Corrigé du troisième devoir surveillé

Exercice 1

1 & 2. Sans commentaire.

3.1. Avec la question 1, pour k grand,

$$a_k \sim \frac{n-1}{2^k},$$

donc la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0. Grâce à l'équivalence suite-série, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1} u_k \text{ converge.}}$

3.2. Avec ce même équivalent, comme la série géométrique $\sum 1/2^k$ converge, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} a_k \text{ converge.}}$

4.1. La suite $(2^k)_{k\geqslant 0}$ croît strictement, donc la suite $(1/2^k)_{k\geqslant 0}$ décroit strictement et la suite $(1-1/2^k)_{k\geqslant 0}$ croît strictement. Comme la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ croît strictement sur $\mathbb{R}_+$, la suite $((1-1/2^k)^{n-1})_{k\geqslant 0}$ croît strictement. Finalement, la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ décroit strictement et $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 1,\ u_k > 0.}$

4.2. On vient de voir que la suite $(\lambda u_k)_{k\geqslant 1}$ est positive. Pour que cette suite détermine une loi de probabilité, il faut et il suffit que sa somme fasse 1. Or, en reconnaissant une somme télescopique,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = a_0 - \lim_{k\to+\infty} a_k = 1 - 0 = 1.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } \lambda = 1.}$

4.3. X_n admet une espérance si et seulement si la famille $(k\,u_k)_{k\geqslant 1}$ est sommable. Or, pour k grand,

$$\begin{aligned}
k\,u_k &= k\,(a_{k-1} - a_k)\\
&= k\left(-\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} + \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}\right)\\
&= k\,(n-1)\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\\
&\sim \frac{k\,(n-1)}{2^k} \ll \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, X_n admet bien une espérance.

D'après le cours, on peut alors affirmer que

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant k).$$

Or, pour $k \geqslant 1$, toujours à l'aide d'une somme télescopique,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \geqslant k) &= \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j)\\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} u_j = a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S_n.}$$

5.1. I_0 converge car f_0 est la fonction nulle.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Par opérations usuelles, f_p est continue sur $\mathbb{R}$. Quand $t \to +\infty$, $e^{-t} \to 0$ donc

$$f_p(t) = 1 - (1 - p\,e^{-t} + \mathrm{o}(e^{-t})) \sim p\,e^{-t}.$$

Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc f_p l'est aussi.

$\boxed{\text{Pour tout } p,\ I_p \text{ converge.}}$

5.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $p \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\boxed{I_{p+1} - I_p} &= \int_0^{+\infty} (-(1-e^{-t})^{p+1} + (1-e^{-t})^p)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})^p\,(-(1-e^{-t}) + 1)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})^p\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\frac{(1-e^{-t})^{p+1}}{p+1}\right]_0^{+\infty} \boxed{= \frac{1}{p+1}.}
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\boxed{I_1 - I_0} = I_1 &= \int_0^{+\infty} (1-(1-e^{-t}))\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \boxed{= 1.}
\end{aligned}$$

5.3. Alors, pour $n \geqslant 2$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} (I_k - I_{k-1}) = I_{n-1} - I_0 \boxed{= I_{n-1},}$$

où l'on a encore utilisé une somme télescopique.

6.1. Soit $k \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto 1/t$ décroit sur $[k, k+1]$, donc pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

et en intégrant sur le segment,

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.}$$

6.2. Alors, en sommant entre 1 et $n-1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Grâce à la question 5.3, la seconde inégalité donne directement $\ln(n) \leqslant I_{n-1}$. Et la première inégalité donne

$$\ln(n) \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 = I_n - 1.$$

On obtient bien $I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$, en translatant l'indice.

$\boxed{\text{L'encadrement souhaité est atteint.}}$

7. Comme à la question 4.1, la fonction g_n décroit clairement sur $\mathbb{R}_+$. Alors, pour $k \geqslant 0$ et $t \in [k, k+1]$,

$$g_n(k+1) \leqslant g_n(t) \leqslant g_n(k).$$

Et l'on reconnait que $g_n(k) = a_k$. Donc en intégrant sur le segment,

$$a_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a_k.$$

En sommant entre 0 et $m-1$, et en décalant l'indice dans la somme de gauche,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k.}$$

8. Soit $\beta > 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^\beta g_n(v)\,\mathrm{d}v &= \int_0^\beta \left(1-\left(1-\frac{1}{2^v}\right)^{n-1}\right)\mathrm{d}v\\ &= \int_0^\beta \left(1-(1-e^{-v\ln(2)})^{n-1}\right)\mathrm{d}v\\ &= \int_0^{\beta\ln(2)} \left(1-(1-e^{-u})^{n-1}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\ln(2)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{\beta\ln(2)} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

où l'on a posé $u = v\ln(2)$. Ce changement de variable est licite car ici, les intégrales ne sont pas généralisées.

9. D'après la question 5.1, f_{n-1} est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc il est permis de faire tendre β vers $+\infty$ dans l'intégrale ci-dessus. Alors, la limite est également permise dans l'intégrale de g_n, qui est donc aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et l'on a

$$\int_0^{+\infty} g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{I_{n-1}}{\ln(2)}.$$

Il est donc possible de faire tendre m vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question 7, et l'on obtient avec la notation de la question 3.2,

$$S_n - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n.$$

Enfin, grâce à la relation précédente et à la question 4.3, on a bien

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n).}$$

10. Réarrangeons cet encadrement :

$$\frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant S_n \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} + 1,$$

ou encore

$$1 \leqslant \frac{S_n\ln(2)}{I_{n-1}} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{I_{n-1}}.$$

Trouvons un équivalent de I_{n-1}. Avec la question 6.2, on a

$$1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln(n)} \leqslant \frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)}.$$

Or, quand n est grand,

$$\begin{aligned}1+\ln(n-1) &= 1+\ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= 1+\ln(n)+\mathrm{o}(1) \sim \ln(n).\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n-1}}{\ln(n)} = 1,$$

ce qui signifie que

$$I_{n-1} \sim \ln(n).$$

En revenant au début de la question,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{I_{n-1}} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n\ln(2)}{I_{n-1}} = 1.$$

Cela signifie que

$$S_n \sim \frac{I_{n-1}}{\ln(2)},$$

donc que

$$\boxed{S_n \sim \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.}$$

Exercice 2

1. Comme le cosinus est pair,

$\boxed{I_n \text{ est paire, pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

2. Posons $A = \mathbb{R}$, $I = [0,1]$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto (1-t^2)^n\cos(tx).$$

○ Clairement, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^n\sin(tx)$.
○ Tout aussi clairement, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I. Et comme I est un segment, elle y est donc intégrable.
○ Toujours sans difficulté, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
○ Enfin, pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$, où $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment I. Donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, on en déduit que

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I — ce qui n'est pas une surprise puisqu'elle est continue sur ce segment ;
- $\boxed{I_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } A}$;
- pour tout $x \in A$,

$$I_n'(x) = -\int_0^1 t(1-t^2)^n\sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

3. En faisant une intégration par parties

$$\begin{aligned}\underline{I_n'(x)} &= \left[\frac{(1-t^2)^{n+1}}{2\,(n+1)}\sin(t\,x)\right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2\,(n+1)}\,x\cos(t\,x)\,\mathrm{d}t \\ &= \underline{\frac{x}{2\,(n+1)}\,I_{n+1}(x).}\end{aligned}$$

4. Considérons la proposition :

$\mathscr{P}(k)$ « pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est de classe $\mathscr{C}^k$ ».

Avec la question 2, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie pour un entier k. Avec la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n' est de classe $\mathscr{C}^k$, comme produit de $x \mapsto x$ et de I_{n+1} qui l'est d'après $\mathscr{P}(k)$. Alors, I_n est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Par récurrence,

pour tous k et n entiers, I_n est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

5.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}I_{p+1}(0) &= \int_0^1 (1-t^2)^{p+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t\,(1-t^2)^{p+1}\Big]_0^1 \\ &\quad + 2\,(p+1)\int_0^1 t^2\,(1-t^2)^p\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,(p+1)\int_0^1 (t^2-1+1)\,(1-t^2)^p\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,(p+1)\,\Big(-I_{p+1}(0)+I_p(0)\Big).\end{aligned}$$

Alors $\displaystyle I_{p+1}(0) = \frac{2\,(p+1)}{2\,p+3}\,I_p(0).$

5.2. Comme $I_0(0) = 1$, par une récurrence évidente, $I_p(0) \neq 0$ pour tout p. Donc

$$\frac{I_{p+1}(0)}{I_p(0)} = \frac{2\,(p+1)}{2\,p+3}.$$

En multipliant membre à membre entre 0 et $n-1$,

$$\prod_{p=0}^{n-1}\frac{I_{p+1}(0)}{I_p(0)} = \prod_{p=0}^{n-1}\frac{2\,p+2}{2\,p+3}.$$

On reconnait un produit télescopique à gauche. En décalant l'indice à droite, et en multipliant par les entiers pairs aux numérateur et dénominateur,

$$\begin{aligned}\underline{I_n(0)} &= \prod_{p=1}^{n}\left(\frac{2\,p}{2\,p+1}\cdot\frac{2\,p}{2\,p}\right) \\ &= \frac{\Big(\prod_{p=1}^n (2\,p)\Big)^2}{\prod_{k=1}^{2p+1} k} = \underline{\frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2\,n+1)!}}.\end{aligned}$$

6. Interprétons la somme à calculer comme la valeur en 1 de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{(2\,k+1)\,k!\,(n-k)!}.$$

Cette fonction est polynomiale, donc elle est bien définie sur $\mathbb{R}$. Mieux, elle y est de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,x^{2k} = \frac{1}{n!}\,(1-x^2)^n.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}f(1) &= f(0) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\,I_n(0).\end{aligned}$$

Ainsi, avec la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)\,k!\,(n-k)!} = \frac{2^{2n}\,n!}{(2\,n+1)!}.$$

7. Oui !

8. Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Calcul formel.

$$\begin{aligned}&(1)\quad \underline{I_n(x)} = \int_0^1 (1-t^2)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,(t\,x)^{2k}}{(2\,k)!}\,\mathrm{d}t \\ &(2)\quad\qquad = \underline{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2\,k)!}\int_0^1 (1-t^2)^n\,t^{2k}\,\mathrm{d}t.}\end{aligned}$$

Justifications.

(1) Oui, grâce au développement en série entière rappelé à la question précédente.

(2) Introduisons les fonctions

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2\,k)!}\,(1-t^2)^n\,t^{2k}.$$

- Elles sont clairement continues sur $[0,1]$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$,

$$|f_k(t)| = \frac{|x|^{2k}}{(2\,k)!}\,(1-t^2)^n\,t^{2k} \leqslant \frac{|x|^{2k}}{(2\,k)!}.$$

Ce majorant ne dépend pas de t. En outre, on y reconnait le terme général du développement en série entière usuel de $\mathrm{ch}(|x|)$ lequel converge pour tout x réel. Alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

Alors, d'après le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un segment,

- la permutation des symboles $\sum$ et $\int$ est permise et (2) est justifiée.

Commentaire. J'ai oublié de décorer cette question d'une étoile. Toutes mes excuses aux 3/2 non aventureux.

9. Comme somme de série entière,

I_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1 & 2. Voir le cours :-)

3. Par définition de X, $\underline{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

Commentaire. L'énoncé sous-entend que le numéro du dernier saut réussi existe, donc exclut d'office la possibilité que le sauteur réussisse tous les sauts. Cette éventualité est permise, mais elle est « clairement » de probabilité nulle (à vous de le prouver :-) : dans ce cas, il faudrait dire que $X = +\infty$, et donc que $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Nous n'allons pas nous compliquer la vie...

4. L'évènement $[X = 1]$ signifie que le sauteur réussit le premier saut et rate le suivant. Avec les notations de l'énoncé, on a donc

$$[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}.$$

Comme ces évènements ne sont pas indépendants, on utilise la fameuse formule des probabilités composées, qui se réduit ici à la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) \\ &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2} \,|\, S_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Sur le même principe, l'évènement $[X = 2]$ signifie que le sauteur réussit les deux premiers sauts et rate le troisième, c'est-à-dire

$$[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=2]) &= \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}) \\ &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2 \,|\, S_1)\mathbb{P}(\overline{S_3} \,|\, S_1 \cap S_2) \\ &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2 \,|\, S_1)(1 - \mathbb{P}(S_3 \,|\, S_1 \cap S_2)) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6. On généralise sans peine. Les n premiers sauts sont réussis et le $(n+1)^{\text{e}}$ est raté :

$$[X = n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n} S_k\right) \cap \overline{S_{n+1}}.$$

7. Avec la formule des probabilités composées, encore,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=n]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} S_k\right) \cap \overline{S_{n+1}}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(S_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} S_k\right)\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{S_{n+1}} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{n} S_k\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(S_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} S_k\right)\right) \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(S_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{n} S_k\right)\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Commentaire. On rappelle que si dans l'intersection, l'indice du haut est inférieur à celui du bas, l'intersection se réduit à l'univers Ω, et alors le conditionnement est inutile.

8. On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1. \end{aligned}$$

Les calculs sont valides, car toutes les séries manipulées convergent.

Commentaire. Si l'on autorise la valeur $X = +\infty$, on vient de prouver en passant que $\mathbb{P}([X = +\infty]) = 0$, ce qui valide à postériori l'omission de cette valeur.

9. Comme X est à valeurs positives, elle admet forcément une espérance, éventuellement infinie. Conformément au programme, faisons le calcul. Si l'on aboutit à une valeur finie, cela validera le calcul.

Par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n).$$

Mais comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on sait aussi que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Pour $n \geqslant 1$, avec un calcul analogue à la question précédente,

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1.$$

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} h_{2n} - h_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Par l'absurde, si (h_n) convergeait, disons vers une limite finie ℓ, alors la suite $(h_{2n} - h_n)$ convergerait vers $\ell - \ell = 0$, ce qui est impossible puisque cette suite est minorée par $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, la suite (h_n) croît clairement, donc

la suite (h_n) tend vers $+\infty$.

3. Il s'ensuit que la série $\sum h_n \cdot 1^n$ diverge grossièrement, donc la rayon de convergence R_H de la série entière définissant H vérifie $R_H \leqslant 1$.

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \leqslant \sum_{k=1}^n 1 = n$, donc R_H est plus grand que le rayon de convergence de la série entière $\sum n\, x^n$, lequel est le même que celui de $\sum x^n$, qui vaut 1, car n est une fraction rationnelle en n. Ainsi $R_H \geqslant 1$.

Alors, $R_H = 1$ et $I =]-1, 1[$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2}$ est une fraction rationnelle en n, donc le rayon de convergence R_S de la série entière définissant S est le même que celui de $\sum x^n$, donc $R_S = 1$.

De même, $\frac{1}{n}$ est une fraction rationnelle en n, donc le rayon de convergence R_T de la série entière définissant T est le même que celui de $\sum h_n\, x^n$, c'est-à-dire que $R_T = R_H = 1$.

5. C'est du cours :

$$\forall x \in I,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Le rayon de convergence de ce développement en série entière est bien-sûr $R_g = 1$.

6. Soit $x \in I$. D'après le cours,

$$G(x) = \ln(1-x)\,\frac{1}{1-x} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

Ces deux séries entières ont pour rayon de convergence 1, donc en faisant leur produit de Cauchy,

G est développable en série entière, et le rayon de convergence R_G de son développement en série entière est supérieur au minimum des deux précédents, c'est-à-dire $R_G \geqslant 1$.

De plus, toujours d'après le produit de Cauchy, pour tout $x \in I$,

$$G(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot 1\right) x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} h_n\, x^n = -H(x).$$

7. Comme H est continue sur I, elle y admet une unique primitive L qui s'annule en 0, définie par, pour tout $x \in I$,

$$L(x) = \int_0^x H(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2(1-t)\right]_0^x = \frac{1}{2}g^2(x).$$

8. L est développable en série entière, comme primitive de H qui l'est. De plus, le développement en série entière de L s'obtient en intégrant terme à terme celui de H, donc pour tout $x \in I$,

$$L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n}\, x^n.$$

9. Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$L(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_n - \frac{1}{n}}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n - \frac{1}{n}}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n}\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n = T(x) - S(x).$$

10.a. Soit $y \in]0, 1[$. La fonction $f : u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0, 1[$ et au voisinage de 0, $f(u) \sim -1$, donc f se prolonge par continuité en 0 : alors

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge.}$$

À vrai dire, en prolongeant f par continuité en 0 avec $f(0) = -1$, et en notant encore f le prolongement, f est développable en série entière et l'on a, pour tout $u \in]0, 1[$,

$$f(u) = -\frac{1}{u}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n}.$$

Constatons que ce développement en série entière est encore valable en 0. En intégrant terme à terme le développement en série entière de f,

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^y \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2} = -S(y).$$

10.b.* De plus, au voisinage de 1, $f(u) \sim \ln(1-u)$, et $\int_{1/2}^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u$ converge, comme on le voit grâce au changement de variable $v = 1-u$, qui ramène à $\int_0^{1/2} \ln v\,\mathrm{d}v$, laquelle converge.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

Cela signifie que

$$\lim_{y \to 1^-} \int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -S(y).$$

En outre, la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[0, 1]$, car $\left\| x \mapsto \frac{x^n}{n^2} \right\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc, ladite série converge uniformément sur $[0, 1]$, et elle y est continue. Alors

$$\lim_{y \to 1^-} S(y) = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

d'après l'énoncé. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

10.c. Partons de $-S(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} -S(y) &= \Big[\ln(u)\ln(1-u)\Big]_0^y + \int_0^y \frac{\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln(y)\ln(1-y) + \int_0^y \frac{\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Cette intégration par parties est licite : en effet, les fonctions manipulées sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, y[$; au voisinage de 0, $\ln(y)\ln(1-y) \sim -y\ln(y) \to 0$ donc le crochet a un sens ; et comme l'intégrale de départ converge, la nouvelle intégrale converge aussi.

Dans cette dernière, faisons le changement de variable $v = 1-u$, qui est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, y[$ dans $]1-y, 1[$:

$$\int_0^y \frac{\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u = \int_{1-y}^1 \frac{\ln(1-v)}{v}\,\mathrm{d}v\,;$$

Comme la première intégrale converge, la seconde aussi et l'égalité est validée.

Alors,

$$\begin{aligned} -S(y) &= \ln(y)\ln(1-y) + \int_{1-y}^1 \frac{\ln(1-v)}{v}\,\mathrm{d}v \\ &= \ln(y)\ln(1-y) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\ln(1-v)}{v}\,\mathrm{d}v - \int_0^{1-y} \frac{\ln(1-v)}{v}\,\mathrm{d}v \\ &= \ln(y)\ln(1-y) - \frac{\pi^2}{6} + S(1-y), \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{d'où } S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

11. En évaluant cette égalité en $y = \frac{1}{2}$,

$$\frac{\pi^2}{6} = 2\,S\left(\frac{1}{2}\right) + \ln^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'après la question 7,

$$\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = g^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,L\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'après la question 9,

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = T\left(\frac{1}{2}\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc

$$\frac{\pi^2}{6} = 2\,S\left(\frac{1}{2}\right) + 2T\left(\frac{1}{2}\right) - 2\,S\left(\frac{1}{2}\right) = 2T\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\boxed{\text{d'où } T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12}.}$$