Corrigé du quatrième devoir surveillé

I.1.a. La première ligne de B est nulle donc $\det(B) = 0$ et B n'est pas inversible.

I.1.b. En développant par rapport à la dernière ligne,

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc A est inversible.

I.1.c. Clairement, $C = A^{-1}B$ si et seulement si $AC = B$, ce que l'on vérifie sans peine, et qui évite de calculer A^{-1}.

I.2.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En faisant $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$, on a

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4\lambda - 2 & 2\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda + 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda + 1 \end{vmatrix} = (2\lambda - 1)^2.$$

II.2.b. Donc $\mathrm{Sp}(A, B) = \{\frac{1}{2}\}$.

I.2.c. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_{1/2}(A, B) \iff AX = \tfrac{1}{2}BX$$
$$\iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x + y = 2x + y \\ -z = -z \end{cases} \iff 3x + y + z = 0.$$

Où l'on voit que $E_{1/2}(A, B)$ est un plan et qu'il contient $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$, lesquels sont indépendants, donc $E_{1/2}(A, B) = \mathbb{R}\mathbf{u}_2 \oplus \mathbb{R}\mathbf{u}_3$.

I.3.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En faisant $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$, on a

$$\chi_{(B,A)}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3\lambda & \lambda & \lambda \\ 2\lambda - 4 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda + 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda + 2 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Donc $\mathrm{Sp}(B, A) = \{0, 2\}$.

I.3.b. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_0(B, A) \iff BX = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Où l'on voit que $E_0(B, A)$ est une droite et que $\mathbf{u}_1 \in E_0(B, A)$, donc $E_0(B, A) = \mathbb{R}\mathbf{u}_1$.

Et comme A est inversible et que $AC = B$, $BX = 0 \iff CX = 0$, donc $E_0(C) = E_0(B, A)$.

D'une part,

$$X \in E_2(B, A) \iff BX = 2AX \iff AX = \tfrac{1}{2}BX$$
$$\iff X \in E_{1/2}(A, B),$$

et $E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B)$. D'autre part, comme A est inversible,

$$X \in E_2(B, A) \iff BX = 2AX$$
$$\iff A^{-1}BX = 2A^{-1}AX \iff CX = 2X$$
$$\iff X \in E_2(C),$$

et $E_2(B, A) = E_2(C)$. Et avec I.2.c,

$$E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B) = E_2(C) = \mathbb{R}\mathbf{u}_2 \oplus \mathbb{R}\mathbf{u}_3.$$

I.3.c. Donc $\dim E_0(B, A) = 1$, $\dim E_2(B, A) = 2$ et $\dim E_0(B, A) + \dim E_2(B, A) = 3$.

I.4.a. On vient de voir que $\mathbf{u}_1$ est une base de $E_0(C)$ et que $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ en est une de $E_2(C)$.

Donc $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de C.

I.4.b. Ainsi, C est diagonalisable : on peut donc écrire $C = RDR^{-1}$, où $D = \mathrm{diag}(0, 2, 2)$ contient les valeurs propres de C, et R est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{F}$ de vecteurs propres, obtenue en juxtaposant en colonne les vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

I.4.c. Oui, car $B = AC$.

I.4.d. En posant $P = AR$ et $Q = R^{-1}$, on a bien

$$B = (AR)DR^{-1} = PDQ,$$
$$A = (AR)R^{-1} = PI_3Q.$$

II.1.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A) = \det(B(\lambda I_n - B^{-1}A))$$
$$= \det(B)\det(\lambda I_n - B^{-1}A) = \det(B)\,\chi_{B^{-1}A}(\lambda).$$

Comme $\det(B) \neq 0$ et que $\chi_{B^{-1}A}$ est un polynôme unitaire de degré n,

$\chi_{(A,B)}$ est un polynôme de degré n.

II.1.b. En choisissant par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on voit que pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

II.1.c. D'après le cours, si un déterminant a des coefficients polynomiaux de degrés tous inférieurs à 1, c'est un polynôme de degré inférieur à n. Donc

$\chi_{(A,B)}$ est de degré inférieur à n.

II.2.a. Supposons que $(A,B) \sim (A',B')$. Alors il existe P et Q inversibles telles que $A = P\,A'\,Q$ et $B = P\,B'\,Q$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A - \lambda B = P\,A'Q - \lambda P\,B'\,Q = P\,(A' - \lambda B')\,Q$$

et l'implication directe est démontrée.

Supposons réciproquement qu'il existe P et Q inversibles telles que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A - \lambda B = P\,(A' - \lambda B')\,Q$. En faisant $\lambda = 0$, on a $A = P\,A'\,Q$, donc $-\lambda B = -\lambda P\,B'\,Q$ et pour $\lambda = -1$, $B = P\,B'\,Q$, donc $(A,B) \sim (A',B')$ et l'implication réciproque est démontrée.

II.2.b. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= \det(\lambda B - A) = \det(P\,(\lambda B' - A')\,Q)\\ &= \det(P\,Q)\det(\lambda B' - A') = \alpha\,\chi_{(A',B')}(\lambda)\end{aligned}$$

où $\alpha = \det(P\,Q)$ est non nul. Donc les racines des deux polynômes sont les mêmes, c'est-à-dire que

$\mathrm{Sp}(A,B) = \mathrm{Sp}(A',B')$.

II.3.a. Soit $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= \det(\lambda B - A) = \det\Big(-\lambda\Big(-B + \frac{1}{\lambda}A\Big)\Big)\\ &= (-\lambda)^n\,\chi_{(B,A)}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).\end{aligned}$$

II.3.b. Comme (A,B) est régulier, $\chi_{(A,B)}$ n'est pas le polynôme nul, donc il existe $\lambda_0 \neq 0$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda_0) \neq 0$. Alors

$$\chi_{(B,A)}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big) = \frac{\chi_{(A,B)}(\lambda_0)}{(-\lambda_0)^n} \neq 0$$

et $\chi_{(B,A)}$ n'est pas le polynôme nul, donc

(B,A) est régulier.

II.3.c. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum_{k=r}^{s} a_k\,\lambda^k = \lambda^r \sum_{k=r}^{s} a_k\,\lambda^{k-r} = \lambda^r\,Q(\lambda)$$

en nommant $Q(\lambda)$ la dernière somme. On voit que $Q(0) = a_r \neq 0$ donc

0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ d'ordre exactement r.

En outre,

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= (-\lambda)^n\,\chi_{(B,A)}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) = (-\lambda)^n \sum_{k=r}^{s} a_k\,\lambda^{-k}\\ &= (-1)^n \sum_{k=r}^{s} a_k\,\lambda^{n-k}\end{aligned}$$

donc $\deg(\chi_{(A,B)}) = n - r$, car à nouveau $a_r \neq 0$.

II.3.d. On voit que

$$\chi_{(B,A)}(0) = \det(0 \cdot A - B) = \det(-B),$$

donc dire que B est inversible signifie que $0 \notin \mathrm{Sp}(B,A)$ et i) équivaut à iii). Cela signifie également que $r = 0$, donc que $\deg(\chi_{(A,B)}) = n$ et i) équivaut à ii).

II.4. Supposons que $B^{-1}A$ est diagonalisable : il existe R inversible et D diagonale telles que $B^{-1}A = R\,D\,R^{-1}$, ou encore $A = B\,R\,D\,R^{-1}$. Alors, en posant $P = B\,R$ et $Q = R^{-1}$, $A = P\,D\,Q$ et bien-sûr, $B = P\,I_n\,Q$, donc $(A,B) \sim (D, I_n)$ et

(A,B) est diagonalisable.

III.1.a. Posons momentanément $Z = M\,Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$: pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $z_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\,y_j$.
En outre, ${}^tX\,Z = \sum_{i=1}^{n} x_i\,z_i$. Alors

$${}^tX\,M\,Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\,y_j\Big) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\,x_i\,y_j.$$

III.1.b. Pour X non nul, ${}^tX\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, car il existe un indice i tel que $x_i \neq 0$.

III.1.c. Supposons i). Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable. En particulier, son spectre est non vide. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$: ${}^tX\,M\,X = \lambda\,{}^tX\,X$. D'après i), ${}^tX\,M\,X \geqslant 0$ et d'après la question précédente, ${}^tX\,X > 0$. Donc $\lambda \geqslant 0$. Et comme M est inversible, $\lambda \neq 0$, donc $\lambda > 0$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, i) $\Longrightarrow$ ii).

Supposons ii). Comme M est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = P\,D\,{}^tP$. Sur la diagonale de D figurent les valeurs propres de M, qui sont strictement positives d'après ii). Donc $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$. Ainsi, ii) $\Longrightarrow$ iii).

Supposons iii). En notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où $\lambda_i > 0$, posons $\varDelta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$, de sorte que $D = \varDelta^2$. Alors

$$\begin{aligned}M &= P\,D\,{}^tP = P\,\varDelta^2\,{}^tP\\ &= (P\,\varDelta)\,(\varDelta\,{}^tP) = {}^t(\varDelta\,{}^tP)\,(\varDelta\,{}^tP) = {}^tL\,L\end{aligned}$$

en posant $L = \varDelta\,{}^tP$. En outre, $\varDelta$ et P sont inversibles, donc L l'est aussi. Ainsi, iii) $\Longrightarrow$ iv).

Supposons iv). Soit $X \in E \setminus \{0\}$:

$${}^tX\,M\,X = {}^tX\,{}^tL\,L\,X = {}^t(L\,X)\,(L\,X).$$

Comme L est inversible et que $X \neq 0$, $L\,X \neq 0$, donc d'après III.1.b, ${}^t(L\,X)\,(L\,X) > 0$ et ${}^tX\,M\,X > 0$ donc M est positive. Et comme L est inversible, M l'est aussi. Ainsi, iv) $\Longrightarrow$ i).

Finalement, les quatre propositions sont bien équivalentes.

III.2. Soient X et Y dans E : $\langle Y, X\rangle_M = {}^tY\,M\,X$. Comme c'est un réel, il est égal à sa transposée, en le considérant comme une matrice de taille 1 :

$$\begin{aligned}\langle Y, X\rangle_M &= {}^t({}^tY\,M\,X) = {}^tX\,{}^tM\,Y\\ &= {}^tX\,M\,Y = \langle X, Y\rangle_M,\end{aligned}$$

car M est symétrique. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ est symétrique.

Soient de plus Z dans E et λ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\langle X+\lambda Y, Z\rangle_M &= (X+\lambda Y)\,M\,Z = ({}^tX + \lambda\,{}^tY)\,M\,Z\\ &= {}^tX\,M\,Z + \lambda\,{}^tY\,M\,Z = \langle X, Z\rangle_M + \lambda\langle Y, Z\rangle_M,\end{aligned}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ est linéaire à gauche. Comme il est symétrique, il est aussi linéaire à droite, donc il est bilinéaire.

Enfin, si $X \neq 0$, grâce la propriété iv) précédente, $M = {}^tL\,L$ où L est inversible, d'où

$$\langle X, X\rangle_M = {}^tX\,M\,X = {}^tX\,{}^tL\,L\,X = {}^t(L\,X)\,(L\,X) > 0,$$

car L est inversible et $X \neq 0$. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ est défini positif.

Finalement, $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ est bien un produit scalaire.

III.3.a. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme L est inversible, $Z = L\,X \iff X = L^{-1}\,Z$. Alors

$$\begin{aligned}A\,X = \lambda\,B\,X &\iff A\,L^{-1}\,Z = \lambda\,{}^tL\,L\,L^{-1}\,Z\\ &\iff {}^tL^{-1}A\,L^{-1}\,Z = \lambda\,Z.\end{aligned}$$

Ainsi, $C = {}^tL^{-1}A\,L^{-1}$.

III.3.b. Clairement, C est symétrique car A l'est. Il existe alors $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = P\,D\,{}^tP$. Cela signifie que la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, où les $\mathbf{e}_i$ sont les colonnes de P, est orthonormée pour le produit scalaire usuel, c'est-à-dire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{I_n}$; et qu'elle est constituée de vecteurs propres de C : plus précisément, en notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $C\,\mathbf{e}_i = \lambda_i\,\mathbf{e}_i$.

Il existe une famille $\mathcal{B}$ comme annoncé.

III.3.c. D'après III.3.a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$C\,\mathbf{e}_i = \lambda_i\,\mathbf{e}_i \iff A\,L^{-1}\,\mathbf{e}_i = \lambda_i\,B\,L^{-1}\,\mathbf{e}_i.$$

Posons donc $\mathbf{e}'_i = L^{-1}\,\mathbf{e}_i$, ou encore $\mathbf{e}_i = L\,\mathbf{e}'_i$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j\rangle_B &= {}^t\mathbf{e}'_i\,B\,\mathbf{e}'_j = {}^t\mathbf{e}'_i\,{}^tL\,L\,\mathbf{e}'_j\\ &= {}^t(L\,\mathbf{e}'_i)\,(L\,\mathbf{e}'_j) = {}^t\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle_{I_n}.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_{I_n}$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ l'est pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$.

Il existe une famille $\mathcal{B}'$ comme annoncé.

III.3.d. Avec les notations des questions précédentes,

$$A = {}^tL\,C\,L = {}^tL\,P\,D\,{}^tP\,L.$$

Sachant que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P\,{}^tP = I_n$ et

$$B = {}^tL\,L = {}^tL\,P\,{}^tP\,L.$$

En posant $Q = {}^tL\,P$ et $R = {}^tP\,L$, on a donc

$$A = Q\,D\,R \text{ et } B = Q\,I_n\,R$$

donc $(A, B) \sim (D, I_n)$, ce qui signifie que

(A, B) est diagonalisable.

III.4.a. Comme (A, B) est régulier, la fonction polynomiale $\chi_{(A,B)}$ n'est pas identiquement nulle, donc elle admet un nombre fini de racines. Alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $A - \lambda_0\,B$ soit inversible. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tX\,(A - \lambda_0\,B)\,X = \underbrace{{}^tX\,A\,X}_{\geqslant 0}\underbrace{-\,\lambda_0}_{\geqslant 0}\underbrace{{}^tX\,B\,X}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Ainsi, il existe bien $\lambda_0 \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $A - \lambda_0\,B$ est définie-positive.

III.4.b. D'après III.3, comme $A - \lambda_0\,B$ et B sont symétriques et que $A - \lambda_0\,B$ est définie-positive, $(A - \lambda_0\,B, B)$ est diagonalisable. Donc il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ et $(D, D') \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A - \lambda_0\,B = P\,D\,Q$ et $B = P\,D'\,Q$, donc $A = P\,(D + \lambda_0\,D')\,Q$, où $D + \lambda_0\,D' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, donc

(A, B) est diagonalisable.

IV.1.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}X \in E_0(C) &\iff C\,X = 0 \iff A^{-1}\,B\,X = 0\\ &\iff B\,X = 0 \iff B\,X = 0\cdot A\,X\\ &\iff X \in E_0(B, A).\end{aligned}$$

Donc $E_0(C) = E_0(B, A)$.

Si B n'est pas inversible, $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$. Et si B l'est, $E_0(B, A) = E_0(B) = \{0\} = E_\infty(A, B)$. Dans tous les cas,

$E_0(B, A) = E_\infty(A, B)$.

IV.1.b. Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et toujours $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}X \in E_\lambda(C) &\iff C\,X = \lambda X \iff A^{-1}\,B\,X = \lambda\,X\\ &\iff B\,X = \lambda A\,X \iff X \in E_\lambda(B, A)\\ &\iff A\,X = \frac{1}{\lambda}\,B\,X \iff X \in E_{1/\lambda}(A, B).\end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*,\ E_\lambda(C) = E_\lambda(B, A) = E_{1/\lambda}(A, B)$.

Commentaire. Avec la question précédente, cette double égalité est donc aussi valable pour $\lambda = 0$, avec la convention de la question suivante, que $1/0 = \infty$.

IV.1.c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après les questions précédentes et avec la convention que $1/0 = \infty$, on a $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$, donc

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(C) &\iff E_\lambda(C) \neq \{0\}\\ &\iff E_{1/\lambda}(A, B) \neq \{0\} \iff \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}_\infty(A, B).\end{aligned}$$

IV.2. Supposons que B est inversible. D'après II.3.d, $\deg(\chi_{(A,B)}) = n$, soit $d = n$; et d'après la définition 4, $m_\infty(A,B) = 0$, d'où $m_\infty(A,B) = n - d$.

Supposons B non inversible. Alors, toujours d'après II.3.d, 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$: nommons r sa multiplicité, c'est-à-dire $r = m_0(B,A)$. Alors d'après II.3.c, $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n-r$, d'où $d = n - r$, ou encore, $r = n - d$. Et d'après la définition 4, $m_\infty(A,B) = m_0(B,A)$. Ainsi, $m_\infty(A,B) = n - d$.

$\boxed{\text{Finalement, } m_\infty(A,B) = n - d.}$

Comme $\chi_{(A,B)}$ est scindé sur $\mathbb{C}$ et que $\mathrm{Sp}(A,B)$ est l'ensemble de ses racines, on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A,B) = \deg(\chi_{(A,B)}) = d.$$

Si B est inversible, $\mathrm{Sp}_\infty(A,B) = \mathrm{Sp}(A,B)$ et $d = n$, donc

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) = n.$$

Sinon, $\mathrm{Sp}_\infty(A,B) = \mathrm{Sp}(A,B) \cup \{\infty\}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)} m_\lambda(A,B) + m_\infty(A,B) \\ &= d + n - d = n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A,B) = n.}$$

IV.3.a. $\boxed{\text{C'est clair,}}$ d'après la propriété $\mathcal{H}$ et la question précédente.

IV.3.b. D'après IV.1 et IV.3.a,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C)} \dim(E_\lambda(C)) &= \sum_{1/\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim(E_{1/\lambda}(A,B)) \\ &= \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim(E_\mu(A,B)) = n.\end{aligned}$$

Donc d'après le cours, $\boxed{C \text{ est diagonalisable.}}$

IV.3.c. D'après II.4, en échangeant les rôles de A et B, on en déduit que (B,A) est diagonalisable, autrement dit qu'il existe $(D,D') \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $(B,A) \sim (D,D')$. Clairement, on a donc aussi $(A,B) \sim (D',D)$, donc

$\boxed{(A,B) \text{ est diagonalisable.}}$

V.1. Sans difficulté,

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_n = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

V.2. $\boxed{\text{Oui.}}$

V.3.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$c_n(\lambda) = \det(\lambda B_n - A_n) = (-1)^n \det(A_n - \lambda B_n).$$

Donc $\boxed{c_1(\lambda) = 0}$; $\boxed{c_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda}$;

$$\boxed{c_3(\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0},$$

car les deux colonnes extrêmes sont liées ;

$$\begin{aligned}c_4(\lambda) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2,\end{aligned}$$

en développant successivement par rapport à la première ligne, puis la première colonne.

V.3.b. Justement, avec ces deux opérations, on obtient naturellement $\boxed{c_n(\lambda) = \lambda c_{n-2}(\lambda),}$ pour $n \geqslant 2$ et en convenant que $c_0(\lambda) = 1$.

V.3.c. Alors, par une récurrence immédiate,

$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ c_{2k}(\lambda) = \lambda^k \text{ et } c_{2k+1}(\lambda) = 0.}$

V.3.d. Où l'on voit que

$\boxed{(A_n, B_n) \text{ est régulier si et seulement si } n \text{ est pair.}}$

V.4.a. Clairement, $E_0(A_4,B_4) = E_0(A_4) = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$ et $E_\infty(A_4,B_4) = E_0(B_4,A_4) = E_0(B_4) = \mathbb{R}\mathbf{e}_4$, donc

$\boxed{\dim(E_0(A_4,B_4)) = \dim(E_\infty(A_4,B_4)) = 1.}$

V.4.b. Comme $c_4(\lambda) = \lambda^2$, $\boxed{m_0(A_4,B_4) = 2.}$

Un calcul analogue à celui de V.3.a donne $\chi_{(B_4,A_4)}(\lambda) = \lambda^2$, donc $\boxed{m_\infty(A_4,B_4) = 2.}$

V.4.c. D'après l'énoncé, comme (A_4,B_4) est régulier, il est diagonalisable si et seulement s'il vérifie la condition $\mathcal{H}$, ce qui n'est pas le cas puisque $\dim(E_0(A_4,B_4)) \neq m_0(A_4,B_4)$, par exemple.

$\boxed{\text{Donc } (A_4,B_4) \text{ n'est pas diagonalisable.}}$