Septième devoir à la maison

[E3A13]
Durée 3h
L'usage de calculatrices est interdit.

Les trois parties sont relativement indépendantes.

Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.

Préambule

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

a) Préciser un équivalent simple de $\mathrm{ch}(t)$ et de $\mathrm{sh}(t)$ lorsque le réel t tend vers $+\infty$.

b) Établir les tableaux de variation (avec les limites aux bornes) des deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$:

$$g_1 : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} \text{ et } g_2 : t \mapsto \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}.$$

Partie I : intégrales et développements en série

I-1.1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

I-1.2. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

I-1.3. Calculer I_0. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha > 0$, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t.$$

I-2.1. Justifier que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{e^t}{2} \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant e^t.$$

I-2.2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de

$$C_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{ch}(t)}\, \mathrm{d}t,$$

ainsi qu'un encadrement du rapport $\dfrac{C_n}{I_n}$.

I-2.3. Grâce au calcul de la dérivée de la fonction $t \mapsto \mathrm{Arctan}(e^t)$, calculer C_0.

I-2.4. Justifier, pour tout réel $t > 0$, l'égalité

$$\frac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, e^{-(2k+1)\,t}.$$

I-2.5. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = 2\,(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^{n+1}}.$$

I-2.6. Montrer que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$.

I-3.1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{sh}(t)}\, \mathrm{d}t.$$

I-3.2. Justifier, pour tout réel $t > 0$, l'égalité

$$\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)\,t}.$$

I-3.3. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 2\,(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k+1)^{n+1}}.$$

Partie II : intégrales à paramètre

II-1. Pour tout réel x, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\mathrm{ch}(t)}\, \mathrm{d}t.$$

II-1.1.* Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

II-1.2. Montrer que F est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. Justifier grâce à **I-2.2** que le rayon de convergence de ce développement vaut 1. *Pour cela, on exprimera d'abord e^{ixt} comme somme d'une série.*

II-1.3. En effectuant une intégration par parties, majorer $|x\,F(x)|$ indépendamment du réel x. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

II-2. Pour tout réel x, on pose

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\,t)}{\mathrm{ch}(t)}\, \mathrm{d}t.$$

II-2.1. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant **I-2.4**, justifier que

$$\left| \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, e^{-(2k+1)\,t} \right| \leqslant e^{-(2n+3)\,t}.$$

II-2.2. En déduire que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| H(x) - \sum_{k=0}^{n} 2\,(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(x\,t)\,\mathrm{d}t \right) \right| \leqslant 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\,\mathrm{d}t.$$

II-2.3. Pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(x\,t)\,\mathrm{d}t.$$

II-2.4. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^k\,(2\,k+1)}{(2\,k+1)^2 + x^2}.$$

Partie III : étude d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{ y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - y(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} \right\}.$$

III-1. En utilisant ch et sh, déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $y'' = y$.

III-2.1. Donner la forme générale d'une solution $y \in \mathscr{S}$.

III-2.2. Existe-t-il des solutions impaires dans $\mathscr{S}$?

III-2.3. Expliciter l'unique solution $\theta \in \mathscr{S}$, paire et telle que $\theta(0) = 1$.

III-3.1. Déterminer explicitement l'unique suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,t^{2k}.$$

III-3.2. Montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite réelle (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, mais que l'on définira par récurrence) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$b_0\,a_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} b_k\,a_{n-k} = 0.$$

III-3.3. Préciser b_0, b_1, b_2.

III-3.4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant 1.$$

On pourra considérer comme connu que $\mathrm{ch}(1) \leqslant 2$.

III-3.5. En déduire que pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$, la série $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,t^{2n}$ converge absolument, avec de plus, $\mathrm{ch}(t)\,g(t) = 1$.

Remarque : on a ainsi prouvé que $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ *est développable en série entière sur* $\left]-1, 1\right[$.

III-4. On suppose qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et telle que la série entière définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,t^{2n}$$

ait un rayon de convergence $R \geqslant 1$, et vérifie :

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[,\ f''(t) - f(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.$$

III-4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et b_n.

III-4.2. En déduire qu'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant 1.$$

III-4.3. En déduire que la fonction θ considérée en **III-2.3** est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-1, 1\right[$.

III-4.4. Justifier que $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-1, 1\right[$.

Fin de l'énoncé.