Troisième devoir surveillé

Durée : 4 heures
Les calculatrices sont interdites
Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux

Exercice 1 [E3A23]

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.

Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.

En déduire un équivalent de $1-(1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A)\ e^{b\ln(a)} \quad (B)\ e^{a\ln(b)} \quad (C)\ e^{\ln(a)\ln(b)}.$$

*****

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

3.2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.

On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Démontrer que $\forall k \geqslant 1,\ u_k > 0$.

4.2. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

4.3. Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_n) = S_n$.

5. Pour tout t réel, on pose $f_0(t) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(t) = 1 - (1-e^{-t})^p$.

5.1. Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5.2. Calculer $I_{p+1} - I_p$ pour tout entier naturel p.

5.3. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.

6. Un encadrement

6.1. Prouver que, pour tout entier naturel non nul k,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

6.2. En déduire que : $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0,\ g_n(t) = 1 - (1-2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

8. Soit β un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta\ln(2)} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u.$$

9. Démontrer que : $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.

10. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 [E3A23]

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n.

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n,

$$I_n'(x) = -\frac{x}{2\,(n+1)}\, I_{n+1}(x).$$

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. Calcul de $I_n(0)$

5.1. Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

5.2. En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!\,(n-k)!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

Exercice 3 [E3A22]

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ..., n, ...

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ..., n.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

4. Déterminer $\mathbb{P}([X=1])$.

5. Justifier que $[X=2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X=2])$.

6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X=n]$ en fonction d'évènements du type S_k.

7. Déterminer la loi de X.

8. Vérifier **par le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.

9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 4 [E3A18]

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geqslant 1} h_n\, x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\, x^n$$

$$\text{et } T(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n}\, x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier

$$h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Établir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0)=0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$.

8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9. En déduire une relation entre $T-S$ et L.

10. Soit $y \in]0,1[$.

(a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u + S(y) = 0.$$

On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

(b)* Justifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Justifier que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).$$

11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.