Corrigé du deuxième devoir surveillé bis

Problème 1

Q1. Soit un entier $n \geq 2$. Comme la fonction $t \mapsto 1/t$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \leq 0.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right)$ est de même nature que la suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$ donc elle converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.

Q2. Soit un entier $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(a_k + \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n a_k + \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k + o(1). \end{aligned}$$

Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + A + o(1)$.

Alors $\frac{H_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{A + o(1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et

$H_n \sim \ln(n)$.

Q3. Soient $r \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln(n)}{n^r}.$$

Si $r = 0$, $\sum \ln(n)$ diverge grossièrement, donc aussi $\sum H_n/(n+1)^0$.

Si $r = 1$,

$$\frac{\ln(n)}{n} \gg \frac{1}{n}$$

et $\sum 1/n$ diverge, donc aussi $\sum H_n/(n+1)^1$.

Si $r \geq 2$,

$$\frac{\ln(n)}{n^r} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et $\sum 1/n^{3/2}$ converge, donc aussi $\sum H_n/(n+1)^r$.

$\sum H_n/(n+1)^r$ converge si et seulement si $r \geq 2$.

Q4. Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \ln(1-t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.$$

Ces deux développements en série entière ont pour rayon de convergence 1.

Q5. La fonction $t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière comme produit de deux fonctions qui le sont, et son développement en série entière est le produit de Cauchy des deux précédents. De plus, le rayon de convergence du développement est supérieur ou égal au minimum des précédents, c'est-à-dire 1. Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(1-t)}{1-t} &= \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p} \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} t^q \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot 1 \right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n. \end{aligned}$$

En outre, d'après la question Q3, $\sum H_n$ diverge donc ce développement en série entière a un rayon de convergence inférieur ou égal à 1.

Ainsi, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$-\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

Ce développement en série entière a pour rayon de convergence 1.

Q6. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^*$. D'abord, $t \mapsto t^p \ln^q(t)$ est continue sur $]0, 1[$. Quand t est proche de 0,

$$t^p \ln^q(t) \ll \frac{t^p}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2-p}}$$

où $t \mapsto 1/t^{1/2-p}$ est intégrable sur $]0, 1[$ car $\frac{1}{2} - p < 1$ donc $t \mapsto t^p \ln^q(t)$ l'est aussi.

Ainsi, $I_{p,q}$ existe pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Q7. Soient $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Faisons un intégration par parties, licite puisque les fonctions en jeu sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$.

$$\begin{aligned} \underline{I_{p,q}^\varepsilon} &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \ln^q(t) \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} q \frac{1}{t} \ln^{q-1}(t) dt \\ &= -\frac{\varepsilon^{p+1} \ln^q(\varepsilon)}{p+1} - \frac{q}{p+1} \underline{I_{p,q-1}^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Q8. En faisant tendre ε vers 0, sachant que $p+1 \geq 1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{p+1} \ln^q(\varepsilon) = 0$, donc

$$\underline{I_{p,q}} = -\frac{q}{p+1} \underline{I_{p,q-1}}.$$

Q9. Par une récurrence immédiate,

$$\begin{aligned} \underline{I_{p,q}} &= \frac{-q}{p+1} \underline{I_{p,q-1}} = \frac{(-1)^2 q(q-1)}{(p+1)^2} \underline{I_{p,q-2}} \\ &= \dots = \frac{(-1)^q q(q-1) \dots 1}{(p+1)^q} \underline{I_{p,0}} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}. \end{aligned}$$

Q10.* CALCUL FORMEL. Voici un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

$$\left| \int_0^1 \ln^{r-1}(t) f(t) dt = \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt \right.$$

$$(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \ln^{r-1}(t) t^n dt$$

$$(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(-1)^{r-1} (r-1)!}{(n+1)^r}.$$

$$= (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

Q11. Soit $r \geq 2$. D'après la question Q3, la série définissant S_r converge, absolument puisque son terme général est positif. En utilisant les questions Q10 puis Q5, en remplaçant a_n par H_n , on a

$$\left| S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} \right.$$

$$= \frac{1}{(-1)^{r-1} (r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n \right) dt$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \left(-\frac{\ln(1-t)}{1-t} \right) dt$$

$$= \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt.$$

Q12. À partir de cette intégrale, faisons une intégration par parties que l'on justifiera ensuite :

$$\left| S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left(\left[\ln^{r-1}(t) \left(-\frac{1}{2} \ln^2(1-t) \right) \right]_0^1 \right. \right.$$

$$\left. - \int_0^1 (r-1) \frac{\ln^{r-2}(t)}{t} \left(-\frac{1}{2} \ln^2(1-t) \right) dt \right)$$

$$= \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{\ln^{r-2}(t) \ln^2(1-t)}{t} dt.$$

Cette intégration par parties est licite. En effet, les fonctions $t \mapsto \ln^{r-2}(t)/t$ et $t \mapsto -\frac{1}{2} \ln^2(1-t)$ sont de

classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$; l'intégrale de départ (celle de Q11) converge; le crochet a un sens et vaut 0 puisque d'une part,

$$\ln^{r-1}(t) \ln^2(1-t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln^{r-1}(t) t^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

par croissances comparées, et d'autre part,

$$\ln^{r-1}(t) \ln^2(1-t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (t-1)^{r-1} \ln^2(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0,$$

toujours par croissances comparées avec $r-1 \geq 1$. Alors, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que la dernière intégrale converge et que l'égalité est valide.

Q13. Alors, pour $r = 2$,

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt.$$

Le changement de variable $t \mapsto 1-t$ est bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1[$ dans lui-même, donc d'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt \text{ et } \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t} | -1 | dt$$

ont même nature. Puisque la première converge, la seconde aussi et elles sont égales :

$$\left| S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t} dt. \right.$$

En appliquant la question Q10 à la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

et pour $r = 3$, on a

$$\left| S_2 = \frac{1}{2} (-1)^{3-1} (3-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \right.$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

T.S.V.P.

Problème 2

Q14. Clairement, par opérations usuelles,

φ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = 0 = \varphi(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x),$$

donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q15. Pour tout $x < 1$,

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{2(1-x)^{3/2}} \right) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right),$$

donc pour $x < 1$ proche de 1,

$$\varphi'(x) \sim -\frac{1}{2(1-x)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

En posant $u = 1/\sqrt{1-x}$, par croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi'(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} u^3 e^{-u} = 0.$$

Et bien-sûr, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi'(x) = 0$.

Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, φ' admet en 1 des limites à droite et à gauche égales. D'après le théorème du prolongement de classe $\mathcal{C}^1$,

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(1) = 0$.

Q16. Procédons par récurrence.

Initialisation. D'après la question précédente, pour tout $x < 1$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{-2+x}{2(1-x)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \\ &= \frac{-1-(1-x)}{2(1-x)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \\ &= \frac{P_1(\sqrt{1-x})}{Q_1(\sqrt{1-x})} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right), \end{aligned}$$

en posant $P_1 = -1 - X^2$ et $Q_1 = 2X^3$. En considérant la fraction rationnelle $F_1 = P_1/Q_1$, on peut même dire que

$$\varphi'(x) = F_1(\sqrt{1-x}) \varphi(x).$$

Transmission. Supposons que la propriété soit vraie pour un rang $p \geq 1$. En considérant la fraction rationnelle $F_p = P_p/Q_p$, on peut donc écrire pour tout $x < 1$,

$$\varphi^{(p)}(x) = F_p(\sqrt{1-x}) \varphi(x).$$

En dérivant, on obtient,

$$\begin{aligned} \varphi^{(p+1)}(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} F_p'(\sqrt{1-x}) \varphi(x) \\ &\quad + F_p(\sqrt{1-x}) \varphi'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} F_p'(\sqrt{1-x}) \right. \\ &\quad \left. + F_p(\sqrt{1-x}) F_1(\sqrt{1-x}) \right) \varphi(x) \\ &= F_{p+1}(\sqrt{1-x}) \varphi(x), \end{aligned}$$

en posant

$$F_{p+1} = -\frac{F_p'}{2X} + F_p F_1.$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \geq 1$.

Q17. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si 0 n'est pas pôle de F_p ,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_p(\sqrt{1-x}) = \ell \in \mathbb{R},$$

donc, comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi^{(p)}(x) = 0.$$

Et si 0 est pôle de F_p d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que pour $x < 1$ proche de 1,

$$F_p(\sqrt{1-x}) \sim \frac{\alpha}{(\sqrt{1-x})^m},$$

donc, en notant encore $u = 1/\sqrt{1-x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi^{(p)}(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \alpha u^m e^{-u} = 0,$$

à nouveau par croissances comparées.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi^{(p)}(x) = 0$.

Q18. Une « simple » récurrence, dont la transmission est calquée sur la question Q15, permet d'affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(1) = 0$.

Q19. D'après le développement en série entière de l'exponentielle, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}} \right)^q \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}. \end{aligned}$$

Q20. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. D'après le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, avec ici $\alpha = -q/2$, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{-q/2}{p} (-x)^p.$$

Par ailleurs, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \binom{-q/2}{p} &= \frac{(-\frac{q}{2})(-\frac{q}{2}-1)\cdots(-\frac{q}{2}-p+1)}{p!} \\ &= \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} \left(-\frac{q}{2} - k \right) = \frac{(-1)^p}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{q}{2} + k \right) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{q}{2} + p - 1 - k \right) \text{ avec } k \rightarrow p - 1 - k \\ &= (-1)^p H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) x^p.$$

Commentaire. Dans cette question, on a utilisé la convention habituelle qu'un produit vide vaut 1, ce qui arrive quand $p = 0$.

Q21. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2} \\ &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q \left(\sum_{p=0}^{+\infty} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) x^p \right) \\ &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) x^{p+q} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) x^{i+j+1} \right), \end{aligned}$$

où l'on a posé $p = j$ et $q = i + 1$.

Q22. Reprenons les questions Q19 à Q21, en accéléré.

Comme en Q19, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} |x|^q (1-|x|)^{-q/2}.$$

Comme en Q20, pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$,

$$(1-|x|)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p \left(\frac{q}{2} + p - 1 \right) |x|^p.$$

Donc comme en Q21,

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) \right| &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q!} |x|^q (1-|x|)^{-q/2} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)!} H_j \left(\frac{i-1}{2} + j \right) |x|^{i+j+1} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right). \end{aligned}$$

Q23. Soit $x \in]-1, 1[$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j \geq 0} |a_{i,j}(x)|$ converge et

$$\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right)$$

converge. Donc le préambule permet de permuter les deux signes $\sum$ dans la question Q21 :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right) \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_{p,q}(x) \right). \end{aligned}$$

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{p+q=n} a_{p,q}(x) \\ &= \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} H_q \left(\frac{p-1}{2} + q \right) x^{p+q+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{q=0}^n \frac{(-1)^{n-q+1}}{(n-q+1)!} H_q \left(\frac{n-q-1}{2} + q \right) x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} H_k \left(\frac{n+k-1}{2} \right) x^{n+1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} H_k \left(\frac{n+k-1}{2} \right) \right) x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k \left(\frac{n+k-2}{2} \right) \right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k \left(\frac{n+k-1}{2} - 1 \right) \right) x^n. \end{aligned}$$

Q24. D'après la question précédente, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$, ce qui signifie que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est plus grand que 1, donc pour tout $|z| < 1$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Q25. Comme φ est développable en série entière sur $]-1, 1[$, elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ — ce que l'on savait déjà — et on peut dériver le développement en série entière terme à terme : pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} x^n \\ &= \Phi_p(x). \end{aligned}$$

Comme précédemment, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} z^n$ est donc supérieur à 1 et cette série entière converge absolument pour tout $z \in \mathcal{D}$.

Q26. On a vu à la question Q18 que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle et ses dérivées sont continues sur le segment $[-1, 1]$, donc elles y sont bornées.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $]-1, 1[$.

Q27.* Soient $r \in]0, 1[$, n et p dans $\mathbb{N}^*$. Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

CALCUL FORMEL.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(r e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta \right| \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} r^k e^{(k-n)i\theta} d\theta \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} r^k \int_0^{2\pi} e^{(k-n)i\theta} d\theta \\ &\stackrel{(3)}{=} \left(\prod_{j=1}^p (n+j) \right) a_{n+p} r^n. \end{aligned}$$

JUSTIFICATIONS.

(1) D'après la question Q24, pour tout $z \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\Phi_p(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+p)(k+p-1)\cdots(k+1)a_{k+p}z^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} z^k.\end{aligned}$$

Comme $r \in]0, 1[$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $|re^{i\theta}| = r < 1$, donc $re^{i\theta} \in \mathcal{D}$ et l'on peut écrire

$$\Phi_p(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} r^k e^{ki\theta},$$

ce qui justifie (1).

(2) Soient $\theta \in [0, 2\pi]$ et $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}& \left| \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} r^k e^{(k-n)i\theta} \right| \\ &= \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) |a_{k+p}| r^k.\end{aligned}$$

D'après la question Q25, le rayon de convergence de

$$\sum_{k \geq 0} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} x^k$$

est plus grand que 1, donc puisque $r < 1$,

$$\sum_{k \geq 0} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} r^k$$

converge absolument, c'est-à-dire que

$$\sum_{k \geq 0} \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) |a_{k+p}| r^k$$

converge. Alors, la série des fonctions continues

$$\theta \mapsto \left(\prod_{j=1}^p (k+j) \right) a_{k+p} r^k e^{(k-n)i\theta}$$

converge normalement sur $[0, 2\pi]$, ce qui autorise la permutation (2).(3) Si $k \neq n$,

$$\int_0^{2\pi} e^{(k-n)i\theta} d\theta = \left[\frac{e^{(k-n)i\theta}}{(k-n)i} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Sinon,

$$\int_0^{2\pi} e^{(n-n)i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Cela justifie la simplification (3).

Q28. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$, donc

$$\exists M_p \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathcal{D}, |\Phi_p(z)| \leq M_p.$$

De plus, avec la question précédente, pour tout $r \in]0, 1[$ et tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}& |(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}r^n| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_p(re^{i\theta})| |e^{-in\theta}| d\theta \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_p d\theta = M_p.\end{aligned}$$

Alors,

$$|a_{n+p}| r^n \leq \frac{M_p}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}.$$

Comme c'est vrai pour tout $r \in]0, 1[$, en passant à la limite quand r tend vers 1,

$$|a_{n+p}| \leq \frac{M_p}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)},$$

ou encore, en décalant l'indice,

$$|a_n| \leq \frac{M_p}{n(n-1)\cdots(n-p+1)}.$$

Enfin, quand n est grand,

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-p+1)} \sim \frac{1}{n^p},$$

donc il existe un rang N_p tel que pour tout $n \geq N_p$,

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-p+1)} \leq \frac{3}{2n^p}.$$

Alors,

$$|a_n| \leq \frac{3M_p}{2n^p} = \frac{K_p}{n^p}$$

en posant $K_p = 3M_p/2$.**Q29.*** En appliquant cette majoration pour $p = 2$, on voit que quand $n \rightarrow +\infty$,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument. Ainsi, comme pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leq |a_n|$,la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} a_n x^n = a_n$. Donc d'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Par ailleurs, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et d'après la question Q14, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1) = 0$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

Q30.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé : posons

$$b_{n,p} = (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}.$$

Grâce à la majoration de la question Q28, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$$

donc

$$b_{n,p} \sim n^p a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme à la question précédente, on en déduit que

la série entière $\sum_{n \geq 0} b_{n,p} x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Et d'après le théorème de la double limite, la question Q25 puis la question Q17,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,p} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,p} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi^{(p)}(x) = 0.$$

Q31. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, nommons m_p le moment d'ordre p de la suite (a_n) .

D'après la question Q29,

$$m_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

De même, d'après la question Q30 pour $p = 1$,

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,1} = 0. \end{aligned}$$

Toujours d'après la question Q30,

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + n] a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,2} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,1} = 0. \end{aligned}$$

Plus généralement, reprenons les polynômes de Hilbert de la question Q19 : la famille $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est échelonnée, donc c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Alors, X^p s'y décompose sous la forme :

$$X^p = \sum_{k=0}^p \alpha_k H_k.$$

Donc,

$$\begin{aligned} m_p &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^p a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^p \alpha_k H_k(n) \right) a_n \\ &= \sum_{k=0}^p \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} H_k(n) a_n \right). \end{aligned}$$

La permutation est permise car la somme intérieure est finie. De plus, si $k \geq 1$ et $n \leq k-1$,

$$H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = 0,$$

et si $n \geq k$,

$$H_k(n) a_n = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n = \frac{1}{k!} b_{n-k,k}.$$

Donc, avec les questions Q29 et Q30,

$$\begin{aligned} m_p &= \sum_{k=0}^p \frac{\alpha_k}{k!} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n-k,k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{\alpha_k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, tous les moments de (a_n) sont nuls.

Q32. Soit $x > 0$. On a

$$|\theta(x)| = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right).$$

Or $\lim_{0^+} \ln = -\infty$, donc $\lim_{0^+} -\ln^2 = -\infty$. De plus, $\lim_{-\infty} \exp = 0$, donc par composition de limites,

$$\underline{\lim_{0^+} |\theta| = 0}.$$

Q33. Pour $x > 0$, posons $u(x) = \frac{\ln x}{2\pi}$, de sorte que

$$\theta(x) = e^{-u^2(x)} e^{iu(x)}.$$

Bien-sûr, la fonction u est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Les fonctions $y \mapsto e^y$ et $y \mapsto e^{iy}$ le sont aussi, donc par composition et produit, θ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Procédons par récurrence.

Initialisation. Soit $x > 0$: $u'(x) = \frac{1}{2\pi x}$, donc

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= -2u'(x)u(x)e^{-u^2(x)}e^{iu(x)} \\ &\quad + e^{-u^2(x)}iu'(x)e^{iu(x)} \\ &= u'(x)(i-2u(x))e^{-u^2(x)}e^{iu(x)} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{i}{2\pi} - \frac{\ln x}{\pi} \right) \theta(x) = \frac{P_1(\ln x)}{x} \theta(x), \end{aligned}$$

en posant $P_1 = \frac{i}{2\pi} - \frac{X}{\pi} \in \mathbb{C}[X]$.

Transmission. Supposons que l'expression de l'énoncé soit vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$. En dérivant comme un produit et en utilisant l'initialisation qui est acquise,

$$\begin{aligned} \theta^{(n+1)}(x) &= \frac{-n}{x^{n+1}} P_n(\ln x) \theta(x) + \frac{1}{x^n} \frac{1}{x} P_n'(\ln x) \theta(x) \\ &\quad + \frac{1}{x^n} P_n(\ln x) \frac{P_1(\ln x)}{x} \theta(x) \\ &= \frac{-nP_n(\ln x) + P_n'(\ln x) + P_n(\ln x)P_1(\ln x)}{x^{n+1}} \theta(x) \\ &= \frac{P_{n+1}(\ln x)}{x^{n+1}} \theta(x), \end{aligned}$$

en posant $P_{n+1} = (P_1 - n)P_n + P_n' \in \mathbb{C}[X]$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, la propriété de l'énoncé est démontrée.

Q34. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. En posant $y = -\ln x$,

$$\begin{aligned} |\theta^{(n)}(x)| &= \left| \frac{P_n(\ln x)}{x^n} \right| |\theta(x)| \\ &= |P_n(-y)| e^{ny} e^{-y^2/2} \\ &= |P_n(-y)| e^{-y^2/4} e^{ny-y^2/4}. \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow +\infty$ et réciproquement. Par croisances comparées, quel que soit le degré de P_n ,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |P_n(-y)| e^{-y^2/4} = 0.$$

Et comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} (ny - y^2/4) = -\infty$,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{ny-y^2/4} = 0.$$

Alors, par produit de limites,

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} |\theta^{(n)}(x)| = 0}.$$

Q35. Oui, avec une démarche analogue à celle menée dans les questions Q15, Q17 et Q18.

Q36. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2} \sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|e^{-(t-p\pi)^2} \sin t| \leq e^{-(t-p\pi)^2}.$$

À l'aide du changement de variable $u = t - p\pi$, qui est valide car bijectif et C^1 , les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

ont même nature. Or la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est paire, donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, pour $u \geq 1$, $e^{-u^2} \leq e^{-u}$. Comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2} \sin t$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

l'intégrale I_p converge absolument.

En exploitant encore le changement de variable $t = u - p\pi$,

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(u + p\pi) du \\ &= (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin u du. \end{aligned}$$

Comme la fonction $u \mapsto e^{-u^2} \sin u$ est impaire et que $\mathbb{R}$ est un intervalle symétrique autour de 0, cette dernière intégrale est nulle.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = 0$.

Q37. Le changement de variable $x \mapsto t = \frac{\ln x}{2\pi}$ est bijectif et C^1 de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, donc, sachant que I_p converge absolument, le calcul suivant est licite :

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{\ln x}{2\pi} - p\pi\right)^2\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) \frac{dx}{2\pi x} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left(\frac{\ln x}{2\pi} - p\pi\right)^2 = \frac{\ln^2 x}{4\pi^2} - p \ln x + p^2 \pi^2,$$

donc

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\left(\frac{\ln x}{2\pi} - p\pi\right)^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \exp(p \ln x) \exp(-p^2 \pi^2) \\ &= e^{-p^2 \pi^2} x^p \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{I_p = \frac{e^{-p^2 \pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) dx.}$$

Q38. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

On reconnaît que $f = \text{Im}(\theta)$. Donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, puisque θ l'est.

D'après les questions Q37 et Q36, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^p f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \mu_p(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^p \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) dx \\ &= 2\pi e^{(p+1)^2 \pi^2} I_{p+1} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f , qui est non nulle et C^∞ sur $\mathbb{R}$, admet des moments à tout ordre, tous nuls.