Corrigé du sixième devoir à la maison

Q1. Soient $t \in]0,+\infty[$ et $x \in]-\infty,1]$. Alors $x \leqslant 1 < e^t$, donc $e^t - x > 0$ et le dénominateur de $f(t,x)$ ne s'annule pas.

Ainsi, f est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.

Q2. La fonction $\varphi : t \mapsto f(t,1) = t/(e^t-1)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\varphi(t) \sim_{t\to 0} 1$, où $t \mapsto 1$ est intégrable en 0, donc φ l'est aussi. Enfin, par croissances comparées, $\varphi(t) \sim_{t\to+\infty} t\,e^{-t} \ll 1/t^2$, où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$ car $2>1$, donc φ l'est aussi.

Alors, $\varphi : t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty,1]$: $x \leqslant 1$, donc pour tout $t > 0$, $e^t - x \geqslant e^t - 1$, donc

$$\frac{t}{e^t - x} \leqslant \frac{t}{e^t-1},$$

c'est-à-dire $f(t,x) \leqslant f(t,1) = \varphi(t)$. Donc $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car φ l'est et que les fonctions sont positives.

Q4.* Nous venons de majorer $f(t,x)$ par la fonction φ, intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendante de x : il s'agit d'une domination valide. Comme les hypothèse de continuités sont immédiates, ou découlent immédiatement des questions précédentes, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet d'affirmer que

L est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Q5. Soient $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $s_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} t x^n$ et $s_n(t) \underset{t\to+\infty}{\ll} 1/t^2$, s_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Réalisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} t\,e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t \\
&= \left[t\,\frac{e^{-(n+1)t}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\mathrm{d}t \\
&= \left[t\,\frac{e^{-(n+1)t}}{-(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est valide : en effet, la première intégrale converge, on l'a vu en début de question ; et la seconde intégrale converge, car c'est une intégrale du cours avec $n+1>0$. Alors, le premier crochet a un sens et l'égalité est permise. Mieux, ce crochet est nul car $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,e^{-(n+1)t} = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Soit $t > 0$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} s_n(t)$ converge, comme série géométrique de raison $e^{-t}x$ où $|e^{-t}x| < 1$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) &= t\,e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t}x)^n = \frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}x} \\
&= \frac{t}{e^t - x} = f(t,x).
\end{aligned}$$

Q7.* Sans difficulté, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

où $\sum 1/n^2$ converge car $2>1$, donc

$\sum_{n\geqslant 1} x^n/n^2$ converge.

Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

Calcul formel.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad L(x) = x\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t \\
&(2) \qquad = x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&(3) \qquad = x\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&(4) \qquad = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2} \\
&(5) \qquad = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Justifications.

(1) C'est la définition de L.

(2) D'après Q6.

(4) D'après Q5.

(5) Grâce à une simple translation d'indice.

(3) Pour justifier cette permutation, utilisons le théorème idoine.

- D'après Q5, les fonctions s_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
- D'après Q6, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
- Sa somme, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Enfin, toujours d'après Q5,

$$\int_0^{+\infty} |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{(n+1)^2},$$

donc $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty} |s_n|$ converge.

- Alors, la permutation (3) est licite.

Q8. Soit $x \in [-1,1]$. On a

$$\begin{aligned} L(x)+L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1+(-1)^n)\,\frac{x^n}{n^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} 2\,\frac{x^{2p}}{(2p)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p^2} = \frac{1}{2}\,L(x^2). \end{aligned}$$

Q9. D'après la présentation,

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Et avec la relation précédente,

$$L(-1)+L(1) = \frac{1}{2}\,L((-1)^2) = \frac{1}{2}\,L(1),$$

donc

$$L(-1) = -\frac{1}{2}\,L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Q10. D'après Q7, L est développable en série entière sur $[-1,1]$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. En particulier, elle y est de classe $\mathscr{C}^1$ et on peut dériver son développement en série entière terme à terme : pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Où l'on voit que $L'(0)=1$. Et si $x \neq 0$, grâce à un développement en série entière usuel,

$$L'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On trouve bien l'expression attendue.

Q11. Tout d'abord, la fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ par opérations usuelles. Et pour tout $x \in \,]0,1[$, $x \neq 0$ et $1-x \neq 0$ donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \ln(x)\,\frac{1}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que h est constante sur $]0,1[$.

Q12. Nommons momentanément k cette constante.

D'une part,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = k.$$

D'autre part, d'après Q4, L est continue en 0 et en 1, donc

$$\lim_{x\to 0} L(x) = L(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} L(1-x) = L(1).$$

En outre, quand x est proche de 0

$$\ln(x)\ln(1-x) \sim -x\ln(x) \to 0.$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = L(0) + L(1) + 0 = L(1).$$

Ainsi, pour tout $x \in \,]0,1[$, $h(x) = L(1)$.

Pour commencer, pour tout $t > 0$,

$$\frac{t}{2\,e^t - 1} = \frac{1}{2}\,\frac{t}{e^t - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,f\left(t, \frac{1}{2}\right),$$

donc l'intégrale de l'énoncé a un sens et vaut $L(\frac{1}{2})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2}\right) &= L\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\,L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln^2(2). \end{aligned}$$

Enfin, $h(\frac{1}{2}) = L(1)$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2).$$