

Corrigé du huitième devoir à la maison

I.1.1. Sans difficulté,

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, & \alpha_1 = 1 \cdot 1 - 1 = 0, \\ \alpha_2 = 2 \cdot 0 + 1 = 1, & \alpha_3 = 3 \cdot 1 - 1 = 2, \\ \alpha_4 = 4 \cdot 2 + 1 = 9. \end{cases}$$

I.1.2. Prouvons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$: « $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ ».

L'initialisation est assurée avec α_2 , α_3 et α_4 ci-dessus. Supposons $P(n)$ vraie pour $n \geq 2$. D'une part, comme somme et produit d'entiers (relatifs), α_{n+1} est entier (relatif). D'autre part,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \\ &\geq (n+1) \cdot 1 - 1 = n \geq 1, \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{N}$.

I.2.1. On a

$$\begin{cases} \beta_0 = 0! \cdot \frac{(-1)^0}{0!} = 1, & \beta_1 = 1(1-1) = 0, \\ \beta_2 = 2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \right) = 1, \\ \beta_3 = 6 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 2, \\ \beta_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 9. \end{cases}$$

I.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\underline{\beta_n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \in \mathbb{Z}.$$

I.2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a clairement

$$\underline{\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (-1)^{n+1}}.$$

I.2.4. Les suites α et β ont les mêmes premiers termes et vérifient la même relation de récurrence. Alors, d'après le principe de récurrence, $\alpha = \beta$.

I.3.1. ρ_n est le reste d'une série alternée. Comme la suite $(1/k!)_{k \geq 0}$ décroît vers 0, d'après le théorème spécial des séries alternées, ρ_n est du signe de son premier terme : $\text{sgn}(\rho_n) = (-1)^{n+1}$.

I.3.2. Toujours d'après le théorème spécial des séries alternées,

$$|\rho_n| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\underline{\text{donc } n! |\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}}.$$

D'après I.3.1, ρ_n est non nul. Or

$$\rho_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \rho_{n+1}$$

donc $\rho_n \neq \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et l'inégalité est stricte.

I.3.3. On a $|n!e^{-1} - \beta_n| = n! |\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$, donc d'après l'énoncé,

$$\underline{|\beta_n \text{ est l'entier le plus proche de } n!e^{-1}|}.$$

I.4.1. D'après le cours (de première année), f existe et est unique : c'est la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$\underline{f(x) = f(0) \exp \left(\int_0^x \frac{t}{1-t} dt \right) = \frac{e^{-x}}{1-x}}.$$

I.4.2. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ comme produit de fonctions qui le sont.

I.4.3. Pour $x \in] -1, 1[$, $(1-x)f(x) = e^{-x}$.

En dérivant $n+1$ fois ce produit grâce à la formule de Leibniz, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k}{dx^k} (1-x) f^{(n+1-k)}(x) = \frac{d^{n+1}(e^{-x})}{dx^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$\underline{(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}}.$$

I.4.4. Pour $x = 0$, on a

$$f^{(n+1)}(0) - (n+1)f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}.$$

Comme en outre $f(0) = 1$, les suites $(f^{(n)}(x))$ et β ont les mêmes premiers termes et vérifient les mêmes propriétés de récurrence, donc comme en I.2.4, elles sont égales.

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \beta_n}.$$

II.1. La seule permutation à un élément est l'identité, donc $\gamma_1 = 0$.

Il y a deux permutations à deux éléments, l'identité qui laisse les éléments fixes, et la transposition τ_{12} qui les permute donc $\gamma_2 = 1$.

II.2. Voici les permutations à trois éléments, notées matriciellement et par ordre décroissant du nombre de points fixes :

— l'identité, à trois points fixes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

— les transpositions, avec un point fixe,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

— les permutations circulaires, sans point fixe,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\text{Ainsi, } \gamma_3 = 2}.$$

II.3.1. Si $\tau \in \mathcal{S}_4$ a deux points fixes, les deux autres points de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ s'envoient l'un sur l'autre, et τ est une transposition. Il suffit de choisir les deux points fixes dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$: il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

Il y a 6 transpositions dans $\mathcal{S}_4$.

II.3.2. On choisit un point fixe : il y a 4 choix possibles. Pour chaque choix, les trois points restants sont non fixes, et d'après II.2, il y a deux permutations possibles de ces trois éléments.

Il y a $4 \cdot 2 = 8$ permutations de $\mathcal{S}_4$ à un point fixe.

II.3.3. Si une permutation τ de $\mathcal{S}_4$ a trois points fixes, le quatrième l'est aussi et τ est l'identité. Une permutation de $\mathcal{S}_4$ sans point fixe n'est donc pas l'identité, ni l'une des 6 transpositions (cf. II.3.1), ni l'une des 8 permutations de II.3.2. Comme $\mathcal{S}_4$ compte $4! = 24$ éléments, il y a $24 - 1 - 6 - 8 = 9$ permutations sans point fixe, donc $\gamma_4 = 9$.

II.4.1. $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$

II.4.2. Comme en II.3.2, on choisit k points parmi n : il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles. Sur les $n - k$ points restants, on effectue une permutation sans point fixe : il y en a γ_{n-k} .

Ainsi, il y a $\binom{n}{k} \gamma_{n-k}$ permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes.

II.4.3. Comme en II.2, on répartit les permutations de $\mathcal{S}_n$ par leur nombre de points fixes $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Au total, il y en a $n!$ donc

$$\underline{n!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \gamma_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k.$$

II.5.1. Soit $x \in]-1, 1[$. Comme $\gamma_n \leq n!$,

$$\left| \frac{\gamma_n}{n!} x^n \right| \leq |x|^n.$$

Or $\sum x^n$ converge absolument comme série géométrique de raison $|x| < 1$, donc $\sum \gamma_n x^n / n!$ converge absolument. Donc $g(x)$ est bien défini.

II.5.2. Soit $x \in]-1, 1[$. Effectuons le produit de Cauchy de la série définissant $g(x)$ et de celle de e^x donnée par l'énoncé. C'est possible car ces deux séries convergent absolument. On a

$$\begin{aligned} \underline{h(x)} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{\gamma_p}{p!} x^p \frac{x^{n-p}}{(n-p)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \gamma_p \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \underline{\frac{1}{1-x}}. \end{aligned}$$

II.5.3. Il s'ensuit que

$$\underline{g(x) = e^{-x} h(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = f(x).}$$

II.5.4. Comme $f = g$ et que g est la somme d'une série entière, f est développable en série entière. Alors, par unicité du développement en série entière de f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = f^{(n)}(0)$, donc

$$\underline{\beta = \gamma.}$$

II.5.5. Du coup, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\gamma_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0,$$

et $\sum \gamma_n / n!$ diverge grossièrement. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty.$$

On ne peut ni définir ni prolonger g en 1.

II.5.6. Pour les mêmes raisons, $\sum (-1)^n \gamma_n / n!$ diverge grossièrement. Mais ici,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{e}{2}.$$

On ne peut définir g en -1 mais on peut la prolonger par $e/2$.

II.5.7. Comme $\beta = \gamma$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1} = (n+1)\gamma_n + (-1)^{n+1}.$$

d'où l'on tire à la machine $\gamma_8 = 14\,833$.

III.1.1. Pour tout $x \in [0, 1]$, $1 \leq e^x \leq e$, donc

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx \leq J_n \leq \int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.}$$

III.1.2. La série $\sum v_n$ est clairement alternée et (J_n) tend vers 0 en décroissant car pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, $x^{n+1} \leq x^n$. D'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum v_n$ converge.

III.2.1. C'est la formule de Taylor avec reste intégral pour l'exponentielle en 0.

III.2.2. En appliquant (1) en $x = -1$,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$$

d'où, en posant $x = 1 + t$,

$$\begin{aligned} \underline{\delta_n} &= \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t dt \\ &= (-1)^n \int_1^0 x^n e^{x-1} dx = \underline{e^{-1} v_n}. \end{aligned}$$

III.3. D'après III.1.2, $\sum \delta_n$ converge.

Par ailleurs, d'après III.1.1,

$$|\delta_n| = e^{-1} J_n \geq \frac{e^{-1}}{n+1}.$$

Or $\sum 1/(n+1)$ diverge, donc $\sum |\delta_n|$ diverge.

III.4.1. D'après III.1.1, on a

$$\frac{|\delta_n|}{n} = \frac{e^{-1} J_n}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum 1/n^2$ converge, donc $\sum |\delta_n|/n$ converge.

III.4.2.1. La fonction $\varphi : x \mapsto e^x \ln(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$. De plus, le changement de variable $t = 1 - x$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1[$ dans $]0, 1]$, donc la fonction φ est intégrable sur $[0, 1[$ si et seulement si la fonction $\psi : t \mapsto e^{1-t} \ln t$ l'est sur $]0, 1]$. Or $|\psi(t)| \sim_0 -e \ln t$, où $-\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$. Donc ψ est intégrable sur $]0, 1]$ et φ l'est sur $[0, 1[$.

Ainsi, A converge (absolument).

III.4.2.2. C'est du cours.

III.4.2.3. Voici un calcul formel, qui sera justifié ensuite.

$$\begin{aligned} (1) \quad \underline{A} &= \int_0^1 e^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} dx \\ (2) \quad &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n e^x dx \\ (3) \quad &= e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}. \end{aligned}$$

D'après III.4.2.2, l'égalité (1) est justifiée. En outre, on a vu en III.3 que $|\delta_n| = e^{-1} J_n$ donc (3) est justifiée. Par ailleurs, les fonctions $x \mapsto e^x x^n/n$ sont continues et intégrables sur $[0, 1[$ et d'après (1), leur série converge simplement sur $[0, 1[$ et sa somme, $x \mapsto -e^x \ln(1-x)$ y est continue. Enfin,

$$\int_0^1 \left| e^x \frac{x^n}{n} \right| dx = e \frac{|\delta_n|}{n},$$

et d'après III.4.1, $\sum |\delta_n|/n$ converge. Alors, l'égalité (2) est justifiée.

III.4.3. La série de l'énoncé converge absolument car

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{n!}$$

et $\sum 1/n!$ converge.

À l'aide du changement de variable rencontré en III.4.2.1,

$$A = - \int_0^1 e^{1-t} \ln t dt.$$

En développant e^{-t} , et en permutant comme ci-dessus (la justification est laissée au lecteur :-),

$$\begin{aligned} A &= -e \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \ln t dt \\ &= -e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^n \ln t dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, ce qui est autorisé car les termes manipulés ont un sens,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n \ln t dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $A = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$. D'après III.4.2.3,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

III.4.4. On cherche à approcher

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$$

par une somme partielle de rang N . Le reste mesure l'erreur commise. Or

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!(N+2)^2} \right|.$$

Il suffit alors de choisir N tel que

$$\frac{1}{(N+1)!(N+2)^2} \leq \frac{1}{600}.$$

En prenant $N = 3$, on a

$$\frac{1}{(N+1)!(N+2)^2} = \frac{1}{4! \cdot 25} = \frac{1}{600}.$$

Donc un rationnel p/q convenable est

$$\left| \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} = \frac{229}{288} \right|$$