

Corrigé du septième devoir à la maison

P.a. Quand t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \underline{\text{ch}(t)} &= \frac{1}{2} e^t (1 + e^{-2t}) \sim \frac{1}{2} e^t, \\ \underline{\text{sh}(t)} &= \frac{1}{2} e^t (1 - e^{-2t}) \sim \frac{1}{2} e^t. \end{aligned}$$

P.b. D'une part, la fonction ch est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc son inverse, g_1 , est positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, $\lim_{0+} \text{ch} = 1$ et $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$, donc $\lim_{0+} g_1 = 1$ et $\lim_{+\infty} g_1 = 0$. On en déduit le tableau de variations :

t	0	$+\infty$
$g_1(t)$	1	0

D'autre part, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction sh est strictement positive et dérivable, donc g_2 y est définie et dérivable, et pour tout $t > 0$,

$$g_2'(t) = \frac{\text{sh}(t) - t \text{ch}(t)}{\text{sh}^2(t)}.$$

Nommons N le dénominateur de g_2' :

$$N'(t) = -t \text{sh}(t) < 0,$$

donc N décroît strictement ; comme $\lim_{0+} N = 0$, $N < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi $g_2' < 0$. Alors, g_2 , décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{0+} g_2 = 1$ et $\lim_{+\infty} g_2 = 0$. D'où le tableau :

t	0	$+\infty$
$g_2(t)$	1	0

I.1.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et en $+\infty$, $t^n e^{-t} \ll 1/t^2$, où la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto t^n e^{-t}$ l'est aussi. $\underline{I_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

I.1.2. En intégrant par parties, ce qui est permis car tous les termes manipulés ont un sens,

$$\begin{aligned} \underline{I_{n+1}} &= \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= (n+1) I_n. \end{aligned}$$

I.1.3. Clairement, $I_0 = 1$, donc par une récurrence immédiate, $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, I_n = n!}$

I.1.4. Le changement de variable $u = \alpha t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, donc, puisque I_n converge,

$$\underline{\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} \frac{du}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}}.$$

I.2.1. Pour tout $t \geq 0$, $0 \leq e^{-t} \leq e^t$, donc

$$\underline{\frac{1}{2} e^t \leq \text{ch}(t) \leq e^t}.$$

I.2.2. La fonction $t \mapsto t^n / \text{ch}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et d'après la minoration précédente, pour tout $t \geq 0$, $t^n / \text{ch}(t) \leq 2 t^n e^{-t}$, où l'on reconnaît l'intégrande de I_n , donc $t \mapsto t^n / \text{ch}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\underline{C_n \text{ existe.}}$$

En outre, en utilisant l'encadrement précédent, $t^n e^{-t} \leq t^n / \text{ch}(t) \leq 2 t^n e^{-t}$, et en intégrant sur $\mathbb{R}_+$,

$$I_n \leq C_n \leq 2 I_n, \text{ donc } \underline{1 \leq \frac{C_n}{I_n} \leq 2}.$$

I.2.3. Pour $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}(\text{Arctan}(e^t)) = \frac{e^t}{1 + (e^t)^2} = \frac{1}{e^{-t} + e^t} = \frac{1}{2 \text{ch}(t)},$$

donc, sachant que $\lim_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2}$ et que $\text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$, on a $\underline{C_0 = [2 \text{Arctan}(e^t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}}$.

I.2.4. Soit $t > 0$. On reconnaît la somme de la série géométrique de raison $-e^{-2t}$ et de premier terme e^{-t} , laquelle converge car $|-e^{-2t}| < 1$. Alors

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-t} (-e^{-2t})^k \\ &= \frac{e^{-t}}{1 - (-e^{-2t})} = \frac{1}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{2 \text{ch}(t)}. \end{aligned}$$

I.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\text{ch}(t)} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} dt \end{aligned}$$

Soit $K \in \mathbb{N}$. En découpant la somme,

$$\begin{aligned} C_n &= 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^K (-1)^k e^{-(2k+1)t} dt \\ &\quad + 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=K+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} dt. \end{aligned}$$

Nommons A_K la première intégrale et B_K la seconde :

$$C_n = A_K + B_K.$$

Par linéarité, et avec I.1.4,

$$\begin{aligned} A_K &= 2 \sum_{k=0}^K (-1)^k \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t} dt \\ &= 2n! \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}} \\ &\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 2n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

C'est permis grâce au théorème spécial des séries alternées, car la suite $(1/(2k+1)^{n+1})_{k \geq 0}$ décroît vers 0.

Toujours grâce au théorème spécial des séries alternées, mais pour une autre série alternée,

$$\begin{aligned} |B_K| &\leq 2 \int_0^{+\infty} t^n \left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| dt \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2K+3)t} dt \\ &= \frac{2n!}{(2K+3)^{n+1}} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Alors, en passant à la limite sur K ,

$$C_n = 2n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.$$

Commentaire. Nous verrons plus tard un théorème permettant de faire ce travail directement.

I.2.6. Pour $n = 0$, reprenons la démarche, mais avec des intégrales différentes. D'une part, la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k / (2k+1)$ converge, grâce au théorème spécial des séries alternées. D'autre part, pour $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^K (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^K (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{K+1}}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} + (-1)^K \int_0^1 \frac{t^{2(K+1)}}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| (-1)^K \int_0^1 \frac{t^{2(K+1)}}{1 + t^2} dt \right| &= \int_0^1 \frac{t^{2(K+1)}}{1 + t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{2(K+1)} dt = \frac{1}{2K+3} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = [\text{Arctan } t]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\left| \text{d'où } C_0 = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right|$$

I.3.1. La fonction $t \mapsto t^n / \text{sh}(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$: en effet, elle se prolonge par continuité en 0 car $t^n / \text{sh}(t) \sim_0 t^{n-1}$ et $n \geq 1$; et en $+\infty$, d'après P.a, $t^n / \text{sh}(t) \sim t^n / \text{ch}(t)$, où $t \mapsto t^n / \text{ch}(t)$ est intégrable en $+\infty$ d'après I.2.2.

$|S_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$

I.3.2. Pour exactement la même raison qu'en I.2.4,

$$\left| \frac{1}{2 \text{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \right|$$

I.3.3. Reprenons la démarche de I.2.5. Soit $K \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\text{sh}(t)} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^K e^{-(2k+1)t} dt \\ &\quad + 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=K+1}^{+\infty} e^{-(2k+1)t} dt \\ &= A_K + B_K, \end{aligned}$$

en adaptant les notations. Comme plus haut,

$$\begin{aligned} A_K &= 2 \sum_{k=0}^K \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t} dt \\ &= 2n! \sum_{k=0}^K \frac{1}{(2k+1)^{n+1}} \\ &\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 2n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

où la série converge bien, car pour $k \geq 0$, sachant que $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(2k+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}$$

et la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |B_K| &= B_K = 2 \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=K+1}^{+\infty} e^{-(2k+1)t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} t^n \frac{e^{-(2K+3)t}}{1 - e^{-t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\text{sh}(t)} e^{-(2K+2)t} dt. \end{aligned}$$

La fonction sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $t > 0$, $\text{sh}(t) \geq t$ et

$$\begin{aligned} B_K &\leq \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(2K+2)t} dt \\ &= \frac{(n-1)!}{(2K+2)^n} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

$$\left| \text{Finalement, } S_n = 2n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}} \right|$$

II.1.1.* Posons $A = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_+$ et considérons

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{C}, (x, t) \mapsto \frac{e^{ixt}}{\text{ch}(t)}.$$

○ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur I . De plus, pour tout $t \in I$, $|g(x, t)| = 1/\text{ch}(t)$, et l'on a vu en I.2.2 que $t \mapsto 1/\text{ch}(t)$ est intégrable sur I , donc $t \mapsto g(x, t)$ l'est aussi.

○ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{it e^{ixt}}{\text{ch}(t)}.$$

○ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I .

○ Enfin, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{\text{ch}(t)},$$

et l'on a vu en I.2.2 que $t \mapsto t/\text{ch}(t)$ est intégrable sur I , donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

Il s'ensuit que

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $F'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{t e^{ixt}}{\text{ch}(t)} dt$.

II.1.2. La démarche est encore la même qu'en I.2.5 ou I.3.3, nous ne le referons pas...

II.1.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégration par parties qui suit est valide, car tous les termes manipulés ont un sens :

$$\begin{aligned} |x F(x)| &= \left| \left[\frac{e^{ixt}}{i \text{ch}(t)} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} \text{sh}(t)}{i \text{ch}^2 t} dt \right| \\ &= \left| i + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} \text{sh}(t)}{i \text{ch}^2 t} dt \right| \\ &\leq 1 + \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{ixt} \text{sh}(t)}{i \text{ch}^2 t} \right| dt \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2 t} dt \\ &= 1 + \left[-\frac{1}{\text{ch}(t)} \right]_0^{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

Alors pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leq 2/x$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

II.2. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de $H(x)$ est acquise, où on reconnaît la partie réelle de $F(x)$, qui converge avec la question II-1.

II.2.1. En I.2.4, on a manipulé une série alternée. D'après le théorème spécial des séries alternées,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| &\leq |(-1)^{n+1} e^{-(2(n+1)+1)t}| \\ &= e^{-(2n+3)t}, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit ici,

$$\left| \frac{1}{2 \text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| \leq e^{-(2n+3)t}.$$

II.2.2. On a donc

$$\begin{aligned} &\left| H(x) - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right) \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch}(t)} dt - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n 2(-1)^k e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right| \\ &= 2 \left| \int_0^{+\infty} \cos(xt) \left(\frac{1}{2 \text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right) dt \right| \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} |\cos(xt)| \left| \frac{1}{2 \text{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| dt \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt. \end{aligned}$$

Bien-sûr, toutes ces intégrales convergent, grâce aux exponentielles.

II.2.3. On a

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right| \\ &= \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} e^{ixt} dt \right) \\ &= \text{Re} \left(\left[\frac{e^{(-(2k+1)+ix)t}}{-(2k+1)+ix} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \text{Re} \left(\frac{1}{2k+1-ix} \right) = \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2}. \end{aligned}$$

II.2.4. Puisque

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

la série dont on voit les sommes partielles en II.2.2 converge et sa somme est $H(x)$. D'après II.2.3, on a donc

$$H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}.$$

III.1. L'ensemble des solutions de $y'' = y$ est

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}).$$

III.2.1. Utilisons la méthode de variation de la constante : posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = z(t) \operatorname{ch}(t)$, où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors d'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} y''(t) &= z''(t) \operatorname{ch}(t) + 2z'(t) \operatorname{ch}'(t) + z(t) \operatorname{ch}''(t) \\ &= z''(t) \operatorname{ch}(t) + 2z'(t) \operatorname{sh}(t) + z(t) \operatorname{ch}(t). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) &= \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) \operatorname{ch}(t) + 2z'(t) \operatorname{sh}(t) &= \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) \operatorname{ch}^2(t) + 2z'(t) \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) &= 1 \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, (z' \operatorname{ch}^2)'(t) &= 1 \\ \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) \operatorname{ch}^2(t) &= t + \beta \\ \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, z'(t) &= \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)} + \frac{\beta}{\operatorname{ch}^2(t)} \\ \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \\ z(t) &= \int \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)} dt + \int \frac{\beta}{\operatorname{ch}^2(t)} dt + \alpha. \end{aligned}$$

Une primitive de $1/\operatorname{ch}^2$ est $\operatorname{sh}/\operatorname{ch}$, et pour l'autre primitive, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)} dt &= \frac{t \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} - \int \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} dt \\ &= \frac{t \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} - \ln(\operatorname{ch}(t)). \end{aligned}$$

On a choisi *une* primitive. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) \operatorname{ch}^2(t) + 2z'(t) \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) &= 1 \\ \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \\ z(t) &= \frac{t \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} - \ln(\operatorname{ch}(t)) + \beta \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} + \alpha. \end{aligned}$$

Et comme $y = z \operatorname{ch}$,

$$\left| \begin{array}{l} y \in \mathcal{S} \\ \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) \\ \quad + \alpha \operatorname{ch}(t) + \beta \operatorname{sh}(t). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

III.2.2. Si y est impaire, y'' l'est aussi, donc $y'' - y$ l'est, et ne peut être égale à $1/\operatorname{ch}$ qui est paire.

Aucune fonction de $\mathcal{S}$ n'est impaire.

III.2.3. Soit $\theta \in \mathcal{S}$, paire : il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta(x) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + \alpha \operatorname{ch}(t) + \beta \operatorname{sh}(t).$$

Comme θ est paire, sa partie impaire, $\beta \operatorname{sh}$, est nulle, donc $\beta = 0$. En outre, $\theta(0) = 1 = \alpha$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ \theta(t) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + \operatorname{ch}(t). \end{array} \right.$$

III.3.1. D'après le cours, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right.$$

III.3.2. On $a_0 = 1$ donc $b_0 = 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, en supposant définis les b_k , pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on construit b_{n+1} en posant

$$\left| b_{n+1} = - \sum_{k=0}^n b_k a_{n+1-k} \right.$$

Alors, on aura bien

$$\sum_{k=0}^{n+1} b_k a_{n+1-k} = \sum_{k=0}^n b_k a_{n+1-k} + b_{n+1} a_0 = 0.$$

D'après le principe de récurrence, la suite ainsi définie par récurrence est unique.

III.3.3. On a

$$\left| \begin{array}{l} b_0 = 1, \quad b_1 = -b_0 a_1 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = -b_0 a_2 - b_1 a_1 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}. \end{array} \right.$$

III.3.4. Procédons par récurrence, grâce à la relation de III.3.2. On sait déjà que $b_0 = 1$. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $|b_k| \leq 1$. Alors

$$\begin{aligned} |b_{n+1}| &\leq \sum_{k=0}^n |b_k| a_{n+1-k} \leq \sum_{k=0}^n a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \operatorname{ch}(1) - 1 \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, [pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq 1$].

III.3.5. Pour tout $t \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|b_n t^{2n}| = |b_n| t^{2n} \leq t^{2n}.$$

Or $t^2 \in [0, 1]$, donc la série $\sum_{n \geq 0} t^{2n}$ converge, comme série géométrique de raison t^2 .

[Donc pour tout $t \in]-1, 1[$, la série définissant $g(t)$ converge absolument.]

De plus, pour $t \in]-1, 1[$, le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n t^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} b_n t^{2n}$ est la série $\sum_{n \geq 0} c_n$, où

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n b_k t^{2k} a_{n-k} t^{2(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} \right) t^{2n}, \end{aligned}$$

donc $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ si $n \geq 1$. Or

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

$$\left| \text{donc } \operatorname{ch}(t) g(t) = 1. \right.$$

III.4. J'ai oublié de taper la fin :-)