Concours blanc

Durée : 4 heures
Les calculatrices sont interdites
L'épreuve est constituée de trois problèmes indépendants.

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1
[CCINP22]

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \text{ avec } (R = 0 \text{ ou } \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.

Dans ce problème, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2,\ A = X^2,\ B = X^3 - X,\ P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R$$
$$\text{avec } Q = X + 1 \text{ et } R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I – Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ et } AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II – Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2,\ A = X^2 + 2X \text{ et } B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III – Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV – Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin du problème, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2,\ L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\, L_i$.

Q9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\, L_i$.

Q10. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A\, L_k$ par B.

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)\, L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Problème 2
[CCINP22]

Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face avec la probabilité 1/2). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 :

$$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{série n° 3}} \cap F_8 \cap \cdots$$

Exemple 2 :

$$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{série n° 3}}.$$

Partie I – Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

— si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si n'on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;

— sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q14. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geqslant 0} x^k.$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in \,]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geqslant 0} k\, x^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} k\, x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q16. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

Q17. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q18. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

Q19. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans ce problème ?

Partie II – Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1,\ N_3 = 2,$$
$$N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \text{ et } N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q20. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

Q21. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

Q22. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap F_n),$$
$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap P_n),$$
$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap F_n).$$

Q23. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P(N_m = k)\, x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = x.$$

Q24. Déduire de **Q23** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

Q25. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q26. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

Q27. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

Problème 3

[CCINP19]

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\,\mathrm{d}t.$$

Q28. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\mathit{\Gamma}_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q29. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de $\mathit{\Gamma}_p$ et déterminer une relation entre $\mathit{\Gamma}_{p+1}$ et $\mathit{\Gamma}_p$.

Q30. En déduire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la valeur de $\mathit{\Gamma}_p$.

Q31. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q32. En déduire le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p.$$

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q33. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q34. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|g^{(p)}(0)| \geqslant p^{2p} e^{-p}$.

Q35. En déduire le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p.$$

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

Partie II – Le théorème de Borel

Q36. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q37. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \psi(x) = \frac{1}{x-i}.$$

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q38. Déterminer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q39. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p-1}| \leqslant 2\,(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}.$$

En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a :

$$|\varphi_1^{(p)}(x)| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q40. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot |\varphi_\alpha^{(p)}(x)| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R},\ u_n(x) = \frac{a_n\, x^n}{1+n!\,a_n^2\,x^2}.$$

Q41. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}\,a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, tout entier $n \geqslant p$ et tout réel x, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}\, \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q42. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q43. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\, p!\, 2^n.$$

Q44. En déduire que la fonction $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Q45. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!\,a_p$.

Q46. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e^ siècle.

FIN