2n+1}. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale de droite, posons  $x = \tan \theta$  avec  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$  : ce changement de variable est licite car la fonction tangente est de classe  $\mathcal{C}^1$  et bijective de  $[0, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors, puisque l'intégrale de départ converge, la seconde aussi et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2 \theta) d\theta}{(1+\tan^2 \theta)^n} \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)} \theta d\theta = W_{2n-2}. \end{aligned}$$

Enfin, dans l'intégrale du milieu, posons  $y = \sqrt{n}x$ , de sorte que  $y^2 = nx^2$ , ce qui là encore est un changement de variable permis. On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta}{\sqrt{n}}.$$

Finalement, l'encadrement de la question 3.3. se traduit en

$$\left| W_{2n+1} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}. \right|$$

En admettant l'équivalent de l'énoncé, pour  $n$  grand, sachant que  $2n+1 \sim 2n$  et  $2n-2 \sim 2n$ ,

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}, \\ W_{2n-2} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

donc par encadrement,

$$\frac{\Delta}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

$$\left| \text{d'où } \Delta = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \right|$$