Deuxième devoir surveillé

Durée : 4 heures
Les calculatrices sont interdites
Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux

Problème 1
Étude d'une famille de séries entières

[extrait de CCINP21]

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathscr{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q1. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q2. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathscr{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas* $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\alpha \in]1, +\infty[$.

Q3. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q4. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q5.* Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathscr{D}_\alpha$.

Q6. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

Partie II - Un logarithme complexe

Q7. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1 + x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$$

est convergente, on note :

$$S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}.$$

Q8. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(t z_0)$.

Q9. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q10. Prouver que g est définie et de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

Q11. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + t z_0} h(t).$$

Q12. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on considère l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t.$$

Q13. Justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q14. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall s \in \mathbf{R}_+^*, \ \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in]0, 1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1 - \alpha)$.

Q15. Prouver que, pour tout $x \in]0, 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q16. En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t.$$

Q17. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Problème 2
Phénomène de Gibbs

[extrait de CCP17]

Présentation générale

L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phénomène de Gibbs.

Partie I - Lemmes de Riemann-Lebesgue

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ désigne une fonction continue 2π-périodique telle que :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Q18. Si $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Q19. Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π-périodique et bornée sur $\mathbf{R}$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Q20.* Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Soient ε un réel strictement positif et g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leqslant \varepsilon$, montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que :

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\,|\beta-\alpha|\,\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|.$$

En déduire que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ continue par morceaux :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ et toute fonction continue $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$, il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

Q21. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\sin^2(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie II - L'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ soit bornée.

Q22. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{F(a)}{a}.$$

Q23. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente.

Q24.* Montrer que la fonction

$$\mathscr{L}(f) : x \in \mathbf{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

Q25.* On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathscr{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Q26. Soit $f : t \in \mathbf{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

1.* Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f)$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y = \frac{1}{x}$$

2. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifient :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[\,,\ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0.$$

Montrer que l'on peut prendre

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est une solution de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[\,,$$
$$\mathscr{L}(f)(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Q27. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Q28. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Q29. Déduire des questions précédentes que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Partie III - Phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par :

$$(E.1) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]0, \pi\right[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi. \end{cases}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R},\ S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Q30. En calculant la dérivée de S_n, montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, \pi],\ S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Q31. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Q32. En déduire que $S_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Q33. Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$. En utilisant le résultat de la question Q3, montrer que, pour tout $x \in \left]0, \pi/2\right]$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1.$$

Q34. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$, où f est la fonction définie par $(E.1)$.

Q35. Considérons les fonctions définies sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in \left]0, \pi\right], \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} \dfrac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2n})} & \text{si } x \in \left]0, \pi\right], \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\varphi(x)$.

Q36. Montrer que φ est continue sur $[0, \pi]$.

* En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

puis que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Q37. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

puis que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1.$$

Q38. Comparer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) > 0.17.$$

* En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\left]0, \pi/2\right[$.