Sixième devoir à la maison

La fonction dilogarithme

[CCINP23]

*Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.***Présentation générale**

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**PARTIE I - EXISTENCE ET PREMIÈRES
PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION
DILOGARITHME**

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0, +\infty[\times]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1], f(t, x) = \frac{t}{e^t - x}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, 1)$, montrer que $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t, x) dt.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q4.* Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty, 1]$.

**PARTIE II - DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE
ENTIÈRE**

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière. On considère un nombre réel $x \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0, +\infty[, s_n(t) = t e^{-(n+1)t} x^n.$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 0} s_n(t)$ converge et que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).$$

Q7.* Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire

des questions précédentes que $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Q8. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L(x^2).$$

Q9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

PARTIE III - UNE AUTRE PROPRIÉTÉ

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, 1[, h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x).$$

Q10. Justifier que la fonction L est dérivable sur $] -1, 1[$ et montrer que l'on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q11. Montrer que la fonction h est constante sur $]0, 1[$.

Q12. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0, 1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$.