Corrigé du quatrième devoir surveillé bis

I.A.1. Par définition d'une valeur propre,

$0 \in \text{Sp}(f)$ si et seulement si $f = f - 0 \text{Id}_E$ est non injective.

I.A.2. Comme E est dimension finie, f est injective si et seulement si elle est bijective. Donc

$0 \notin \text{Sp}(f) \iff f \in \text{GL}(E)$.

I.A.3. Grâce à l'identification rappelée entre $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{GL}(E)$, $0 \notin \text{Sp}(M) \iff M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

I.B.1. Clairement, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc $k(N) = 3$.

I.B.2.a. Comme M et N sont semblables, elles représentent dans des bases différentes un même endomorphisme f . Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, M^p et N^p représentent f^p dans ces mêmes bases et

pour tout $p \in \mathbb{N}$, M^p et N^p sont semblables.

I.B.2.b. La seule matrice semblable à la matrice nulle est elle-même, donc M^p et N^p sont simultanément nulles. Ainsi, M est nilpotente et $k(M) = k(N)$.

I.B.3. Cela découle immédiatement du caractère semblable des matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

I.B.4.a. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $j \leq i + 1$:

$$n_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n n_{ik} n_{kj}.$$

Si $k \leq i$, $n_{ik} = 0$, et si $k \geq i + 1$, $k \geq j$ et $n_{kj} = 0$, donc $n_{ij}^{(2)} = 0$. Ainsi,

$N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et $n_{ij}^{(2)} = 0$ si $j \leq i + 1$.

I.B.4.b. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$P(k) : \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \leq i + k - 1 \implies n_{ij}^{(k)} = 0.$$

$P(1)$ est clairement vraie, et nous venons de prouver $P(2)$. Supposons la propriété vraie pour un rang $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$: on a

$$n_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^n n_{i\ell}^{(k)} n_{\ell j}.$$

Supposons que $j \leq i + k$. Si $\ell \leq i + k - 1$, d'après $P(k)$, $n_{i\ell}^{(k)} = 0$; et si $\ell \geq i + k$, $\ell \geq j$ donc $n_{\ell j} = 0$; donc $n_{ij}^{(k+1)} = 0$. Bien-sûr, si k est trop grand, l'inégalité $\ell \geq i + k$ peut ne pas être réalisée. Ainsi,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \leq i + k \implies n_{ij}^{(k+1)} = 0$$

et $P(k + 1)$ est vraie. Alors, par récurrence,

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et $n_{ij}^{(k)} = 0$ si $j \leq i + k - 1$.

I.B.4.c. En vertu de ce qu'on vient de prouver, pour $k = n$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i + n - 1 \geq n$ donc $j \leq i + n - 1$ et $n_{ij}^{(n)} = 0$, ce qui signifie que $N^n = 0$ et $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

I.B.5.a. Sans difficulté, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_f(x) = \chi_N(x) = \prod_{i=1}^n (x - n_{ii}),$$

donc $\text{Sp}(f) = \{n_{ii}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

I.B.5.b. Raisonnons sur une matrice quelconque N associée à f .

Si N est nilpotente, il existe k tel que $N^k = 0$. Le polynôme X^k est annulateur de N donc les valeurs propres de N sont parmi ses racines : il n'y a que 0, donc $\text{Sp}(N) \subset \{0\}$. De plus, si f est nilpotent, il n'est pas injectif, donc 0 est valeur propre. Donc $\text{Sp}(N) = \{0\}$.

Réciproquement, si N n'a que 0 comme valeur propre, comme χ_N est scindé sur $\mathbb{C}$, il s'écrit forcément $\chi_N(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{C}$, et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_N(N) = 0$, c'est-à-dire $N^n = 0$ et N est nilpotente.

f est nilpotent si et seulement si $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

I.B.6. C'est évident d'après ce qui précède et la question I.B.5.a où l'on a vu que les termes diagonaux sont les valeurs propres de la matrice triangulaire.

I.C.1. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , sachant que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables, elles ont même trace. Donc

$\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.

I.C.2. D'après la propriété (T), f est associée une matrice triangulaire supérieure, dont la trace est la somme des termes diagonaux, eux-mêmes valeurs propres de f d'après I.B.5.a. Alors,

$$\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

I.C.3. Comme $\text{Tr}(A) = 0$, A admet deux valeurs propres opposées. Si elles sont non nulles, elles sont distinctes et A est diagonalisable. Si elles sont nulles, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure B dont la diagonale est formée des valeurs propres de A et ne contient donc que des 0. D'après I.B.4., B est nilpotente et d'après I.B.2.b, A l'est aussi. Ainsi,

A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

I.C.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, de trace nulle.

Elle n'est pas nilpotente, car sa diagonale contient des termes non nuls.

Ses valeurs propres sont 1 double, et -2 simple. En outre,

$$\operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2,$$

donc $\dim(E_1(A)) = 1 < m(1) = 2$ d'après le théorème du rang, et A n'est pas diagonalisable.

Lorsque $n = 3$, il existe des matrices de trace nulle ni diagonalisables, ni nilpotentes.

II.A.1.a. Par construction,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp f) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

II.A.1.b. De plus,

$$\det(\exp f) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp f)) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k} \neq 0$$

donc $\exp f \in \operatorname{GL}(E)$.

II.A.2. Soit f l'endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$. Considérons P_1 et P_2 comme matrices de passage de $\mathcal{B}$ à une certaine base $\mathcal{B}_1$, respectivement $\mathcal{B}_2$. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = D_1$, respectivement $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = D_2$. Ces matrices étant diagonales, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de vecteurs propres de f . Par définition de $\exp f$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\exp f) = \exp(D_1)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\exp f) = \exp(D_2)$, ce qui prouve que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp f) = \left[P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2(\exp D_2)P_2^{-1} \right].$$

II.B.1. D'après I.B.4.a, M^k est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont nuls pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc les termes diagonaux de $\sum_{p=0}^{k(f)-1} M^p/p!$ sont ceux de $M^0/0! = I_n$.

Les termes diagonaux de $\exp M$ sont donc tous égaux à 1.

II.B.2. Et comme $\exp M$ est triangulaire,

$$\operatorname{Sp}(\exp f) = \operatorname{Sp}(\exp M) = \{1\}.$$

Donc 0 n'est pas valeur propre de $\exp f$ et

$\exp f \in \operatorname{GL}(E)$.

II.C.1.a. Pour montrer que $\exp d$ et $\exp g$ commutent, comme $\exp g = \sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p/p!$, il suffit de montrer que pour tout p , $\exp d$ et g^p commutent, ce qui découlera facilement par récurrence du fait que $\exp d$ et g commutent. Prouvons-le.

Soit λ une valeur propre de d et e un vecteur propre associé. Comme d est diagonalisable, on peut considérer une base de vecteurs propres de d , $\mathcal{B} = (e, e_2, \dots, e_n)$, associés aux valeurs propres

$\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. D'après II.A, $(\exp d)(e) = e^\lambda e$. En outre, on a clairement $(\exp d)(0) = e^\lambda 0$. Ainsi, pour tout $x \in E_\lambda(E)$, $(\exp d)(x) = e^\lambda x$.

Soit maintenant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de d associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$d(g(e_i)) = g(d(e_i)) = g(\lambda_i e_i) = \lambda_i g(e_i)$$

donc $g(e_i) \in E_{\lambda_i}(d)$ et d'après ce qui précède, $(\exp d)(g(e_i)) = e^{\lambda_i} g(e_i)$. Or $g((\exp d)(e_i)) = g(e^{\lambda_i} e_i) = e^{\lambda_i} g(e_i)$. Ainsi, $\exp d$ et g commutent sur une base donc commutent.

Finalement, $\exp d$ et $\exp g$ commutent.

II.C.1.b. Cela découle naturellement de l'unicité admise dans la propriété (P) et de l'isomorphisme canonique entre $L(E)$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

II.C.2. Posons $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a alors $PMP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$. PDP^{-1} est diagonalisable car elle est semblable à une matrice diagonale; PNP^{-1} est nilpotente d'après I.B.2.b; enfin,

$$\begin{aligned} (PDP^{-1})(PNP^{-1}) &= P(DN)P^{-1} \\ &= P(ND)P^{-1} = (PNP^{-1})(PDP^{-1}). \end{aligned}$$

Donc $PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})$.

D'après II.C.1.b, $\exp M = \exp D \exp N$ et

$$\exp(PMP^{-1}) = \exp(PDP^{-1}) \exp(PNP^{-1})$$

D'après II.A.2, $\exp(PDP^{-1}) = P(\exp D)P^{-1}$ et comme PNP^{-1} est nilpotente,

$$\begin{aligned} \exp(PNP^{-1}) &= \sum_{p=0}^{k(N)-1} (PNP^{-1})^p/p! \\ &= \sum_{p=0}^{k(N)-1} P N^p P^{-1}/p! \\ &= P \left(\sum_{p=0}^{k(N)-1} N^p/p! \right) P^{-1} \\ &= P(\exp N)P^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exp(PMP^{-1}) &= P(\exp D)P^{-1} P(\exp N)P^{-1} \\ &= P(\exp D \exp N)P^{-1} \\ &= P(\exp M)P^{-1}. \end{aligned}$$

III.A.1. Si les valeurs propres λ et μ de f étaient distinctes, f serait diagonalisable. Comme f est supposé non diagonalisable, $\lambda = \mu$.

Si $\dim(E_\lambda) = 2$, alors $E_\lambda = E$ et f est une homothétie, diagonalisable. Donc $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq 1$, ce qui prouve $\dim(E_\lambda) = 1$.

La seule valeur propre de $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est donc 0 et d'après I.B.5), $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est nilpotent. Il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'après la question I.B.5. Or $M^2 = 0$. Donc :

$$(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^2 = 0.$$

III.A.2. Puisque $f(v) \neq \lambda v$, $u \neq 0_E$. Comme $(f - \lambda \text{Id}_E)^2 = 0$,

$$\begin{aligned} f(u) &= f^2(v) - \lambda f(v) \\ &= (2\lambda f - \lambda^2 \text{Id}_E)(v) - \lambda f(v) \\ &= \lambda f(v) - \lambda^2 v \\ &= \lambda u. \end{aligned}$$

D'où $u \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha u + \beta v = 0_E$ (1). On a $\alpha f(u) + \beta f(v) = 0_E$, ou encore $\alpha \lambda u + \beta f(v) = 0_E$ (2). Par combinaison linéaire de (1) et (2), on obtient $\lambda \beta v - \beta f(v) = 0_E$, c'est-à-dire $-\beta u = 0_E$. D'où $\beta = 0$ et $\alpha = 0$; (u, v) est libre et comme $\dim E = 2$,

(u, v) est une base de E .

On a alors $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = u + \lambda v$ (par définition de u). Donc :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}.$$

III.B. Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice du type $D(a, b)$.

Si A n'est pas diagonalisable, soit (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base (e_1, e_2) . Comme A n'est pas diagonalisable, f ne l'est pas et d'après la question III.A, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f admet une matrice du type $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = M(\lambda)$. Donc A est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

Tout élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

III.C. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $D(a, b) = D(a, b) + N$ où N est nulle donc nilpotente : $D(a, b) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$.

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $M(a) = aI_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0$ donc est nilpotente; bien-sûr aI_2 est diagonale et commute avec N . Donc $M(a) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. Ainsi, $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.

Par définition de l'exponentielle d'une matrice diagonale, $\exp(D(a, b)) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \boxed{\exp(M(a))} &= \exp(aI_2) \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III.D. Bien-sûr, $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

Réciproquement, toute matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, donc de $\Gamma_2(\mathbb{C})$; donc d'après II.C.2, $M \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. Finalement,

$$\boxed{\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})}.$$

III.E.1. Diagonalisons $A(\theta)$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\chi_{A(\theta)}(x) = x^2 + \theta^2$ et $\text{Sp}(A(\theta)) = \{i\theta, -i\theta\}$. Sans difficulté,

$$E_{i\theta}(A(\theta)) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ et } E_{-i\theta}(A(\theta)) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Alors $A(\theta) = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} \boxed{\exp(A(\theta))} &= P \exp(D) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & ie^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i \cos \theta & -2i \sin \theta \\ 2i \sin \theta & 2i \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III.E.2. Où l'on voit que $\exp$ n'est pas injective car $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi)) = I_2$ avec $A(0) \neq A(2\pi)$.

III.E.3. Soit $M \in J_2(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$: comme $M \in J_2(\mathbb{C})$, M est une $D(a, b)$ ou une $M(a)$.

Supposons que $M = D(a, b)$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Comme $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, $ab \neq 0$. Posons $a = |a|e^{i\alpha}$ et $b = |b|e^{i\beta}$. Alors

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \exp(\ln(|a| + i\alpha)) & 0 \\ 0 & \exp(\ln(|b| + i\beta)) \end{pmatrix} \\ &= \exp \begin{pmatrix} \ln |a| + i\alpha & 0 \\ 0 & \ln |b| + i\beta \end{pmatrix} \\ &= \exp(D(\ln |a| + i\alpha, \ln |b| + i\beta)). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $M = M(a)$ où $a \in \mathbb{C}$. Comme $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, $a \neq 0$. Posons toujours $a = |a|e^{i\alpha}$. Alors

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \exp(\ln(|a| + i\alpha)) & 1 \\ 0 & \exp(\ln(|a| + i\alpha)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & 1 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

en notant $\lambda = \ln(|a| + i\alpha)$. D'après III.C, on reconnaît presque

$$\exp(M(\lambda)) = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Bien-sûr, ces deux matrices ne sont pas égales — sauf si $\lambda = 0$, ce qui n'est pas puisque $a \neq 0$. Mais elles

sont semblables d'après III.B, car $\begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Finale-ment, tout élément de $J_2(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

III.E.4. Soit $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

D'après III.B, il existe $P_1 \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ et $M_1 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que $M = P_1 M_1 P_1^{-1}$. Comme M est inversible, M_1 l'est aussi et $M_1 \in J_2(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

D'après III.E.3, il existe $P_2 \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ et $M_2 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que $M_1 = P_2 \exp(M_2) P_2^{-1}$. D'après III.D, $J_2 \subset I_2(\mathbb{C})$, donc $M_2 \in I_2(\mathbb{C})$.

Alors, en posant $P = P_1 P_2$, $P^{-1} = P_2^{-1} P_1^{-1}$ et $M = P \exp(M_2) P^{-1} = \exp(P M_2 P^{-1})$, d'après II.C.2 sachant que $M_2 \in I_2(\mathbb{C})$.

Ainsi, $\exp : \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ est surjective.

III.F. Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. En reprenant les notations précédentes, M est semblable à $M_1 \in J_2(\mathbb{C})$. Bien-sûr, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M_1)$. Comme $J_2(\mathbb{C}) \subset I_2(\mathbb{C})$, $\exp(M)$ est aussi semblable à $\exp(M_1)$ et leurs déterminants sont égaux. Il suffit donc de prouver le résultat pour M_1 .

D'après III.C, si $M_1 = D(a, b)$, $\exp(M_1) = D(e^a, e^b)$ et

$$\det(\exp(M_1)) = e^a e^b = e^{a+b} = e^{\text{Tr}(M_1)}.$$

Et si $M_1 = M(a)$, toujours d'après III.C,

$$\det(\exp(M_1)) = e^a e^a = e^{2a} = e^{\text{Tr}(M_1)}.$$

Ainsi,

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \det(\exp M) = e^{\text{Tr}(M)}.$$

III.G.1. La loi considérée est bien-sûr la multiplication des matrices. Par construction, $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$; de plus, $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ car $I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$; enfin, si M_1 et M_2 sont dans $\text{SL}_2(\mathbb{C})$,

$$\det(M_1 M_2^{-1}) = \det(M_1) \det(M_2^{-1}) = \frac{\det(M_1)}{\det(M_2)} = 1$$

et $M_1 M_2^{-1} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$. Donc

$\text{SL}_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Si $M \in L_0(\mathbb{C})$, $\det(\exp M) = e^{\text{Tr}(M)} = 1$, alors $\exp M \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

III.G.2. Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$. D'après I.C.3, M est soit diagonalisable, soit nilpotente.

Si elle est diagonalisable, elle est semblable à une $D(a, b)$, de trace nulle aussi et qui vérifie donc $b = -a$.

Si elle est nilpotente et non diagonalisable, d'après III.B, elle est semblable à une $M(a)$, de trace nulle aussi et qui vérifie donc $a = 0$.

On obtient donc bien le résultat annoncé.

III.G.3. $N' \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ car $\det(N') = 1$.

On voit que les $A(\theta)$ sont dans L_0 . Et d'après III.E.2, on voit donc que $\widetilde{\exp}$ n'est pas injective.

Par l'absurde, supposons qu'elle soit surjective. Alors $N' = \exp(N_1)$ avec $N_1 \in L_0(\mathbb{C})$.

Si N_1 est semblable à une $D(a)$, N' est semblable à $\exp(D(a)) = D(e^a, e^{-a})$, donc elle est diagonalisable : NON.

Si N_1 est semblable à N , N' est semblable à $\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\text{Tr}(N') = \text{Tr}(\exp(N)) = 2$: NON PLUS.

Donc N' n'appartient pas à l'image de $\widetilde{\exp}$, qui n'est donc pas surjective.

IV.A. Comme f admet 3 valeurs propres distinctes, f est diagonalisable : il s'écrit $f = f + 0$ où 0 représente l'endomorphisme nul, qui est nilpotent et commute avec f : $f \in I_3(E)$.

IV.B.1. Comme le polynôme caractéristique de f est scindé, f est trigonalisable, donc il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, la matrice de $f - \lambda \text{Id}_E$ est alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

laquelle matrice est nilpotente d'après I.B.4.c.

Donc $f - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotent.

IV.B.2. Alors on peut écrire $f = \lambda \text{Id}_E + (f - \lambda \text{Id}_E)$, où λId_E est diagonalisable, $f - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotent et λId_E et $f - \lambda \text{Id}_E$ commutent. Ainsi, $f \in I_3(E)$.

IV.C.1. C'est la traduction exacte du caractère trigonalisable de f , comme on l'a vu en IV.B.1 :

il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E et trois nombres a, b, c tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{cases}$$

IV.C.2. (e_1, e_2, e'_3) est une base de E car

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

IV.C.3. On voudrait que $f(e'_3) = \nu e'_3$. En calculant dans la base $\mathcal{B}$, cela revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\alpha + a\beta + b = \nu\alpha \\ \lambda\beta + c = \nu\beta \end{cases}$$

Sachant que $\lambda \neq \nu$, on obtient

$$\beta = \frac{c}{\nu - \lambda}, \quad \alpha = \frac{ac}{(\nu - \lambda)^2} + \frac{b}{\nu - \lambda}.$$

On peut donc choisir $e'_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$ de sorte que $f(e'_3) = \nu e'_3$.

IV.C.4. Par construction,

$$M = \text{Mat}_{(e_1, e_2, e'_3)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

IV.C.5. Considérons les matrices

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $M = D + N$, où D est diagonale et N nilpotente. De plus

$$ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$, et $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.D. Soit $f \in L(E)$. Discutons selon le cardinal de son spectre :

- si $\text{card}(\text{Sp}(f)) = 3$, f admet trois valeurs propres distinctes et d'après IV.A, $f \in \Gamma_3(E)$;
- si $\text{card}(\text{Sp}(f)) = 2$, f admet deux valeurs propres distinctes, dont l'une est double et l'autre simple, et d'après IV.C, $f \in \Gamma_3(E)$;

— si $\text{card}(\text{Sp}(f)) = 1$, f admet une valeur propre triple et d'après IV.B, $f \in \Gamma_3(E)$.

Dans tous les cas, $f \in \Gamma_3(E)$, donc $\underline{\Gamma_3(E) = L(E)}$.

IV.E.1. Avec les notations de III.E.1, en calculant par blocs, on voit que

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \begin{pmatrix} A(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\exp(R(\theta)) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Comme $D = D(i\theta, -i\theta)$, $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(D) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, toujours d'après III.E.1,

$$\begin{aligned} \underline{\exp(R(\theta))} &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(D) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P \exp(D) P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

IV.E.2. Alors $\exp(R(0)) = \exp(R(2\pi)) = I_3$ avec $R(0) \neq R(2\pi)$, donc

$\exp : L(E) \rightarrow \text{GL}(E)$ n'est pas injective.