

Huitième devoir à la maison

[CCP07]

Les calculatrices sont autorisées.

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations

On note

- \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels,
- \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels,
- e le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1.

Pour x appartenant à \mathbb{R} , on note $|x|$ la valeur absolue de x .

Pour tout entier naturel n , on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Si j et n sont deux entiers naturels fixes tels que $0 \leq j \leq n$, on note

- $\llbracket j, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $j \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{j}$ le nombre de parties ayant j éléments d'un ensemble de n éléments.

On rappelle que pour tout entier naturel j élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Si f est une fonction k fois dérivable sur un intervalle I (avec $k \geq 1$) on note f' (resp. $f^{(k)}$) sa fonction dérivée (resp. sa fonction dérivée k -ième).

Si u est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , donc une suite réelle, on utilise la notation usuelle $u(n) = u_n$ pour tout n appartenant à \mathbb{N} .

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p - x| < \frac{1}{2}$, alors p est l'entier le plus proche de x .

Objectifs

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1}n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique \mathcal{S}_n , et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

Dans la partie I, on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence. Dans la partie II, on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n . La partie III est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des séries

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

PARTIE I**Les suites α et β**

On définit la suite α par $\alpha_0 = 1$ et la relation de récurrence,

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}.$$

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est

convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$; en particulier pour

$$x = -1, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\beta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \text{ et } \rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

I.1/ Étude de la suite α .

I.1.1/ Expliciter α_k pour k dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$.

I.1.2/ Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de \mathbb{N} .

I.2/ Étude de la suite β .

I.2.1/ Expliciter β_k pour k dans $\llbracket 0, 4 \rrbracket$.

I.2.2/ Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de \mathbb{N} .

I.2.3/ Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n , pour tout n de \mathbb{N} .

I.2.4/ Comparer les deux suites α et β .

I.3/ Étude de ρ_n .

I.3.1/ Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n .

I.3.2/ Établir, pour tout entier naturel n , l'inégalité

$$n! |\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

L'inégalité est-elle stricte ?

I.3.3/ Dédire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$

I.4/ Étude d'une fonction.

On désigne par f la fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 (au moins) sur l'intervalle $] -1, 1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions $f(0) = 1$ et

$$\text{pour tout } x \text{ de }] -1, 1[, (1-x)f'(x) - xf(x) = 0.$$

I.4.1/ Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f . Expliciter $f(x)$ pour tout x de $] -1, 1[$.

I.4.2/ Justifier l'affirmation

$$\llcorner f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }] -1, 1[\gg.$$

I.4.3/ Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$$

en fonction de n et de x .

I.4.4/ En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n , entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

PARTIE II

La suite γ

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel. Pour $n \geq 1$, on note

- \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$,
- γ_n le nombre d'éléments de \mathcal{S}_n sans point fixe (τ appartenant à \mathcal{S}_n est sans point fixe si pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$, on adopte la convention $\gamma_0 = 1$.

II.1/ Calculer γ_1 et γ_2 .

II.2/ Classifier les éléments de \mathcal{S}_3 selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3 .

II.3/ On suppose dans cette question que $n = 4$.

II.3.1/ Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à \mathcal{S}_n ayant deux points fixes ?

II.3.2/ Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à \mathcal{S}_n ayant un point fixe ?

II.3.3/ Calculer γ_4 .

II.4/ Relation entre les γ_k .

II.4.1/ Rappeler sans justification le nombre d'éléments de \mathcal{S}_n .

II.4.2/ Si $0 \leq k \leq n$, combien d'éléments de \mathcal{S}_n ont exactement k points fixes ?

II.4.3/ Établir pour tout entier naturel n la relation

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k = n!$$

II.5/ On considère un réel x de $] -1, 1[$. Si c'est possible, on pose

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n \text{ et } h(x) = g(x)e^x.$$

II.5.1/ Justifier que $g(x)$ est bien défini.

II.5.2/ Expliciter $h(x)$ comme somme d'une série.

II.5.3/ Expliciter $g(x)$.

II.5.4/ Comparer les deux suites β et γ .

II.5.5/ Peut-on définir la fonction g en 1 ?

II.5.6/ Peut-on définir la fonction g en -1 ?

II.5.7/ Calculer γ_8 .

PARTIE III

Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$

Pour tout entier naturel n , on note

- $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$,
- $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$,
- $v_n = (-1)^{n+1} J_n$.

III.1/ La série $\sum_{n \geq 0} v_n$.

III.1.1/ Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

III.1.2/ Établir la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} v_n.$$

III.2/ Estimation intégrale de δ_n .

III.2.1/ Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n , l'égalité

$$(1) \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

III.2.2/ Dédurre de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n .

III.3/ Sur la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$.

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$.

La convergence est-elle absolue ?

III.4/ Sur la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.1/ Justifier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

III.4.2/ On pose $A = - \int_0^1 e^x \ln(1-x) dx$.

III.4.2.1/ Justifier la convergence de l'intégrale impropre A .

III.4.2.2/ Montrer que, pour tout réel x de $] -1, 1[$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

III.4.2.3/ Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$ en fonction de l'intégrale A .

III.4.3/ Justifier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$$

et expliciter sa somme en fonction de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

III.4.4/ Expliciter un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ vérifiant

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{600}.$$

Fin de l'énoncé.