Deuxième devoir surveillé bis

Durée : 4 heures
Les calculatrices sont autorisées
Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux

Problème 1
Autour des sommes d'Euler

[extrait de CS15]

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$$

à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

A –

Q 1. Justifier que la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

Q 2. Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + \mathrm{o}(1)$. En déduire que $H_n \sim \ln n$.

B – Soit r un entier naturel.

Q 3. Pour quelles valeurs de r, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

C –

Q 4. Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

Q 5. En déduire que la fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

D – Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \text{ et } I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t.$$

Q 6. Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

Q 7. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in\,]0,1[\,,$$
$$I_{p,q}^{\varepsilon} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1}.$$

Q 8. En déduire que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

Q 9. En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

E – Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$. On suppose que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Q 10.* Montrer que

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

F –

Q 11. Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} \,\mathrm{d}t.$$

Q 12. Établir que l'on a alors

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2\,(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} \,\mathrm{d}t.$$

Q 13. En déduire que $S_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} \,\mathrm{d}t$ puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

Problème 2

[extrait de CS18]

Ce problème aborde la notion de moment dans différents contextes : moment d'une suite numérique réelle dans la partie I ; moment d'une fonction dans la partie II.

Notations

Si f est une fonction de classe C^∞ et p un entier naturel, on note $f^{(p)}$ la dérivée p-ième de f.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si a et b sont deux entiers naturels, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b.

Préambule

On admet le résultat suivant :

si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que

i. pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0}|u_{p,q}|$ converge,

ii. la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge,

alors, en notant $S_p=\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}$ et, pour tout n entier naturel, $W_n=\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}u_{p,q}$,

- pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}u_{p,q}$ converge ; on note S'_q sa somme ;
- les séries $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}S_p$, $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0}S'_q$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}W_n$ convergent ;
- $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}S_p=\sum_{q=0}^{+\infty}S'_q=\sum_{n=0}^{+\infty}W_n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}u_{p,q}\right).$$

I Moments d'une suite numérique

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que, pour tout entier naturel p, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^p\,a_n$ converge absolument, on appelle moment d'ordre p de la suite (a_n) le nombre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^p\,a_n$.

Le but de cette partie est de construire une suite non nulle dont tous les moments d'ordre p ($p\in\mathbb{N}$) sont nuls.

I.A – Étude d'une fonction

On définit la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases}\varphi(x)=\exp\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x<1,\\ \varphi(x)=0 & \text{si } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Q 14. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$.

Q 15. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\varphi'(x)$ et démontrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 16. Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x\in\,]-\infty,1[$,

$$\varphi^{(p)}(x)=\frac{P_p(\sqrt{1-x}\,)}{Q_p(\sqrt{1-x}\,)}\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right).$$

Q 17. En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\varphi^{(p)}(x)$ pour $p\in\mathbb{N}^*$.

Q 18. En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour $p\in\mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\varphi^{(p)}(1)$.

I.B – Développements en série

Q 19. Démontrer, pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$\varphi(x)=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}\,x^q\,(1-x)^{-q/2}.$$

On considère les polynômes de Hilbert

$$\begin{cases}H_0(X)=1,\\ H_n(X)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\\ \quad=\dfrac{X\,(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

Q 20. Démontrer que, pour tout $x\in\,]-1,1[$ et tout $q\in\mathbb{N}^*$, on a

$$(1-x)^{-q/2}=\sum_{p=0}^{+\infty}H_p\left(\frac{q}{2}+p-1\right)x^p.$$

Q 21. En déduire

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ \varphi(x)=1+\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}(x)\right)$$

où l'on a posé

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ a_{i,j}(x)=\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}\,H_j\left(\frac{i-1}{2}+j\right)x^{i+j+1}.$$

Q 22. Démontrer que, pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|a_{i,j}(x)|\right)=\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right)-1.$$

Q 23. Utiliser les résultats admis dans le préambule pour établir l'égalité

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\, H_k\left(\frac{n+k}{2} - 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

I.C – Un prolongement dans $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}$ le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}.$$

Q 24. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge.

Pour $z \in \mathcal{D}$, on note $\Phi_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ et, sous réserve de convergence,

$$\Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, z^n.$$

Q 25. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, z^n$ converge.

Q 26. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $]-1,1[$.

On admet que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

Q 27.* Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$. Démontrer, pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, que

$$(n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(r\, e^{i\theta})\, e^{-ni\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Q 28. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un réel K_p et un entier naturel N_p tels que

$$\forall n \geqslant N_p,\ |a_n| \leqslant \frac{K_p}{n^p}.$$

Q 29.* Démonter que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

Q 30.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démonter que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\, a_{n+p}\, x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\, a_{n+p} = 0.$$

Q 31. Démontrer que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls.

II Moments d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si la fonction $t \mapsto t^p\, f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on appelle moment d'ordre p de f le nombre

$$\mu_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Le but de cette partie est de construire une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, non nulle, dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

II.A – Étude d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

On définit la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} \theta(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \theta(x) = \exp\left(-\dfrac{\ln^2 x}{4\pi^2} + i\,\dfrac{\ln x}{2\pi}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Q 32. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |\theta(x)| = 0$.

Q 33. Justifier que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln x)}{x^n}\, \theta(x).$$

Q 34. En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |\theta^{(n)}(x)| = 0$.

On pourra effectuer le changement de variable $y = -\ln x$.

Q 35. Démontrer que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.B – Étude d'une intégrale

Q 36. Montrer que pour tout entier naturel p, l'intégrale

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t\, \mathrm{d}t$$

est absolument convergente et qu'elle vaut zéro.

Q 37. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\ln x}{2\pi}$, démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_p = \frac{e^{-p^2\pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) \mathrm{d}x.$$

Q 38. Conclure.

• • • FIN • • •