Corrigé du premier devoir surveillé

Questions de cours

Voir le cours (si :-)

Premier exercice

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ croît.}}$

Par l'absurde, si elle était majorée, elle convergerait vers une limite $\ell \geqslant u_0 > 0$ telle que $\ell = \ell + \ell^2$ (en passant à la limite dans la relation de récurrence), donc on aurait $\ell = 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas majorée et diverge vers } +\infty.}$

2. La suite (v_n) est bien définie puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 > 0$.

2.1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}
&v_{n+p+1} - v_{n+p} \\
&= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^{n+p}} \ln(u_{n+p}) \\
&= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(u_{n+p} + u_{n+p}^2) - \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(u_{n+p}^2) \\
&= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right).
\end{aligned}$$

Comme $0 < u_n \leqslant u_{n+p}$ et par croissance de ln, on en déduit que

$$\boxed{0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

2.2. En ajoutant ces encadrements, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{p=0}^{k} (v_{n+p+1} - v_{n+p}) = v_{n+k+1} - v_n \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

2.3. Cette minoration évaluée en $k = 0$ montre que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ croît strictement.}}$

Et la majoration évaluée en $n = 0$ donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_{k+1} \leqslant v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right),$$

ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est majorée.}}$
$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n) \text{ converge}}$
.

3. En faisant tendre k vers $+\infty$ dans la question 2.2, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant L - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

ou encore,

$$0 \leqslant 2^n (L - v_n) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right),$$

et par croissance de l'exponentielle,

$$1 \leqslant \exp(2^n (L - v_n)) = \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Or avec la question 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc avec le théorème d'encadrement des suites, $\lim_{n\to+\infty} t_n/u_n = 1$ et $\boxed{u_n \sim_{+\infty} t_n.}$

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n = t_n - s_n$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ donc $t_{n+1} - s_{n+1} = u_n + t_n^2 - 2\,t_n\,s_n + s_n^2$. Or $t_n^2 = t_{n+1}$, donc $\boxed{s_{n+1} = s_n^2 + (2\,s_n - 1)\,u_n.}$

4.2. Grâce au dernier encadrement de la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant t_n/u_n \leqslant 1 + 1/u_n$, d'où $u_n \leqslant t_n \leqslant u_n + 1$, ou encore $0 \leqslant s_n \leqslant 1$.
$\boxed{\text{La suite } (s_n) \text{ est bornée.}}$

4.3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 4.1, sachant que u_n est non ul,

$$s_n - \frac{1}{2} = \frac{s_{n+1} - s_n^2}{2\,u_n}.$$

D'après la question 4.2, $0 \leqslant s_n \leqslant 1$ d'où $0 \leqslant s_{n+1} \leqslant 1$ et $0 \leqslant s_n^2 \leqslant 1$. Alors

$$\left|s_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{|s_{n+1}| + |s_n^2|}{2\,u_n} \leqslant \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $t_n - u_n = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$, ou encore $\boxed{u_n = t_n - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).}$

Deuxième exercice

Convention. Convenons que si un produit est vide, c'est-à-dire si l'ensemble de ses indices est vide, on lui attribue la valeur 1. Avec cette convention, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a + k).$$

En effet, c'est la définition quand $n \geqslant 1$, et

$$[a]_0 = \prod_{k=0}^{-1} (a + k) = 1$$

avec la convention d'écriture proposée.

Q1. Si $a \in -\mathbb{N}$, $n = -a+1 \in \mathbb{N}^*$ et
$$[a]_n = a\,(a+1)\cdots(a+(-a+1)-1) = 0.$$
De plus, pour tout entier $p \geqslant n+1$,
$$[a]_p = \prod_{k=0}^{p-1}(a+k) = [a]_n \prod_{k=n}^{p-1}(a+k) = 0.$$
Si a est un entier négatif ou nul, la suite $([a]_n)$ est nulle à partir du rang $-a+1$.

Q2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$[a]_{n+1} = \prod_{k=0}^{n}(a+k) = a\prod_{k=1}^{n}(a+k) = a\prod_{k=0}^{n-1}(a+1+k) = a\,[a+1]_n.$$

Q3. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a
$$[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) = \prod_{k=a}^{a+n-1} k = \frac{\prod_{k=1}^{a+n-1} k}{\prod_{k=1}^{a-1} k} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$
Commentaire. On a utilisé la convention du début : pour $a=1$, $\prod_{k=1}^{a-1} k = 1 = (a-1)!$

Q4.* Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que (B.1) admette une solution développable en série entière
$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n,$$
de rayon de convergence $R>0$. y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et l'on peut dériver terme à terme : pour tout $x \in\,]-R,R[$,
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n,$$
$$y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^{n-1},$$
où l'on a choisi des formes adaptées aux calculs qui suivent. En reportant dans le premier membre de (B.1),
$$\begin{aligned}
&x\,y''(x) + (c-x)\,y'(x) - a\,y(x)\\
&= x\,y''(x) + c\,y'(x) - x\,y'(x) - a\,y(x)\\
&= x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^{n-1} + c\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n\\
&\quad - x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} - a\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^n + c\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n\\
&\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - a\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^n + c\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n\\
&\quad - \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - a\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)\,(n+c)\,a_{n+1} - (n+a)\,a_n\big)\,x^n.
\end{aligned}$$
Donc y est solution de (B.1) sur $]-R,R[$ si et seulement si pour tout $x \in\,]-R,R[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)\,(n+c)\,a_{n+1} - (n+a)\,a_n\big)\,x^n = 0.$$
Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, cela entraine que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)\,(n+c)\,a_{n+1} - (n+a)\,a_n = 0,$$
ou encore, puisque $c \notin -\mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{n+a}{(n+1)\,(n+c)}\,a_n.$$
Ainsi, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en supposant que $a_k \neq 0$,
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a+k}{(k+1)\,(c+k)}.$$
En multipliant membre à membre,
$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a+k}{(k+1)\,(c+k)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(c+k)},$$
ou encore
$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{[a]_n}{n!\,[c]_n}.$$
Synthèse. Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. Considérons la série entière
$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$$
où pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{[a]_n}{n!\,[c]_n}\,a_0.$$
Si $a_0 = 0$ ou si $a \in -\mathbb{N}$, d'après la question Q1, la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang. Cela signifie que y est une fonction polynomiale, donc $R = +\infty$.

Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Alors
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+a}{(n+1)\,(n+c)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
et d'après la règle de d'Alembert, $R = +\infty$.

Cela valide la synthèse.

Conclusion. L'équation (B.1) admet des solutions développable en série entière sur $\mathbb{R}$: elles forment une droite vectorielle engendrée par la fonction
$$M_{a,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[a]_n}{n!\,[c]_n}\,x^n.$$

Q5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'abord,

$$\Phi_0(x) = e^{-x}, \qquad \Phi_1(x) = e^{-x}\,x,$$
$$\Phi_2(x) = e^{-x}\,x^2, \qquad \Phi_3(x) = e^{-x}\,x^3.$$

Dérivons, avec la formule de Leibniz bien-sûr :

$$\boxed{L_0(x) = \frac{e^x}{0!}\,\Phi_0(x) = e^x\,e^{-x} = 1,}$$
$$\boxed{L_1(x) = \frac{e^x}{1!}\,\Phi_1'(x) = e^x\,e^{-x}\,(1-x) = 1-x,}$$
$$\boxed{\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{e^x}{2!}\,\Phi_2''(x) = \frac{e^x}{2}\,e^{-x}\,(2 - 2\cdot 2x + x^2) \\ &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}}$$
$$\boxed{\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{e^x}{3!}\,\Phi_3'''(x) \\ &= \frac{e^x}{6}\,e^{-x}\,(6 - 3\cdot 6x + 3\cdot 3x^2 - x^3) \\ &= 1 - 3x + 3\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}}$$

Q6. Avec la formule de Leiniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sachant que pour $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{\mathrm{d}^p x^n}{\mathrm{d}x^p} = n(n-1)\cdots(n-p+1)\,x^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}\,x^{n-p},$$

on a

$$\boxed{\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}\,x^n) \\ &= \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k e^{-x}}{\mathrm{d}x^k}\,\frac{\mathrm{d}^{n-k} x^n}{\mathrm{d}x^{n-k}} \\ &= \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,e^{-x}\,\frac{n!}{k!}\,x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}}$$

Où l'on voit bien que $\boxed{L_n \text{ est de degré } n.}$

Q7. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\Phi_n^{(n)}(x) = n!\,e^{-x}\,L_n(x).}$$

Et en dérivant,

$$\boxed{\Phi_n^{(n+1)}(x) = n!\,e^{-x}\,(L_n'(x) - L_n(x)).}$$

Q8. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\Phi_{n+1}(x) = e^{-x}\,x^{n+1} = x\,e^{-x}\,x^n = x\,\Phi_n(x).}$$

Alors, avec la formule de Leibniz et sachant que les dérivées de x d'ordre supérieur ou égal à 2 sont nulles,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^{n+1} x\,\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}} \\ &= x\,\Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\cdot 1\cdot \Phi_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Avec la question Q7, on en tire que

$$\begin{aligned} &(n+1)!\,e^{-x}\,L_{n+1}(x) \\ &\quad = x\,n!\,e^{-x}\,(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)\,n!\,e^{-x}\,L_n(x), \end{aligned}$$

et en simplifiant par $(n+1)!\,e^{-x}$ qui ne s'annule pas,

$$\boxed{L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}\,L_n'(x).}$$

Q9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (\Phi_{n+1}')^{(n+1)}(x).$$

D'une part, avec la question Q7,

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (n+1)!\,e^{-x}\,(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}'(x) &= e^{-x}\,((n+1)\,x^n - x^{n+1}) \\ &= (n+1)\,\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x), \end{aligned}$$

donc, toujours avec la question Q7,

$$\begin{aligned} &(\Phi_{n+1}')^{(n+1)}(x) = (n+1)\,\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &\quad = (n+1)\,(n!\,e^{-x}\,(L_n'(x) - L_n(x))) \\ &\qquad - (n+1)!\,e^{-x}\,L_{n+1}(x) \\ &\quad = (n+1)!\,e^{-x}\,(L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Alors, en simplifiant par $(n+1)!\,e^{-x}$ qui ne s'annule toujours pas,

$$L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x) = L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x).}$$

Q10. En dérivant l'expression de la question Q8, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_{n+1}'(x) = &-\frac{1}{n+1}\,L_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n'(x) \\ &+ \frac{1}{n+1}\,L_n'(x) + \frac{x}{n+1}\,L_n''(x). \end{aligned}$$

Avec la question Q9 et en passant tout dans le même membre,

$$\frac{x}{n+1}\,L_n''(x) + \frac{1-x}{n+1}\,L_n'(x) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)L_n(x) = 0,$$

d'où

$$\boxed{x\,L_n''(x) + (1-x)\,L_n'(x) + n\,L_n(x) = 0.} \tag{C.1}$$

Q11.* L'équation (C.1) est identique à l'équation (B.1) avec $a = -n$ et $c = 1$. En outre, avec la question Q6, on voit que $L_n(0) = 1$. Comme L_n est polynomiale, elle est développable en série entière, donc elle appartient à la droite vectorielle déterminé à la question Q4. Alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L_n = M_{-n,1}$ (avec les notations de la question Q4). Or $L_n(0) = 1 = M_{-n,1}(0)$, donc $\alpha = 1$ et $L_n = M_{-n,1}$.

$\boxed{L_n \text{ est bien une fonction hypergéométrique confluente.}}$

Troisième exercice

I.1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n\,2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Or $\sum_{n\geqslant 1} 1/2^n$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0,1[$. Donc par majoration,

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,2^n} \text{ converge.}$$

I.1.b.* Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est

$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Il a pour rayon de convergence 1. En particulier, pour $x = -\frac{1}{2}$,

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1/2)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

I.2. Sur le même principe, $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ donc toujours par majoration

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,(n+1)\,2^n} \text{ converge.}$$

On décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^n}\end{aligned}$$

Cette séparation est licite car les deux nouvelles séries convergent, dont le terme général est majoré par $1/2^n$ à chaque fois. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \ln(2).\end{aligned}$$

I.3.a. D'après le théorème spécial des séries alternées,

la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

car la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant.

I.3.b.* Grâce au développement en série entière précédent, en remplaçant x par 1, on aimerait pouvoir dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(1+1) = \ln(2).$$

Mais justement, le rayon de convergence de ce développement en série entière est 1, donc il n'est à priori valide que pour $x \in \,]-1,1[$.

Cependant, on vient de voir que le développement en série entière converge pour $x = 1$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, grâce au théorème spécial des séries alternées, on peut majorer le reste pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1-1} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, nous venons de majorer le reste du développement en série entière indépendamment de x, par un terme qui tend vers 0. Alors, la suite des restes, comme suite de fonctions, converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle, ce qui signifie que le développement en série entière, comme série de fonctions, converge uniformément sur $[0,1]$. Donc sa somme est une fonction continue sur $[0,1]$: en particulier, on peut passer à la limite en 1^- :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2).\end{aligned}$$

I.4.a. En multipliant par les termes pairs qui manquent, on a

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2\,k+1)}{n\,2^{n+1}\,n!} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2\,k)}{\prod_{k=1}^{n}(2\,k)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}((2\,k-1)\,(2\,k))}{n\,2^{n+1}\,n!\,2^n \prod_{k=1}^{n} k} \\ &= \frac{(2\,n)!}{n\,2^{2n+1}\,(n!)^2}.\end{aligned}$$

I.4.b. La formule de Stirling affirme que

$$n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\,e^{-n}.$$

I.4.c. En l'utilisant, on a, quand n tend vers $+\infty$,

$$a_n \sim \frac{\sqrt{2\,\pi\,2\,n}\,(2\,n)^{2n}\,e^{-2n}}{n\,2^{2n+1}\,(\sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\,e^{-n})^2} = \frac{1}{2\,\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}.$$

Or $\sum 1/n^{3/2}$ converge comme série de Riemann où $3/2 > 1$. Donc par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

II.1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme somme d'une série géométrique,

$$U_n = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k.$$

II.1.b. Alors,

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,(U_{k-1} - U_k)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}\\ &= \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)}.\end{aligned}$$

Là encore, les calculs réalisés sont permis, car toutes les séries manipulées convergent, vu que $U_k = 1/2^k$.

II.1.c. On a, sachant que $k+1 \geqslant n$ et que $U_k = 1/2^k$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,n}\\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k} = \frac{R_n}{n} = \mathrm{o}(R_n).\end{aligned}$$

II.1.d. Ainsi, $\dfrac{U_n}{n+1} = R_n + \mathrm{o}(R_n) \sim R_n$.

Or $\dfrac{U_n}{n+1} \sim \dfrac{U_n}{n} = \dfrac{1}{n\,2^n}$, donc $R_n \sim \dfrac{1}{n\,2^n}$.

II.2.a. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, $-t \neq 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\\ &= \frac{1}{1+t} - (-1)^n\, \frac{t^n}{1+t}.\end{aligned}$$

II.2.b. Alors,

$$(-1)^n \frac{t^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k.$$

En intégrant sur $[0,1]$, et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}&(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t\\ &= \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.\end{aligned}$$

Alors, d'après I.3.b, et par définition de S_n,

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_n.\end{aligned}$$

II.2.c. Faisons une intégration par parties, licite car toutes les fonctions maniées sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}S_n &= (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{1+t}\right]_0^1\\ &\quad + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(-1)^n}{2\,(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

II.2.d. Comme $\dfrac{(-1)^n}{2\,(n+1)} \sim \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$, ce que demande l'énoncé signifie que dans l'expression ci-dessus, le second terme est négligeable devant le premier. Pour le prouver, il suffit de montrer que l'intégrale tend vers 0 avec n. Or

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n},$$

$$\text{donc } S_n \sim \frac{(-1)^n}{2\,n}.$$

II.3.a. D'après I.4.c, $a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\,2\sqrt{\pi}\,n^{3/2} = 1$. En traduisant cette limite avec les epsilon, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$,

$$\left|a_k\,2\sqrt{\pi}\,k^{3/2} - 1\right| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore $\quad -\varepsilon \leqslant a_k\,2\sqrt{\pi}\,k^{3/2} - 1 \leqslant \varepsilon,$

ou aussi $\quad 1-\varepsilon \leqslant a_k\,2\sqrt{\pi}\,k^{3/2} \leqslant 1+\varepsilon,$

c'est-à-dire finalement,

$$\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}} \leqslant a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}.$$

II.3.b. La fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ décroit sur $[1,+\infty[$ donc pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}&\forall t \in [k-1,k]\,,\ \frac{1}{t^{3/2}} \geqslant \frac{1}{k^{3/2}},\\ &\forall t \in [k,k+1]\,,\ \frac{1}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{k^{3/2}},\end{aligned}$$

et en intégrant sur les segment respectifs,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}},$$
$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}},$$

ce qui donne, en regroupant,

$$\boxed{\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}.}$$

II.3.c.* La fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ car $3/2 > 1$. Donc les intégrales de l'énoncé convergent. De plus, pour tout $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}},$$
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}.$$

Alors, en sommant l'encadrement précédent,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}.$$

Et avec la question II.4.a, d'une part

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}},$$

et d'autre part,

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}},$$

ce qui donne l'encadrement voulu.

II.3.d.* On a

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_{n}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{n}},$$
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Donc d'une part, $T_n\sqrt{\pi n} \leqslant 1+\varepsilon$ et d'autre part,

$$T_n\sqrt{\pi n} \geqslant (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, il existe un rang N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \geqslant 1-\varepsilon.$$

Alors, pour $n \geqslant \max\{N, N_1\}$,

$$T_n\sqrt{\pi n} \geqslant (1-\varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \geqslant 1 - 2\varepsilon,$$

donc $\qquad 1 - 2\varepsilon \leqslant T_n\sqrt{\pi n} \leqslant 1 + \varepsilon \leqslant 1 + 2\varepsilon$

et $\qquad \left|T_n\sqrt{\pi n} - 1\right| \leqslant 2\varepsilon.$

Comme ε est arbitraire, 2ε l'est aussi, donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n\sqrt{\pi n} = 1$$

ce qui signifie que $\boxed{T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$

II.4. Utilisons la technique et les notations de la question 1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1} - U_k}{k\,(k+1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k\,(k+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{(k+1)\,(k+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} \\
&= \frac{U_n}{(n+1)\,(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{U_n}{(n+1)\,(n+2)} - 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)\,(k+2)}.
\end{aligned}$$

Or, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)\,(k+2)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)\,n} = \frac{V_n}{n} \ll V_n.$$

En outre $\dfrac{U_n}{(n+1)\,(n+2)} \sim \dfrac{U_n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2\,2^n}$. Donc

$$\boxed{V_n \sim \frac{1}{n^2\,2^n}.}$$

II.5. Au voisinage de $+\infty$, on a donc

$$V_n \ll R_n \ll |S_n| \ll T_n.$$

Donc la série de I.2 converge le plus rapidement, et la série de I.4 converge le moins rapidement. À titre d'illustration, si l'on désire une valeur approchée à 10^{-3} près de la somme de chacune des séries, il faudra choisir n de sorte que $T_n \approx 10^{-3}$, c'est-à-dire que $\sqrt{\pi n} \approx 10^3$, ou encore $n \approx \frac{1}{\pi} 10^6 \approx 300\,000$. Et pour l'autre série, on choisira n tel que $V_n \approx 10^{-3}$ c'est-à-dire $n^2\,2^n \approx 10^3$, soit $n = 6$, puisque $6^2 \cdot 2^6 = 9 \cdot 4 \cdot 64 = 9 \cdot 256 \geqslant 1\,000$ mais $5^2 \cdot 2^5 = 25 \cdot 32 = 800$. Où l'on comprend bien ce que signifie la vitesse de convergence.