Corrigé du deuxième devoir surveillé

Problème 1

Q1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Voici deux façons, sans ordre de préférence.

Première façon. Pour tout $n \geqslant 1$, $1/n^\alpha \neq 0$ et

$$\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha} \Big/ \frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc avec la règle de d'Alembert, $\boxed{R = 1.}$

Deuxième façon. Pour tout $n \geqslant 1$, $1 = n^\alpha \cdot (1/n^\alpha)$, donc d'après le cours, les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} x^n/n^\alpha$ ont même rayon de convergence. La première est une série géométrique usuelle, donc $\boxed{R = 1.}$

Q2. D'après la question Q1, f_α est au moins définie sur $]-1,1[$. Il reste à étudier la convergence en ± 1.

On sait que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Autrement dit, $1 \in \mathscr{D}_\alpha$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Étudions la série alternée $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n/n^\alpha$.

Si $\alpha > 1$, elle converge absolument : $-1 \in \mathscr{D}_\alpha$.

Si $\alpha \leqslant 0$, $1/n^\alpha \not\to 0$ donc elle diverge grossièrement : $-1 \notin \mathscr{D}_\alpha$.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, elle converge d'après le théorème spécial des séries alternées car la suite $(1/n^\alpha)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0 : $-1 \in \mathscr{D}_\alpha$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathscr{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \leqslant 0, \\ [-1,1[& \text{si } 0 < \alpha \leqslant 1, \\ [-1,1] & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}}$$

Q3. Ici $\alpha > 0$. Soit $x \in \mathscr{D}_\alpha$.

Si $x \geqslant 0$, $f_\alpha(x) \geqslant 0$, comme somme de termes positifs.

Si $x < 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x^n/n^\alpha$ est alternée et converge d'après le théorème spécial des séries alternées, donc sa somme est du signe de son premier terme, x : $f_\alpha(x) < 0$.

$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 \text{ et } x \in \mathscr{D}_\alpha,\ f_\alpha(x) \text{ est du signe de } x.}$

Q4. $$\boxed{\forall x \in\,]-1,1[\,,\ f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.}$$

Commentaire. Attention de ne pas oublier le premier terme de la série géométrique.

Puisqu'on peut dériver la somme d'une série entière terme à terme,

$$\boxed{\forall x \in\,]-1,1[\,,\ f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^n}$$

$$= x\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

$$= x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Enfin, en reconnaissant un développement en série entière usuel,

$$\boxed{\forall x \in\,]-1,1[\,,\ f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$$

Commentaire. On a vu dans un exemple du cours que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Donc l'expression ci-dessus est encore valide pour $x = -1$. Mais le jour du concours, il faut le redémontrer.

Q5*. Soit $\alpha > 1$. Bien-sûr, f_α est continue sur $]-1,1[$ comme somme d'une série entière. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$,

$$\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

où $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ converge, donc la série entière converge normalement sur $\mathscr{D}_\alpha$. En conséquence,

$\boxed{f_\alpha \text{ est continue sur } \mathscr{D}_\alpha.}$

Q6. Soient $\alpha \leqslant 1$, $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $n^\alpha \leqslant n$ donc

$$\frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \frac{x^n}{n}.$$

Ainsi, $f_\alpha(x) \geqslant f_1(x) = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty.}$$

Q7. $$\boxed{\forall x \in\,]-1,1[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.}$$

Q8. Sans difficulté, avec la règle de d'Alembert,

$\boxed{R = 1.}$

En reconnaissant un développement en série entière usuel, pour tout $x \in\,]-1,1[$, $S(x) = \ln(1+x)$, donc $\boxed{\exp(S(x)) = 1 + x.}$

Q9. Soit z_0 tel que $|z_0| < 1$.

Si $z_0 = 0$, la série de l'énoncé est nulle, donc $R_g = +\infty$.

Sinon, encore avec la règle de d'Alembert,

$$\left|(-1)^n\,\frac{z_0^{n+1}}{n+1} \Big/ (-1)^{n-1}\,\frac{z_0^n}{n}\right| = \frac{n}{n+1}\,|z_0| \to |z_0|$$

donc $R_g = 1/|z_0|$.

Avec la convention habituelle pour les rayons de convergence que $1/0 = +\infty$, dans tous les cas

$\boxed{R = 1/|z_0|.}$

Q10. Alors $R > 1$ car $|z_0| < 1$. Ainsi, $[0,1] \subset]-R, R[$. Comme somme d'une série entière,

g est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

De plus, on peut la dériver terme à terme :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n\, t^{n-1} = \frac{z_0}{1+z_0\, t},$$

où l'on a reconnu une somme géométrique de raison $z_0\, t$ et de premier terme z_0.

Q11. Bien-sûr, h est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions qui le sont, et $h' = g' \cdot \exp \circ g$. Avec la question précédente,

$$\forall t \in [0,1]\,,\ h'(t) = \frac{z_0}{1+z_0\, t}\, h(t).$$

Q12. Cette équation différentielle est bien définie sur $[0,1]$ et est sous forme normale, donc d'après le cours, l'espace de ses solutions sur $[0,1]$ est une droite vectorielle. De plus, on « voit » que la fonction $t \mapsto 1 + z_0\, t$ est une solution évidente sur $[0,1]$. Elle n'est pas la solution nulle, donc elle engendre la droite des solutions : en particulier, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \alpha\,(1 + z_0\, t)$. Or $h(0) = \exp(g(0)) = e^0 = 1$, donc $\alpha = 1$. Finalement,

$\forall t \in [0,1]\,,\ h(t) = 1 + z_0\, t.$

En particulier, pour $t = 1$, $\exp(S(z_0)) = 1 + z_0$.

Q13. Soient α et x dans $]0,1[$. La fonction $\varphi : t \mapsto x^t/t^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, quand $t \to 0$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1/t^\alpha$, et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable en 0, donc φ aussi. Et quand $t \to +\infty$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant x^t = \exp(t \ln(x))$. Or $\ln < x$ car $x < 1$, donc $t \mapsto \exp(t\ln(x))$ est intégrable en $+\infty$, donc φ aussi.

Ainsi, l'intégrale $I(x)$ converge.

Q14. On a $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\, e^{t\ln(x)}\, \mathrm{d}t$. En posant $u = -t\ln(x)$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{-\ln(x)}\right)^{-\alpha} e^{-u}\, \frac{\mathrm{d}u}{-\ln(x)} \\ &= (-\ln(x))^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} u^{1-\alpha-1}\, e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= (-\ln(x))^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

Q15. On reconnait la fonction φ considérée à la question Q13. Comme $\ln(x) < 0$, $t \mapsto e^{t\ln(x)}$ décroit sur $\mathbb{R}_+^*$. Et clairement, $t \mapsto 1/t^\alpha$ aussi. Comme produit de fonctions positives et décroissantes,

φ décroit sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q16. Par comparaison série-intégrale, la série $\sum_{n\geqslant 1} \varphi(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Et comme elles convergent toutes les deux, on a directement l'encadrement voulu :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Q17. D'une part, grâce à la question Q14,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = I(x) = (-\ln(x))^{\alpha-1}\,\Gamma(1-\alpha).$$

Or $-\ln(x) = -\ln(1-(1-x))$ et quand $x \to 1^-$, $-\ln(x) \sim 1 - x$, ou encore

$$\frac{-\ln(x)}{1-x} \to 1$$

donc

$$\left(\frac{-\ln(x)}{1-x}\right)^{\alpha-1} \to 1$$

et $(-\ln(x))^{\alpha-1} \sim (1-x)^{\alpha-1}$. Ainsi,

$$I(x) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$

D'autre part,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = I(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Ainsi, quand $x \to 1^-$, $\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ est négligeable devant $I(x)$ qui est un infiniment grand, et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\sim} I(x).$$

Finalement, au voisinage de 1^-,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$

Problème 2

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les fonctions qui interviennent sont de classe $\mathscr{C}^1$, réalisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\&= \left[f(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\\&= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme f' est continue sur le segment $[0,2\pi]$, elle y est bornée : pour tout $t \in [0,2\pi]$, $|f'(t)| \leqslant \sup_{[0,2\pi]} |f'|$; et bien-sûr $|\sin(nt)| \leqslant 1$, donc

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sup_{[0,2\pi]}|f'|\,\mathrm{d}t\\&= \frac{2\pi}{n}\sup_{[0,2\pi]}|f'| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.}$

Q19. Notons $\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ la primitive de φ qui s'annule en 0, laquelle existe car φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\Phi(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\\&= \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Alors, en posant $t = 2\pi + u$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$, et sachant que φ est 2π-périodique,

$$\begin{aligned}\Phi(x+2\pi) &= \int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(2\pi+u)\,\mathrm{d}u\\&= \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(x).\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est 2π-périodique.

Comme toute fonction périodique est bornée sur $\mathbb{R}$, Φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Comme f et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$, réalisons encore une intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\\&= \left[f(t)\,\frac{\Phi(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\Phi(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\\&= \frac{1}{n}\left(f(b)\Phi(nb) - f(a)\Phi(na) - \int_a^b f'(t)\Phi(nt)\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, f et f' y sont continues donc bornées : pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f|$ et $|f'(t)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f'|$. De même, Φ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\Phi(t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |\Phi|$. Alors

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&= \frac{1}{n}\left|f(b)\Phi(nb) - f(a)\Phi(na) - \int_a^b f'(t)\Phi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \frac{1}{n}\bigg(|f(b)|\,|\Phi(nb)| + |f(a)|\,|\Phi(na)|\\&\qquad + \int_a^b |f'(t)|\,|\Phi(nt)|\,\mathrm{d}t\bigg)\\&\leqslant \frac{1}{n}\left(2\sup_{[a,b]}|f|\sup_{\mathbb{R}}|\Phi| + \int_a^b \sup_{[a,b]}|f'|\sup_{\mathbb{R}}|\Phi|\,\mathrm{d}t\right)\\&= \frac{\sup_{\mathbb{R}}|\Phi|}{n}\left(2\sup_{[a,b]}|f| + (b-a)\sup_{[a,b]}|f'|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.}$

Q20.* Soit $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé : pour tout $t \in [\alpha,\beta]$,

$$|h(t) - g(t)| \leqslant \sup_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leqslant \varepsilon.$$

D'une part,

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&= \left|\int_\alpha^\beta (h(t) - g(t))\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \int_\alpha^\beta |h(t) - g(t)|\,|\varphi(nt)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme φ est bornée sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est 2π-périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\varphi(t)| \leqslant M$ en posant $M = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$. Alors

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \int_\alpha^\beta \varepsilon M\,\mathrm{d}t = \varepsilon M\,(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

D'autre part, en minorant par la seconde inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\geqslant \left|\,\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\,\right|\\&\geqslant \left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Alors
$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon M(\beta-\alpha),$$
ou encore
$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(\beta-\alpha)\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|.}$$

Supposons f continue par morceaux sur $[a,b]$: il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ soit continue et se prolonge en une fonction continue sur $[a_i,a_{i+1}]$, que l'on notera $\widetilde{f}_i$. Par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux,
$$\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t.$$
Comme il s'agit d'une somme finie, pour montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0,$$
il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Soit $i \in [\![0,p-1]\!]$. Prouver la limite précédente revient à prouver que
$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$
Soit donc $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a_i,a_{i+1}]$ vers $\widetilde{f}_i$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\widetilde{f}_i - P_k\|_\infty^{[a_i,a_{i+1}]} = 0$, ou encore
$$\forall\eta>0, \exists K\in\mathbb{N}, \forall k\geqslant K,\ \sup_{[a_i,a_{i+1}]} |\widetilde{f}_i - P_k| \leqslant \eta.$$
Utilisons le début de la question pour $\alpha = a_i$, $\beta = a_{i+1}$, $h = \widetilde{f}_i$, $g = P_k$ et $\varepsilon = \eta$ (l'ε du début de la question, pas celui que l'on vient récemment d'introduire) :
$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\,(a_{i+1}-a_i)\,\eta + \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|.$$
Choisissons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2\,(M+1)\,(a_{i+1}-a_i)}$, avec l'$\varepsilon$ récemment introduit. Ce choix est permis puisque η est quelconque ; il est purement cosmétique, et il est motivé par le fait qu'alors
$$M\,(a_{i+1}-a_i)\,\eta = \frac{M\,(a_{i+1}-a_i)\,\varepsilon}{2\,(M+1)\,(a_{i+1}-a_i)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
La présence du $M+1$ permet d'éviter de traiter séparément le cas où $M = 0$.

Pour ce choix de η, il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant K$,
$$\sup_{[a_i,a_{i+1}]} |\widetilde{f}_i - P_k| \leqslant \eta.$$
Choisissons et fixons un tel k. Comme P_k est polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_i,a_{i+1}]$ donc d'après la question Q19,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Alors, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant M\,(a_{i+1}-a_i)\,\eta \\ &\quad + \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$
ce que l'on voulait. Finalement,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Commentaire. Cette question, digne d'un sujet d'ENS, est proprement délirante, et sans être hors-programme à proprement parler, elle n'est pas du tout dans l'esprit du programme de PSI.

Q21. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\boxed{\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t} &= \int_a^b f(t)\,\frac{1-\cos(2nt)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t \\ &\boxed{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}\end{aligned}$$
En effet, la fonction $t \mapsto \cos(2nt)$ est continue, 2π-périodique et $\int_0^{2\pi}\cos(2nt)\,\mathrm{d}t = 0$, donc nous sommes bien dans les conditions d'application de la question Q20, sachant que f est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Q22. Pour commencer, les fonctions $t \mapsto F(t)/t^2$ et $t \mapsto f(t)/t$ sont continue sur $[a,+\infty[$.

Puisque F est bornée sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $t \geqslant a$,
$$\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| = \frac{|F(t)|}{t^2} \leqslant \frac{\sup_{\mathbb{R}_+}|F|}{t^2}.$$
Or la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ d'après les intégrales de Riemann, car $a > 0$ et $2 > 1$. Donc par comparaison, $t \mapsto F(t)/t^2$ est aussi intégrable sur $[a,+\infty[$ et
$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Les fonctions f et $t \mapsto 1/t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Faisons une intégration par parties :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Cette égalité sera valide si deux des trois écritures ont un sens, auquel cas la troisième en aura un aussi. Or on vient de voir que la dernière intégrale a un sens. De plus, comme F est bornée,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} = 0$$

donc le crochet a un sens et vaut

$$\left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} - \frac{F(a)}{a} = -\frac{F(a)}{a}.$$

Alors, d'après le théorème d'intégration par parties,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

et

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

Q23. Les fonctions $t \mapsto \sin t/t$ et $t \mapsto \sin^2 t/t^2$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Toutes les deux tendent vers 1 en 0, donc elles sont prolongeables par continuité en 0, donc elles sont intégrables sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \sin^2 t/t^2$ l'est aussi, donc elle l'est sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

En appliquant la question Q22 à la fonction $f = \sin$, sachant que $F = 1 - \cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$, qui est la primitive de f nulle en 0, on voit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
(1)\quad &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \\
(2)\quad &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
(3)\quad &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Justifions les trois étapes.

(1) C'est une simple intégration par parties, licite car tous les termes manipulés ont un sens.

(2) Oui, grâce à la trigonométire.

(3) Oui, en posant $u = 2t$, qui est un changement de variable licite car il est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$.

Q24.* Appliquons le théorème de la continuité d'une intégrale à paramètre. Posons $A = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}_+$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{C},\ (x, t) \mapsto f(t)\,e^{-xt}.$$

∘ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur A par opérations usuelles.

∘ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I par opérations usuelles.

∘ Pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$|g(x,t)| = |f(t)|\,e^{-xt} \leqslant |f(t)|\,.$$

Par hypothèse, $|f|$ est continue et intégrable sur I, donc elle constitue une domination valide.

Alors, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre,

• pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I, ce qui signifie que $\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est bien définie sur } A\,;}$

• $\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est continue sur } A.}$

Q25.* Appliquons le théorème de la classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètre. Posons $A' = \mathbb{R}_+^*$.

∘ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A' par opérations usuelles. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,t) \in A' \times I$,

$$\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) = (-t)^p\,f(t)\,e^{-xt}.$$

∘ On a vu ci-dessus que pour tout $x \in A'$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur I.

∘ Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in A'$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est continue sur I par opérations usuelles.

∘ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit un segment $[a,b] \subset A'$ avec $0 < a < b$, soient $x \in [a,b]$ et $t \in I$: puisque f est bornée sur I,

$$\left|\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\right| = t^p\,|f(t)|\,e^{-xt} \leqslant \|f\|_\infty^I\,t^p\,e^{-at}.$$

D'une part, $t^p\,e^{-at} = (t^p\,e^{-at/2})\,e^{-at/2}$. D'autre part, $a/2 > 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} t^p\,e^{-at/2} = 0$. Donc $t^p e^{-at} \ll_{+\infty} e^{-at/2}$. Comme $a/2 > 0$, $t \mapsto e^{-at/2}$ est intégrable sur I, donc $t \mapsto t^p\,e^{-at}$ l'est aussi. Alors $\dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}$ vérifie l'hypothèse de domination locale.

Alors, en vertu du théorème annoncé,

• pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A'$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I ;

• $\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } A'\,;}$

- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A'$,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)^{(p)}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p\, f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Soit $x \in A'$. On a

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}(f)(x)| &\leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \|f\|_\infty^I\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\|f\|_\infty^I}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\boxed{\lim_{+\infty} \mathscr{L}(f) = 0.}$

Q26.1.* La fonction f proposée est bornée sur I donc $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^2$ sur A'. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(f)''(x) + \mathscr{L}(f)(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2\, e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)\, e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est solution sur } A' \text{ de } (E).}$

Q26.2. Posons $y = \alpha\cos + \beta\sin$ où α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $\alpha'\cos + \beta'\sin = 0$. Alors

$$\begin{aligned}y' &= \alpha'\cos - \alpha\sin + \beta'\sin + \beta\cos \\ &= -\alpha\sin + \beta\cos, \\ y'' &= -\alpha'\sin - \alpha\cos + \beta'\cos - \beta\sin.\end{aligned}$$

Posons $b : x \mapsto 1/x$. En reportant dans (E), on a

$$y'' + y = b \iff -\alpha'\sin + \beta'\cos = b.$$

Ainsi, en reprenant la condition de l'énoncé,

$$\begin{cases}\alpha'\cos + \beta'\sin = 0, \\ -\alpha'\sin + \beta'\cos = b,\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha' = -b\sin, \\ \beta' = b\cos.\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\alpha'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$. Donc en choisissant arbitrairement $a > 0$,

$$\alpha(x) = \alpha(a) - \int_a^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question Q22, $t \mapsto \sin t/t$ a une intégrale convergente sur $[a, +\infty[$, donc en posant toujours arbitrairement

$$\alpha(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

on a

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha(x) &= \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_a^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}}$$

Ces choix arbitraires sont possibles car les primitives de α' sont définies à une constante additive près et que l'on cherche une solution particulière de (E).

De même, $\beta'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Avec le même choix arbitraire de $a > 0$,

$$\beta(x) = \beta(a) + \int_a^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

et en choisissant $\beta(a) = -\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$, on a

$$\boxed{\beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

Q26.3. La solution particulière que l'on a trouvée s'écrit donc, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}y(x) &= \alpha(x)\cos x + \beta(x)\sin x \\ &= \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x \\ &\quad - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin t\cos x - \cos t\sin x}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{x+u}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

où l'on a posé $u = t - x$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$.

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ est bien une solution particulière de } (E) \text{ sur } A'.}$

Q26.4. Comme $\mathscr{L}(f)$ est solution de (E) sur A', elle est somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène

$$(H) \qquad y'' + y = 0,$$

dont les solutions sont classiquement les fonctions $a\cos + b\sin$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que pour tout } x > 0, \quad \mathscr{L}(f)(x) = a\cos x + b\sin x + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$

Q27. On a vu que pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = &\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x \\ &- \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x.\end{aligned}$$

Les fonctions cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$ et les deux intégrales tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, comme restes d'intégrales convergentes. Alors

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

D'après la question Q25, $\mathscr{L}(f)$ tend vers 0 en $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathscr{L}(f)(x)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)=0.$$

Mais d'après la question Q26.4, cette différence vaut $a\cos x+b\sin x$, donc elle ne peut tendre vers 0 que si $a=b=0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x>0,\ \mathscr{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

Q28. Soit $x>0$. On a

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+t}-\frac{1}{t}\right)\sin t\,\mathrm{d}t\\&=-x\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t\\&=-x\int_0^{1}\frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t-x\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'une part, comme pour tout $t>0$, $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left|-x\int_0^1\frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t\right|&\leqslant x\int_0^1\left|\frac{\sin t}{t}\right|\frac{\mathrm{d}t}{x+t}\\&\leqslant x\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{x+t}=x\Big[\ln(x+t)\Big]_0^1\\&=x\ln(1+x)-x\ln(x)\xrightarrow[x\to0]{}0.\end{aligned}$$

D'autre part, comme pour tout $t>0$, $|\sin t|\leqslant1$, et en minorant x par 0 au dénominateur,

$$\left|-x\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=x\xrightarrow[x\to0]{}0.$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to0}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)=0,}$

ou encore $\boxed{\lim_{x\to0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.}$

Q29. Ainsi

$$\lim_{x\to0}\mathscr{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

puisque d'après la question Q27, pour tout $x>0$,

$$\mathscr{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Mais d'après la question Q24, $\mathscr{L}(f)$ est continue sur A, donc en particulier en 0 et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\mathscr{L}(f)(x)=\mathscr{L}(f)(0)&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\Big[\operatorname{Arctan}t\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.}$

Q30. Soit $n\in\mathbb{N}$. Bien-sûr, comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, S_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in[0,\pi]$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}S_n'(x)&=\sum_{k=0}^n\cos((2k+1)x)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)x}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^n(e^{2ix})^k\right)=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{1-(e^{2ix})^{n+1}}{1-e^{2ix}}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{i(n+1)x}\left(e^{-i(n+1)x}-e^{i(n+1)x}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(e^{i(n+1)x}\frac{-2i\sin((n+1)x)}{-2i\sin x}\right)\\&=\frac{\cos((n+1)x)\sin((n+1)x)}{\sin x}=\frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.\end{aligned}$$

Bien-sûr, ce calcul n'est pas valable si $x\in\{0,\pi\}$, car alors $e^{2ix}=1$. Par ailleurs,

$$\frac{\pi}{4}S_n'(0)=\sum_{k=0}^n1=n+1,$$

et pour $x>0$,

$$\frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2(n+1)x}{2x}=n+1,$$

donc on peut prolonger l'expression précédente en 0. De même,

$$\frac{\pi}{4}S_n'(\pi)=\sum_{k=0}^n(-1)=-(n+1),$$

et pour $x<\pi$, en posant $x=\pi-y$ et en faisant tendre y vers 0,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}&=\frac{\sin(2(n+1)(\pi-y))}{2\sin(\pi-y)}\\&=\frac{\sin(2(n+1)\pi-2(n+1)y))}{2\sin(y)}\\&=-\frac{\sin(2(n+1)y))}{2\sin(y)}\\&\underset{y\to0}{\sim}-\frac{2(n+1)y}{2y}=-(n+1),\end{aligned}$$

donc on peut à nouveau prolonger l'expression de $S_n'(x)$ en π. Ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,\pi],\ S_n'(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}}$$

en acceptant les prolongements ci-dessus pour 0 et π.

Alors, en intégrant, sachant que $S_n(0)=0$, on a

$$\boxed{\begin{aligned}&\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,\pi],\\&S_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}}$$

où l'intégrande est prolongée en 0 et π comme plus haut.

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}$. En constatant que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t,$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

où l'on a reconnu une somme géométrique de raison $-t^2 \neq 1$, d'où

$$\boxed{\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

Bien-sûr, la série alternée $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge grâce au critère spécial des séries alternées, puisque la suite $\left(\frac{1}{2k+1}\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 en décroissant. Pour trouver sa somme, il reste à prouver que l'intégrale précédente tend vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Q32. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\sin((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) &= \sin(k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{Im}(e^{i(k\pi+\pi/2)}) \\ &= \operatorname{Im}(e^{ik\pi}e^{i\pi/2}) = \operatorname{Im}((-1)^k i) = (-1)^k,\end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

Q33. Soient $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sin\big((2k+1)(\pi - x)\big) &= \sin\big(2k\pi + \pi - (2k+1)x\big) \\ &= \sin(\pi - (2k+1)x) = \sin((2k+1)x),\end{aligned}$$

donc $\boxed{S_n(\pi - x) = S_n(x).}$

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sous sa forme intégrale de la question Q30, $S_n(x)$ est généralisée en 0, où l'on se rappelle le prolongement d'alors. Et comme $1/\sin t \sim_{t\to 0} 1/t$, écrivons

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}S_n(x) &= \int_0^x \sin(2(n+1)t)\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \sin(2(n+1)t)\,\frac{t - \sin t}{t\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'une part, $t \mapsto \frac{t - \sin t}{t\sin t}$ est continue sur $]0, x]$, car $x \leqslant \frac{\pi}{2}$, et au voisinage de 0,

$$\frac{t - \sin t}{t\sin t} \sim \frac{t^3/6}{t^2} = \frac{t}{6} \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

donc cette fonction se prolonge par continuité sur $[0, x]$. Alors, d'après la question Q20,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \sin(2(n+1)t)\,\frac{t - \sin t}{t\sin t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'autre part, en posant $u = 2(n+1)t$, qui est un changement de variable licite, et d'après la question Q29, sachant que $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1.}$

Q34. Prouvons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x)$. Comme les S_n et f sont 2π-périodiques, il suffit de le prouver pour x dans un intervalle de longueur 2π. Comme elles sont impaires, il suffit de le prouver sur $[0, \pi]$. Grâce à la relation $S_n(\pi - x) = S_n(x)$, il suffit de le prouver sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or nous venons de voir que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers $1 = f(x)$. Et bien-sûr, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(0) = 0 = f(0)$.

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la suite } (S_n(x))_{n\geqslant 0} \text{ converge bien vers } f(x).}$

Q35. $\boxed{\text{Oui}}$, car pour tout $x > 0$,

$$2n\sin\left(\frac{x}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\,\frac{x}{2n} = x.$$

Q36. Comme $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$,

$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0, \pi/2].}$

* Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $u = 2(n+1)t$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin(\frac{u}{2(n+1)})}\,\frac{\mathrm{d}u}{2(n+1)} = \int_0^{\pi} \varphi_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de convergence dominée. Les φ_n et φ sont continues sur $[0, \pi]$. La suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, \pi]$ vers φ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$, $|\varphi_{n+1}(x)| \leqslant 1$. En effet, en introduisant $g : x \mapsto \sin x - 2n\sin(\frac{x}{2n})$, $g'(x) = \cos x - \cos(\frac{x}{2n})$. Or $x \geqslant \frac{x}{2n}$ et cos décroît sur $[0, \pi]$ donc $g'(x) \leqslant 0$ et g décroît sur $[0, \pi]$. Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$, d'où $\varphi_n(x) \leqslant 1$, ce que l'on voulait puisque $\varphi_n(x) \geqslant 0$.

Ainsi, le théorème s'applique : les φ_n et φ sont intégrables sur $[0, \pi]$ (ce qui n'est pas une surprise), et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

ou encore $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt.}$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, sachant que f est constante égale à 1 sur $]0,\pi[$,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

Q37. D'après le développement en série entière du sinus, pour tout x réel,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donc pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Constatons que ce développement est encore valide en 0, en prolongeant le membre de gauche par 1. Comme le rayon de convergence de ce développement en série entière est clairement $+\infty$, on peut l'intégrer terme à terme sur le segment $[0,\pi]$, ce qui autorise le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^\pi x^{2n}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Alors, avec toujours $f = 1$ sur $]0,\pi[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt - 1 \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1.
\end{aligned}$$

Q38. Cette série est alternée. Une rapide étude (hum...) montre que la valeur absolue du terme général est bien décroissante dès le premier rang. Posons

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$\text{et } S_3 = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Alors l'écart voulu est le reste d'ordre 3 de la série : $R_3 = S - S_3$. En vertu du critère spécial des séries alternées, il est du signe de son premier terme, c'est-à-dire positif, et est majoré par ce premier terme :

$$\boxed{0 \leqslant R_3 \leqslant \frac{\pi^8}{9\cdot 9!} \approx 3\cdot 10^{-3}.}$$

Alors, la limite de la question précédente est

$$\begin{aligned}
2S - 1 &= 2S_3 - 1 + 2R_3 \\
&\geqslant 2S_3 - 1 \approx 0{,}174 > 0{,}17.
\end{aligned}$$

* Ainsi, on a trouvé une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que la suite $(S_n(x_n) - f(x_n))_{n\geqslant 0}$ ne tende pas vers 0, ce qui entraine que

la suite (S_n) ne converge pas uniformément sur $]0,\pi/2[$ vers f.