Premier devoir surveillé

Durée 4 h

Les calculatrices sont interdites.

Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux. Mais leurs résultats pourront être librement utilisés par tous.

Questions de cours [E3A23]

1. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta}$.

2. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

3.1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge.

3.2. Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge. Sa somme sera notée T_p.

3.3. Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

3.4. Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

Premier exercice [E3A19]

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

2.1. Prouver que l'on a :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

2.2. En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

2.3. En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = e^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.

4. On pose pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

4.1. Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

4.2. Prouver que la suite (s_n) est bornée.

4.3. Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + \mathrm{o}(1).$$

Deuxième exercice [CS21]

A – Symbole de Pochhammer

On définit le symbole de Pochhammer, pour tout nombre réel a et tout entier naturel n par

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a\,(a+1)\cdots(a+n-1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(a+k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 1. Si a est un entier négatif ou nul, justifier que la suite $([a]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Q 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $[a]_{n+1} = a\,[a+1]_n$.

Q 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $[a]_n$ à l'aide de factorielles lorsque $a \in \mathbb{N}^*$.

B – Fonction hypergéométrique confluente

Soient deux nombre réels a et c tels que $c \notin -\mathbb{N}$.

Q 4.* Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$\text{(B.1)} \qquad x\,y''(x) + (c-x)\,y'(x) - a\,y(x) = 0.$$

On exprimera ces solutions à l'aide du symbole de Pochhammer et on précisera la structure algébrique de leur ensemble.

On note $M_{a,c}$ la solution de l'équation $(B.1)$ vérifiant $M_{a,c}(0) = 1$. Cette fonction est appelée *fonction hypergéométrique confluente* associée au couple (a,c).

C – Les polynômes de Laguerre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout nombre réel x,

$$\varPhi_n(x) = e^{-x}x^n \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\varPhi_n^{(n)}(x).$$

Q 5. Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Q 6. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n. Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\,x^k.$$

Q 7. Pour tout nombre réel x, exprimer $\varPhi_n^{(n)}(x)$ et $\varPhi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L_n'(x)$.

Q 8. Utiliser l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1} x\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}},$$

que l'on justifiera, pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L_n'(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 9. Utiliser l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1} \Phi_{n+1}^{(1)}(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 10. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle

$$\text{(C.1)} \qquad x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0.$$

Q 11.* Montrer que L_n est une fonction hypergéométrique confluente.

Troisième exercice [E3A16]

Le but de cet exercice est de donner, dans la partie I, quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie II, la vitesse de convergence de ces quatre séries.

Partie I

1. (a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n\,2^n}$ est convergente.

(b)* En utilisant le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} = \ln(2).$$

2. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,2^n}$ est convergente. Que vaut sa somme ?

3. (a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

(b)* Peut-on encore utiliser le développement en série entière précédent pour prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)\,?$$

4. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1\times 3 \cdots \times (2n-1)}{n\,2^{n+1}\,n!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n\,2^{n+1}\,n!}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{(2n)!}{n\,2^{2n+1}(n!)^2}.$$

(b) Rappeler la formule de Stirling.

(c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente. On admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2).$$

Partie II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k}, \qquad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \qquad V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)\,2^k}.$$

R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première partie. Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}.$$

(a) Calculer U_n. Écrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)}.$$

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} = \mathrm{o}(R_n)$.

(d) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n\,2^n}$.

2. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1]\,,\ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{(-1)^n}{2\,(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$.

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant N,\ \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,k^{\frac{3}{2}}} \leqslant a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,k^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(c)* Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant T_n \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(d)* Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi\,n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2\,2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifier vos réponses.